ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

X

Е.М. ЛИФШИЦ
Л.П. ПИТАЕВСКИЙ

ФИЗИЧЕСКАЯ КИНЕТИКА

УДК 530.1(075.8)
Л22
ББК 22.31

Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. **Теоретическая физика**: Учеб. пособ.: Для вузов. В 10 т. Т. X. / Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. **Физическая кинетика**. — 2-е изд., испр. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 536 с. — ISBN 5-9221-0125-0 (Т. X).

Заключительный том «Теоретической физики» посвящен макроскопической теории процессов в статистически неравновесных системах. Большое внимание в книге уделено кинетической теории газов, теории плазмы; многие задачи кинетики плазмы дают интересную иллюстрацию общих методов кинетической теории.

1-е изд. — 1979 г.

Для студентов старших курсов физических специальностей вузов, а также аспирантов и научных работников соответствующих специальностей.

Ответственный редактор курса «Теоретическая физика» академик РАН, доктор физико-математических наук *Л. П. Питаевский*

ISBN 5-9221-0125-0 (Т. X)
ISBN 5-9221-0053-X

© ФИЗМАТЛИТ, 1979, 2001, 2002

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 9
Некоторые обозначения 11

Г л а в а I. **Кинетическая теория газов**

1. Функция распределения 13
2. Принцип детального равновесия 17
3. Кинетическое уравнение Больцмана 21
4. H-теорема 26
5. Переход к макроскопическим уравнениям 28
6. Кинетическое уравнение для слабо неоднородного газа 32
7. Теплопроводность газа 37
8. Вязкость газа 39
9. Симметрия кинетических коэффициентов 43
10. Приближенное решение кинетического уравнения 47
11. Диффузия легкого газа в тяжелом 53
12. Диффузия тяжелого газа в легком 58
13. Кинетические явления в газе во внешнем поле 60
14. Явления в слабо разреженных газах 66
15. Явления в сильно разреженных газах 76
16. Динамический вывод кинетического уравнения 88
17. Кинетическое уравнение с учетом тройных столкновений . . 95
18. Вириальное разложение кинетических коэффициентов 102
19. Флуктуации функции распределения в равновесном газе . . 105
20. Флуктуации функции распределения в неравновесном газе . 110

Г л а в а II. **Диффузионное приближение**

21. Уравнение Фоккера–Планка 116
22. Слабо ионизированный газ в электрическом поле 120
23. Флуктуации в слабо ионизованном неравновесном газе 126
24. Рекомбинация и ионизация 131
25. Амбиполярная диффузия 135
26. Подвижность ионов в растворах сильных электролитов . . . 138

Г л а в а III. **Бесстолкновительная плазма**

27. Самосогласованное поле 146
28. Пространственная дисперсия в плазме 150
29. Диэлектрическая проницаемость бесстолкновительной плазмы 153

30. Затухание Ландау 157
31. Диэлектрическая проницаемость максвелловской плазмы . . 161
32. Продольные плазменные волны 166
33. Ионно-звуковые волны 170
34. Релаксация начального возмущения 171
35. Плазменное эхо 176
36. Адиабатический захват электронов 182
37. Квазинейтральная плазма 185
38. Гидродинамика двухтемпературной плазмы 187
39. Солитоны в слабо диспергирующей среде 191
40. Диэлектрическая проницаемость вырожденной бесстолкновительной плазмы 200

Глава IV. **Столкновения в плазме**

41. Интеграл столкновений Ландау 207
42. Передача энергии между электронами и ионами 213
43. Длина пробега частиц в плазме 215
44. Лоренцева плазма 217
45. Убегающие электроны 222
46. Сходящийся интеграл столкновений 225
47. Взаимодействие через плазменные волны 236
48. Поглощение в плазме в высокочастотном пределе 240
49. Квазилинейная теория затухания Ландау 244
50. Кинетическое уравнение для релятивистской плазмы 251
51. Флуктуации в плазме 256

Глава V. **Плазма в магнитном поле**

52. Диэлектрическая проницаемость бесстолкновительной холодной плазмы 265
53. Функция распределения в магнитном поле 269
54. Диэлектрическая проницаемость магнитоактивной максвелловской плазмы 273
55. Затухание Ландау в магнитоактивной плазме 276
56. Электромагнитные волны в магнитоактивной холодной плазме 282
57. Влияние теплового движения на распространение электромагнитных волн в магнитоактивной плазме 289
58. Уравнения гидродинамики магнитоактивной плазмы 292
59. Кинетические коэффициенты плазмы в сильном магнитном поле 297
60. Дрейфовое приближение 310

Глава VI. **Теория неустойчивостей**

61. Пучковая неустойчивость 321
62. Абсолютная и конвективная неустойчивость 325

63. Усиление и непропускание 331
64. Неустойчивость при слабой связи двух ветвей спектра колебаний 336
65. Неустойчивость конечных систем 340

Глава VII. **Диэлектрики**

66. Взаимодействие фононов 343
67. Кинетическое уравнение для фононов в диэлектрике 348
68. Теплопроводность диэлектриков. Высокие температуры . . . 352
69. Теплопроводность диэлектриков. Низкие температуры 358
70. Рассеяние фононов на примесях 362
71. Гидродинамика фононного газа в диэлектрике 364
72. Поглощение звука в диэлектрике. Длинные волны 368
73. Поглощение звука в диэлектрике. Короткие волны 373

Глава VIII. **Квантовые жидкости**

74. Кинетическое уравнение для квазичастиц в ферми-жидкости 376
75. Теплопроводность и вязкость ферми-жидкости 383
76. Поглощение звука в ферми-жидкости 385
77. Кинетическое уравнение для квазичастиц в бозе-жидкости . 389

Глава IX. **Металлы**

78. Остаточное сопротивление 396
79. Электрон-фононное взаимодействие 401
80. Кинетические коэффициенты металла. Высокие температуры 407
81. Процессы переброса в металле 411
82. Кинетические коэффициенты металла. Низкие температуры 415
83. Диффузия электронов по ферми-поверхности 424
84. Гальваномагнитные явления в сильных полях. Общая теория . 429
85. Гальваномагнитные явления в сильных полях. Частные случаи 435
86. Аномальный скин-эффект 441
87. Скин-эффект в инфракрасной области 451
88. Геликоидальные волны в металле 454
89. Магнитоплазменные волны в металле 454
90. Квантовые осцилляции проводимости металла в магнитном поле 459

Глава X. **Диаграммная техника для неравновесных систем**

91. Мацубаровская восприимчивость 469
92. Гриновские функции неравновесной системы 473
93. Диаграммная техника для неравновесных систем 480
94. Собственно-энергетические функции 485
95. Кинетическое уравнение в диаграммной технике 489

Глава XI. **Сверхпроводники**

96. Высокочастотные свойства сверхпроводников. Общая формула 495
97. Высокочастотные свойства сверхпроводников. Предельные случаи 502
98. Теплопроводность сверхпроводника 507

Глава XII. **Кинетика фазовых переходов**

99. Кинетика фазовых переходов первого рода. Образование зародышей 510
100. Кинетика фазовых переходов первого рода. Стадия коалесценции 516
101. Релаксация параметра порядка вблизи точки фазового перехода второго рода 523
102. Динамическая масштабная инвариантность 526
103. Релаксация в жидком гелии вблизи λ-точки 529

Предметный указатель 534

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий, заключительный том «Теоретической физики» посвящен физической кинетике, понимаемой в широком смысле как микроскопическая теория процессов в статистически неравновесных системах.

В отличие от свойств статистически равновесных систем, кинетические свойства значительно более тесно связаны с характером микроскопических взаимодействий в тех или иных физических объектах. Отсюда – огромное разнообразие этих свойств и значительно большая сложность их теории. В связи с этим становится менее однозначным и вопрос об отборе материала, который должен быть включен в общий курс теоретической физики.

Содержание книги ясно из ее оглавления. Сделаем в этой связи лишь несколько замечаний.

Значительное внимание в книге уделено теории газов как наиболее простому в принципе объекту кинетической теории. Ряд глав посвящен теории плазмы — не только ввиду физической важности этого раздела кинетики самого по себе, но и потому, что многие задачи кинетики плазмы могут быть решены до конца и дают поучительную иллюстрацию общих методов кинетической теории.

Кинетические свойства твердых тел в особенности многообразны. При отборе материала для соответствующих глав мы должны были, естественно, ограничиться лишь наиболее общими вопросами, демонстрирующими основные кинетические физические явления и методы их рассмотрения. Лишний раз подчеркнем в этой связи, что эта книга — часть курса теоретической физики и никоим образом не претендует на роль курса теории твердого тела.

В содержании этой книги есть два очевидных дефекта: отсутствуют вопросы кинетики магнитных процессов и теория кинетических явлений, связанных с прохождением быстрых частиц через вещество. Эти дефекты связаны с недостатком времени, и мы решились допустить их в этом издании, с тем чтобы не задерживать еще больше выход книги. Мы позволим себе высказать

надежду на то, что хотя, таким образом, в этой книге содержится не все, что требовалось бы, но в то же время все то, что в ней содержится, представит интерес и будет полезным читателям.

Эта книга завершает программу, намеченную Львом Давыдовичем Ландау более сорока лет тому назад. Весь курс состоит из следующих томов:

Том I. Механика.
Том II. Теория поля.
Том III. Квантовая механика (нерелятивистская теория).
Том IV. Квантовая электродинамика.
Том V. Статистическая физика, часть 1.
Том VI. Гидродинамика.
Том VII. Теория упругости.
Том VIII. Электродинамика сплошных сред.
Том IX. Статистическая физика, часть 2.
Том X. Физическая кинетика.

Напомним, что положение тома IX в этом ряду связано с тем, что в нем существенно используются сведения из гидродинамики и макроскопической электродинамики.

В новой серии изданий, начатой в 1973 г., до настоящего времени вышли тома I, II, III, V, IX, X. Том VII сможет быть переиздан без больших изменений. Из тома IV, изданного раньше под названием «Релятивистская квантовая теория», будут исключены главы о слабых и сильных взаимодействиях, и он вскоре будет переиздан как «Квантовая электродинамика». Тома же VI и VIII, не переиздававшиеся уже в течение многих лет, требуют более значительной переработки и дополнения; мы рассчитываем заняться этим делом в ближайшее время.

Мы хотели бы выразить искреннюю благодарность А.Ф. Андрееву, Р.Н. Гуржи, В.Л. Гуревичу, Ю.М. Кагану, М.И. Каганову и И.М. Лифшицу, с которыми мы обсуждали рассмотренные в этой книге вопросы.

Мы благодарны Л.П. Горькову и А.А. Рухадзе, прочитавшим книгу в рукописи и сделавшим ряд замечаний.

Ноябрь 1978 г. *Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский*

НЕКОТОРЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Функция распределения частиц f (главы I–VI); по импульсам везде отнесена к d^3p.

Функции распределения — числа заполнения квантовых состояний электронов и фононов $n(\mathbf{p})$ и $N(\mathbf{k})$ (главы VII, IX–XI); по импульсам везде отнесены к $d^3p/(2\pi\hbar)^3$.

Интеграл столкновений St, линеаризованный интеграл столкновений I.

Термодинамические величины: температура T, давление P, химический потенциал μ, плотность числа частиц N, полное число частиц $\mathcal{N}$, полный объем $\mathcal{V}$.

Напряженность электрического поля $\mathbf{E}$, магнитная индукция $\mathbf{B}$. Элементарный электрический заряд e (заряд электрона $-e$).

В оценках используются обозначения: характерные длины задачи L; атомные размеры, постоянная решетки d; длина свободного пробега l; скорость звука u.

Усреднение обозначается угловыми скобками $\langle\ldots\rangle$ или чертой над буквой.

Трехмерные векторные индексы обозначаются греческими буквами α, β, ...

В главах III–VI:

Массы электрона и иона m и M.

Заряды электрона и иона $-e$ и ze.

Тепловые скорости электронов и ионов

$$v_{Te} = \left(\frac{T_e}{m}\right)^{1/2}, \quad v_{Ti} = \left(\frac{T_i}{M}\right)^{1/2}.$$

Плазменная частота

$$\Omega_e = \left(\frac{4\pi N_e e^2}{m}\right)^{1/2}, \qquad \Omega_i = \left(\frac{4\pi N_i z^2 e^2}{M}\right)^{1/2}.$$

Дебаевский радиус

$$a_e = \left(\frac{T_e}{4\pi N_e e^2}\right)^{1/2}, \quad a_i = \left(\frac{T_i}{4\pi N_i z^2 e^2}\right)^{1/2},$$

$$a^{-2} = a_e^{-2} + a_i^{-2}.$$

Ларморова частота

$$\omega_{Be} = \frac{eB}{mc}, \quad \omega_{Bi} = \frac{zeB}{Mc}.$$

Ссылки на номера параграфов и формул других томов этого курса снабжены римскими цифрами: I — «Механика», 1988; II — «Теория поля», 1989; III — «Квантовая механика», 1989; IV — «Квантовая электродинамика», 1989; V — «Статистическая физика, часть 1», 1995; VI — «Гидродинамика», 1988; VII — «Теория упругости», 1987; VIII — «Электродинамика сплошных сред», 1982; IX — «Статистическая физика, часть 2», 2000.

ГЛАВА I

КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ГАЗОВ

§ 1. Функция распределения

Эта глава посвящена изложению кинетической теории обычных газов из электрически нейтральных атомов или молекул. Предметом изучения этой теории являются неравновесные состояния и процессы в идеальном газе. Напомним, что под идеальным подразумевается газ настолько разреженный, что каждая молекула в нем почти все время движется как свободная, взаимодействуя с другими молекулами лишь при непосредственных столкновениях с ними. Это значит, другими словами, что среднее расстояние между молекулами $\overline{r} \sim N^{-1/3}$ (N — число молекул в единице объема) предполагается большим по сравнению с их собственными размерами, точнее, по сравнению с радиусом действия межмолекулярных сил d; малую величину $Nd^3 \sim (d/\overline{r})^3$ иногда называют «параметром газовости».

Статистическое описание газа осуществляется *функцией распределения* $f(t, q, p)$ молекул газа в их фазовом пространстве. Она является, вообще говоря, функцией выбранных каким-либо образом обобщенных координат молекулы (совокупность которых обозначена через q) и соответствующих им обобщенных импульсов (совокупность которых обозначена через p), а в нестационарном состоянии — еще и от времени t. Обозначим через $d\tau = dq\,dp$ элемент объема фазового пространства молекулы; dq и dp условно обозначают соответственно произведения дифференциалов всех координат и всех импульсов. Произведение $f\,d\tau$ есть среднее число молекул, находящихся в заданном элементе $d\tau$, т. е. обладающих значениями q и p в заданных интервалах dq и dp. К смыслу понятия среднего в этом определении мы вернемся ниже.

Хотя функция f будет везде подразумеваться определенной как плотность распределения именно в фазовом пространстве, в кинетической теории целесообразно выражать ее через определенным образом выбранные переменные, которые могут и не являться канонически сопряженными обобщенными координатами и импульсами. Условимся, прежде всего, об этом выборе.

Поступательное движение молекулы всегда классично. Оно описывается координатами $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ее центра инерции и им-

пульсом $\mathbf{p}$ (или скоростью $\mathbf{v} = \mathbf{p}/m$) ее движения как целого. В одноатомном газе поступательным движением исчерпывается все движение частиц (атомов). В многоатомных же газах молекулы обладают еще и вращательными и колебательными степенями свободы.

Вращательное движение молекулы в газе практически всегда тоже классично[1]. Оно описывается, прежде всего, заданием вектора вращательного момента молекулы $\mathbf{M}$. Для двухатомной молекулы этого достаточно. Такая молекула представляет собой ротатор, вращающийся в плоскости, перпендикулярной вектору $\mathbf{M}$. Что же касается угла φ поворота оси молекулы в этой плоскости, то в реальных физических задачах функцию распределения можно считать независящей от него, т. е. все ориентации молекулы в указанной плоскости — равновероятными. Это обстоятельство связано с быстротой изменения угла φ при вращении молекулы, и его происхождение можно пояснить следующим образом.

Скорость изменения φ (угловая скорость вращения молекулы) есть $\dot{\varphi} \equiv \Omega = M/I$. Среднее значение этой скорости $\overline{\Omega} \sim \overline{v}/d$, где d — молекулярные размеры, а $\overline{v}$ — среднее значение линейных скоростей. Но различные молекулы имеют различные значения Ω, распределенные по некоторому закону вокруг $\overline{\Omega}$. Поэтому молекулы, имевшие в начальный момент одинаковые φ, очень быстро расходятся по значениям φ; происходит, как говорят, быстрое «размешивание» по углам. Пусть в начальный момент $t = 0$ распределение молекул по углам $\varphi = \varphi_0$ (в интервале от 0 до 2π) и по Ω дается некоторой функцией $f(\varphi_0, \Omega)$. Выделим из нее независящее от φ среднее значение

$$f = \overline{f}(\Omega) + f'(\varphi_0, \Omega), \quad \overline{f}(\Omega) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi_0, \Omega)\, d\varphi_0,$$

так что $f'(\varphi_0, \Omega)$ — знакопеременная функция с равным нулю средним значением. При дальнейшей эволюции за счет свободного вращения молекул ($\varphi = \Omega t + \varphi_0$) функция распределения меняется согласно

$$f(\varphi, \Omega, t) = \overline{f}(\Omega) + f'(\varphi - \Omega t, \Omega)$$

(причем аргумент $\varphi - \Omega t$ подразумевается приведенным к интервалу от 0 до 2π путем вычитания надлежащего целого кратного от 2π). С течением времени f' становится все более быстро осциллирующей функцией от Ω: характерный период осцилляций $\Delta\Omega \sim 2\pi/t$ и уже за время свободного (между двумя столк-

[1]) Напомним, что условие классичности вращения состоит в неравенстве $\hbar^2/2I \ll T$ (где I — момент инерции молекулы, T — температура газа). Это условие в обычных газах может нарушаться разве что для водорода и дейтерия при низких температурах.

новениями) пробега молекул становится малым по сравнению с $\overline{\Omega}$. Но все наблюдаемые физические величины содержат в себе некоторое усреднение функции распределения по Ω; вклад же быстро осциллирующей функции f' в такие средние пренебрежимо мал. Именно это и позволяет заменить функцию распределения $f(\varphi, \Omega)$ усредненной по углам функцией $\overline{f}(\Omega)$.

Изложенные соображения имеют, очевидно, общий характер и относятся к любым быстро меняющимся величинам (фазам), пробегающим значения в конечных интервалах.

Возвращаясь к вращательным степеням свободы молекул, отметим, что в многоатомных газах функция распределения может еще зависеть от углов, определяющих фиксированную ориентацию осей молекулы по отношению к вектору $\mathbf{M}$. Так, в молекулах типа симметрического волчка это — угол между $\mathbf{M}$ и осью волчка (угол прецессии); от быстро меняющихся же углов вращения волчка вокруг собственной оси и прецессионного вращения этой оси вокруг $\mathbf{M}$ функцию распределения снова можно считать не зависящей [1]).

Колебательное движение атомов внутри молекулы практически всегда квантуется, так что колебательное состояние молекулы определяется соответствующими квантовыми числами. В обычных условиях (при не слишком высоких температурах), однако, колебания вообще не возбуждены и молекула находится на своем основном (нулевом) колебательном уровне.

В дальнейшем в этой главе мы будем обозначать символом Γ совокупность всех переменных, от которых зависит функция распределения, за исключением координат молекулы как целого (и времени t). Из элемента фазового объема $d\tau$ выделим множитель $dV = dx\,dy\,dz$, а остальную его часть, преобразованную к используемым переменным (и проинтегрированную по углам, от которых функция f не зависит), обозначим символом $d\Gamma$. Величины Γ обладают важным общим свойством: это — интегралы движения, остающиеся постоянными для каждой молекулы в течение ее свободного (в отсутствие внешнего поля) движения между двумя последовательными столкновениями; в результате же каждого столкновения эти величины, вообще говоря, меняются. Напротив, координаты x, y, z молекулы как целого, разумеется, меняются в течение ее свободного движения.

---

[1]) При вращении молекулы типа шарового волчка (например, CH_4) остаются постоянными два угла, определяющие ориентацию молекулы по отношению к направлению $\mathbf{M}$ (совпадающему с направлением угловой скорости $\mathbf{\Omega}$). При вращении молекулы типа асимметрического волчка остается постоянной комбинация углов, выражающаяся постоянством вращательной энергии $E_{\text{вр}} = M_\xi^2/(2I_1) + M_\eta^2/(2I_2) + M_\zeta^2/(2I_3)$, где M_ξ, M_η, M_ζ — проекции постоянного вектора $\mathbf{M}$ на вращающиеся главные оси инерции молекулы.

Для одноатомного газа величинами Γ являются три компоненты импульса атома $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, так что $d\Gamma = d^3p$. Для двухатомной молекулы в Γ входит, помимо импульса $\mathbf{p}$, еще и вращательный момент $\mathbf{M}$; соответственно элемент $d\Gamma$ можно представить в виде

$$d\Gamma = 2\pi\, d^3p\, M\, dM\, do_{\mathbf{M}}, \tag{1.1}$$

где $do_{\mathbf{M}}$ — элемент телесных углов для направления вектора $\mathbf{M}$ [1]. Для молекулы типа симметрического волчка в число величин Γ входит также и угол θ между $\mathbf{M}$ и осью волчка; элемент

$$d\Gamma = 4\pi^2 d^3p\, M^2\, dM\, do_{\mathbf{M}}\, d\cos\theta$$

(один множитель 2π возникает от интегрирования по углу вращения волчка вокруг своей оси, а другой множитель 2π — от интегрирования по углу прецессионного вращения).

Интеграл

$$\int f(t, \mathbf{r}, \Gamma)\, d\Gamma = N(t, \mathbf{r})$$

есть плотность пространственного распределения частиц газа; $N\, dV$ есть среднее число молекул в элементе объема dV. В этой связи необходимо сделать следующие замечания.

Когда речь идет о бесконечно малом элементе объема dV, то подразумевается, собственно говоря, не математически, а физически малый объем, т. е. участок пространства, размеры которого очень малы по сравнению с характеристическими размерами задачи L, но в то же время велики по сравнению с размерами молекул. Это значит, другими словами, что утверждение о нахождении молекулы в данном элементе объема dV определяет положение молекулы в лучшем случае лишь с точностью до расстояний порядка ее размеров. Это обстоятельство весьма существенно. Если бы координаты частиц газа определялись точно, то при столкновении, скажем, двух атомов одноатомного газа, движущихся по определенным классическим траекториям, результат столкновения был бы тоже вполне определенным. Если же речь идет (как всегда в кинетической теории газов) о столкновении атомов, происходящем в данном физически малом элементе объема, то ввиду неопределенности точного взаимного расположения атомов результат столкновения тоже будет неопределен-

[1]) К выражению (1.1) можно прийти, написав сначала $d\Gamma$ в виде

$$d\Gamma = d^3p\, \delta(\mathbf{Mn})\, d^3M\, do_{\mathbf{n}} = d^3p\, \delta(M\cos\theta) M^2 dM\, do_{\mathbf{M}} d\cos\theta\, d\varphi,$$

где $do_{\mathbf{n}} = d\cos\theta\, d\varphi$ — элемент телесных углов для направлений оси молекулы (θ — угол между этой осью и $\mathbf{M}$). δ-функция выражает тот факт, что $\mathbf{M}$ имеет только две независимые компоненты (соответственно числу вращательных степеней свободы двухатомной молекулы) — момент $\mathbf{M}$ перпендикулярен оси молекулы. Проинтегрировав написанное выражение по $d\cos\theta\, d\varphi$, получим (1.1).

ным и можно говорить лишь о вероятности того или иного его исхода.

Мы можем теперь уточнить, что, говоря о средней плотности числа частиц, мы имеем в виду усреднение по объемам определенных таким образом физически бесконечно малых элементов и соответственно по временам порядка величины времени пролета частиц через такие элементы.

Поскольку размеры элементов объема, по отношению к которым определена функция распределения, велики по сравнению с молекулярными размерами d, то расстояния L, на которых эта функция существенно меняется, во всяком случае должны быть тоже велики по сравнению с d. Соотношение же между размерами физически бесконечно малых элементов объема и средним межмолекулярным расстоянием $\overline{r}$ может быть, вообще говоря, произвольным. Существует, однако, различие в характере определяемой функцией распределения плотности N в зависимости от величины этого соотношения. Если размеры элементов dV не велики по сравнению с $\overline{r}$, то плотность N не является макроскопической величиной: флуктуации числа частиц, находящихся в dV, сравнимы с его средним значением. Плотность N становится макроскопической величиной, лишь если она определена по отношению к объемам dV, содержащим много частиц; тогда флуктуации числа частиц в этих объемах относительно малы. Ясно, однако, что такое определение возможно лишь, если и характерные размеры задачи $L \gg \overline{r}$.

§ 2. Принцип детального равновесия

Рассмотрим столкновения молекул, из которых одна обладает значениями величин Γ, лежащими в заданном интервале $d\Gamma$, а другая — в интервале $d\Gamma_1$, причем в результате столкновения эти молекулы приобретают значения Γ в интервалах соответственно $d\Gamma'$ и $d\Gamma'_1$; для краткости будем говорить просто о столкновениях молекул Γ и Γ_1 с переходом $\Gamma, \Gamma_1 \to \Gamma', \Gamma'_1$. Полное число таких столкновений, отнесенное к единице времени и к единице объема газа, можно написать в виде произведения числа молекул в единице объема (это число равно $f(t, \mathbf{r}, \Gamma)\, d\Gamma$) на вероятность каждой из них испытать столкновение рассматриваемого типа. Последняя во всяком случае пропорциональна числу молекул Γ_1 в единице объема (равному $f(t, \mathbf{r}, \Gamma_1)\, d\Gamma_1$) и интервалам $d\Gamma'$, $d\Gamma'_1$ значений величин Γ обеих молекул после столкновения. Таким образом, число столкновений с переходом $\Gamma, \Gamma_1 \to \Gamma', \Gamma'_1$, происходящих в 1 с в 1 см^3, можно представить в виде

$$w(\Gamma', \Gamma'_1; \Gamma, \Gamma_1) f f_1 d\Gamma\, d\Gamma_1\, d\Gamma'\, d\Gamma'_1 \tag{2.1}$$

(здесь и ниже индексы у функций f отвечают индексам их аргументов Γ: $f_1 \equiv f(t, \mathbf{r}, \Gamma_1)$, $f' \equiv f(t, \mathbf{r}, \Gamma')$ и т. п.); коэффициент w есть некоторая функция всех перечисленных в ней аргументов Γ [1]). Отношение $w\, d\Gamma'\, d\Gamma_1'$ к абсолютной величине относительной скорости $\mathbf{v}-\mathbf{v}_1$ сталкивающихся молекул имеет размерность площади и представляет собой эффективное сечение столкновений:

$$d\sigma = \frac{w(\Gamma', \Gamma_1'; \Gamma, \Gamma_1)}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}_1|} d\Gamma'\, d\Gamma_1'. \tag{2.2}$$

Функция w может быть определена в принципе лишь путем решения механической задачи о столкновении частиц, взаимодействующих по данному закону. Но некоторые свойства этой функции могут быть выяснены уже на основании общих соображений [2]).

Как известно, вероятность столкновения обладает важным свойством, следующим из симметрии законов механики (классической или квантовой), относительно обращения знака времени (см. III, § 144). Обозначим символом Γ^T значения величин, получающихся из Γ при обращении времени. Эта операция меняет знаки всех импульсов и моментов; поэтому если $\Gamma = (\mathbf{p}, \mathbf{M})$, то $\Gamma^T = (-\mathbf{p}, -\mathbf{M})$. Поскольку обращение времени переставляет состояния «до» и «после» столкновения, то

$$w(\Gamma', \Gamma_1'; \Gamma, \Gamma_1) = w(\Gamma^T, \Gamma_1^T; \Gamma'^T, \Gamma_1'^T). \tag{2.3}$$

Отметим, что это соотношение обеспечивает выполнение в состоянии статистического равновесия *принципа детального равновесия*, согласно которому в равновесии число столкновений с переходом Γ, $\Gamma_1 \to \Gamma'$, Γ_1' равно числу столкновений с переходом Γ'^T, $\Gamma_1'^T \to \Gamma^T$, Γ_1^T. Действительно, представив эти числа в виде (2,1), имеем

$$w(\Gamma', \Gamma_1'; \Gamma, \Gamma_1) f_0 f_{01}\, d\Gamma\, d\Gamma_1\, d\Gamma'\, d\Gamma_1' = \\ = w(\Gamma^T, \Gamma_1^T; \Gamma'^T, \Gamma_1'^T) f_0' f_{01}'\, d\Gamma^T\, d\Gamma_1^T\, d\Gamma'^T\, d\Gamma_1'^T,$$

где f_0 — равновесная (больцмановская) функция распределения. Произведение элементов фазового объема $d\Gamma\, d\Gamma_1\, d\Gamma'\, d\Gamma_1'$ при

[1]) Характеристики начального (i) и конечного (f) состояний в функции w записываются в порядке справа налево, $w(f; i)$, в соответствии с тем, как это принято в квантовой механике.

[2]) Сразу же подчеркнем, что, хотя свободное движение молекул предполагается классическим, это отнюдь не исключает того, что сечение их столкновений должно определяться квантовомеханически (как это обычно и имеет место). Весь излагаемый вывод кинетического уравнения не зависит от природы (классической или квантовой) функции w.

обращении времени не меняется; поэтому дифференциалы в обеих частях написанного равенства можно опустить. Далее, при замене t на $-t$ энергия не меняется: $\varepsilon(\Gamma) = \varepsilon(\Gamma^T)$, где $\varepsilon(\Gamma)$ — энергия молекулы как функция величин Γ. Поскольку равновесная функция распределения (в неподвижном как целое газе) зависит только от энергии,

$$f_0(\Gamma) = \text{const} \cdot e^{-\varepsilon(\Gamma)/T} \tag{2.4}$$

(где T — температура газа), то и $f_0(\Gamma) = f_0(\Gamma^T)$. Наконец, в силу закона сохранения энергии при столкновении двух молекул $\varepsilon + \varepsilon_1 = \varepsilon' + \varepsilon_1'$. Поэтому

$$f_0 f_{01} = f_0' f_{01}', \tag{2.5}$$

и написанное выше равенство сводится к (2.3).

Это утверждение остается, конечно, справедливым и для газа, движущегося с макроскопической скоростью $\mathbf{V}$. Равновесная функция распределения в таком случае есть

$$f_0(\Gamma) = \text{const} \cdot \exp\left(-\frac{\varepsilon(\Gamma) - \mathbf{pV}}{T}\right), \tag{2.6}$$

и равенство (2.5) продолжает соблюдаться в силу сохранения импульса при столкновениях: $\mathbf{p} + \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}' + \mathbf{p}_1'$ [1]).

Обратим внимание на то, что равенство (2.5) связано только с видом распределения (2.4) или (2.6) как функции величин Γ; параметры же T и $\mathbf{V}$ могут при этом меняться по объему газа.

Принципу детального равновесия можно придать также и несколько иную формулировку. Для этого произведем наряду с обращением времени еще и инверсию — изменение знака всех координат. Если молекулы не обладают достаточной симметрией, то при инверсии они «перейдут» в стереоизомерные молекулы, с которыми они не могут быть совмещены никаким поворотом молекулы как целого [2]). Другими словами, в таких случаях преобразование инверсии означало бы замену газа по существу другим (стереоизомерным) веществом и никаких новых заключений о свойствах его самого нельзя было бы сделать. Если же симметрия молекул не допускает стереоизомерии, то при инверсии газ остается тем же и величины, описывающие свойства макроскопически однородного газа, должны остаться неизменными.

---

[1]) Формула (2.6) получается из (2.4) преобразованием энергии молекулы из системы отсчета K_0, в которой газ покоится, в систему отсчета K, в которой газ движется со скоростью $\mathbf{V}$: $\varepsilon_0(\Gamma) = \varepsilon(\Gamma) - \mathbf{pV} + m\mathbf{V}^2/2$ (ср. I, (3.5)).

[2]) Напомним, что стереоизомерия существует у молекул, не обладающих ни центром, ни плоскостями симметрии.

Обозначим символом Γ^{TP} совокупность величин, получающихся из Γ одновременным обращением времени и инверсии. Инверсия меняет знак всех обычных (полярных) векторов, в том числе импульса $\mathbf{p}$, и оставляет неизменными аксиальные векторы, в том числе вектор момента $\mathbf{M}$. Поэтому, если $\Gamma = (\mathbf{p}, \mathbf{M})$, то $\Gamma^{TP} = (\mathbf{p}, -\mathbf{M})$. Наряду с равенством (2.3) будем иметь также и равенство [1])

$$w(\Gamma', \Gamma_1'; \Gamma, \Gamma_1) = w(\Gamma^{TP}, \Gamma_1^{TP}; \Gamma'^{TP}, \Gamma_1'^{TP}). \tag{2.7}$$

О переходах, к которым относятся функции w в обеих сторонах равенства (2.3), говорят как об *обращенных по времени* по отношению друг к другу. Они не являются в буквальном смысле *прямым* и *обратным*, поскольку отличаются значениями Γ (Γ и Γ^T). Для одноатомного газа, однако, принцип детального равновесия может быть сформулирован также и в терминах прямых и обратных переходов. Поскольку величинами Γ являются здесь всего три компоненты импульса атома, то $\Gamma = \Gamma^{TP} = \mathbf{p}$ и из (2.7) имеем

$$w(\mathbf{p}', \mathbf{p}_1'; \mathbf{p}, \mathbf{p}_1) = w(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1; \mathbf{p}', \mathbf{p}_1'). \tag{2.8}$$

Здесь мы имеем дело с «детальным равновесием» в буквальном смысле этого слова: каждый микроскопический процесс столкновений балансируется обратным ему процессом.

Функция w удовлетворяет еще одному общему соотношению, не имеющему отношения к симметрии относительно обращения времени. Вывод этого соотношения более нагляден, если производить его в квантовомеханических терминах, рассматривая переходы между состояниями, образующими дискретный ряд; речь идет о состояниях пары молекул, движущихся в заданном конечном объеме. Как известно, амплитуды вероятностей различных процессов столкновения образуют унитарную матрицу $\widehat{S}$ (так называемая *матрица рассеяния*, или *S-матрица*). Условие унитарности гласит: $\widehat{S}^+\widehat{S} = 1$, или, в явном виде с матричными индексами (нумерующими различные состояния),

$$\sum_n S_{in}^+ S_{nk} = \sum_n S_{ni}^* S_{nk} = \delta_{ik}.$$

В частности, при $i = k$

$$\sum_n |S_{ni}|^2 = 1.$$

[1]) Если среди величин Γ имеются также и переменные, определяющие вращательную ориентацию молекулы, то при переходе к Γ^T или Γ^{TP} должны быть определенным образом преобразованы также и они. Так, угол прецессии симметрического волчка задается произведением $\mathbf{Mn}$, где $\mathbf{n}$ — направление оси молекулы; эта величина меняет знак как при обращении времени, так и при инверсии.

Квадрат $|S_{ni}|^2$ определяет вероятность столкновения с переходом $i \to n$ [1]), и написанное равенство выражает собой просто условие нормировки вероятностей: сумма вероятностей всех возможных переходов из заданного начального состояния равна единице. Но условие унитарности можно написать и в виде $\widehat{S}\widehat{S}^+ = 1$ с другим порядком множителей $\widehat{S}$ и $\widehat{S}^+$. Тогда получим $\sum\limits_n S_{in}S_{kn}^* = \delta_{ik}$ и при $i = k$

$$\sum_n |S_{in}|^2 = 1,$$

т. е. равна единице также и сумма вероятностей всех возможных переходов в заданное конечное состояние. Исключив из обеих сумм по одному члену с $n = i$ (переход без изменения состояния), напишем

$$\sum_n{}' |S_{ni}|^2 = \sum_n{}' |S_{in}|^2.$$

Это и есть искомое равенство. В терминах функций w оно запишется в виде

$$\int w(\Gamma', \Gamma_1'; \Gamma, \Gamma_1)\, d\Gamma'\, d\Gamma_1' = \int w(\Gamma, \Gamma_1; \Gamma', \Gamma_1')\, d\Gamma'\, d\Gamma_1'. \qquad (2.9)$$

§ 3. Кинетическое уравнение Больцмана

Перейдем теперь к выводу основного уравнения кинетической теории газов — уравнения, определяющего функцию распределения $f(t, \mathbf{r}, \Gamma)$.

Если столкновениями молекул можно было бы пренебречь вовсе, то каждая молекула газа представляла бы собой замкнутую подсистему и для функции распределения молекул была бы справедлива теорема Лиувилля, в силу которой

$$\frac{df}{dt} = 0 \qquad (3.1)$$

(см. V, § 3). Полная производная означает здесь дифференцирование вдоль фазовой траектории молекулы, определяемой ее уравнениями движения. Напомним, что теорема Лиувилля имеет место для функции распределения, определенной именно как плотность в фазовом пространстве (т. е. в пространстве переменных, являющихся канонически сопряженными обобщенными

---

[1]) Квадрат $|S_{ni}|^2$ при больших временах пропорционален t и после деления на t дает вероятность перехода, отнесенную к единице времени (ср. IV, § 64). Если волновые функции начальных и конечных частиц нормированы «на 1 частицу в единичном объеме», то эта «вероятность» будет иметь ту же размерность (см^3/с), что и определенная согласно (2.1) величина $w\, d\Gamma\, d\Gamma_1$.

координатами и импульсами). Это обстоятельство не мешает, конечно, тому, что сама функция f может быть затем выражена и через любые другие переменные.

В отсутствие внешнего поля величины Γ свободно движущейся молекулы остаются постоянными и меняются только ее координаты $\mathbf{r}$; при этом

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla f. \tag{3.2}$$

Если же газ находится, например, во внешнем поле $U(\mathbf{r})$, действующем на координаты центра инерции молекулы (скажем, в поле тяжести), то

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla f + \mathbf{F}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}, \tag{3.3}$$

где $\mathbf{F} = -\nabla U$ — сила, действующая на молекулу со стороны поля.

Учет столкновений нарушает равенство (3.1); функция распределения перестает быть постоянной вдоль фазовых траекторий. Вместо (3.1) надо писать

$$\frac{df}{dt} = \mathrm{St}\, f, \tag{3.4}$$

где символ $\mathrm{St}\, f$ означает скорость изменения функции распределения благодаря столкновениям: $dV\, d\Gamma \cdot \mathrm{St}\, f$ есть отнесенное к единице времени изменение за счет столкновений числа молекул в фазовом объеме $dV\, d\Gamma$. Написанное в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\mathbf{v}\nabla f + \mathrm{St}\, f$$

уравнение (3.4) (с df/dt из (3.2)) определяет полное изменение функции распределения в заданной точке фазового пространства; член $dV\, d\Gamma(\mathbf{v}\nabla f)$ есть убыль (в 1 с) числа молекул в заданном элементе фазового пространства, связанная с их свободным движением.

Величину $\mathrm{St}\, f$ называют *интегралом столкновений*, а уравнения вида (3.4) называют вообще *кинетическими уравнениями*. Разумеется, кинетическое уравнение приобретает реальный смысл лишь после установления вида интеграла столкновений. К этому вопросу мы сейчас и перейдем.

При столкновении двух молекул значения их величин Γ меняются. Поэтому всякое столкновение, испытанное молекулой, выводит ее из заданного интервала $d\Gamma$; о таких столкновениях говорят как об актах «ухода». Полное число столкновений с переходами $\Gamma, \Gamma_1 \to \Gamma', \Gamma_1'$ со всеми возможными значениями Γ_1, Γ', Γ_1' при заданном Γ, происходящих в единицу времени в объеме

dV, равно интегралу

$$dV\,d\Gamma\int w(\Gamma',\Gamma_1';\Gamma,\Gamma_1)ff_1\,d\Gamma_1\,d\Gamma'\,d\Gamma_1'.$$

Происходят, однако, и такие столкновения («приход»), в результате которых молекулы, обладавшие первоначально значениями величин Γ, лежащими вне заданного интервала $d\Gamma$, попадают в этот интервал. Это — столкновения с переходами Γ', $\Gamma_1'\to\Gamma,\Gamma_1$ снова со всеми возможными Γ_1, Γ', Γ_1' при заданном Γ. Полное число таких столкновений (в единицу времени в объеме dV) равно

$$dV\,d\Gamma\int w(\Gamma,\Gamma_1;\Gamma',\Gamma_1')f'f_1'\,d\Gamma_1\,d\Gamma'\,d\Gamma_1'.$$

Вычтя число актов ухода из числа актов прихода, найдем таким образом, что в результате всех столкновений рассматриваемое число молекул увеличивается в 1 с на

$$dV\,d\Gamma\int(w'f'f_1'-wff_1)\,d\Gamma_1\,d\Gamma'\,d\Gamma_1',$$

где для краткости обозначено

$$w\equiv w(\Gamma',\Gamma_1';\Gamma,\Gamma_1),\qquad w'\equiv w(\Gamma,\Gamma_1;\Gamma',\Gamma_1'). \tag{3.5}$$

Таким образом, находим следующее выражение для интеграла столкновений:

$$\mathrm{St}\,f=\int(w'f'f_1'-wff_1)\,d\Gamma_1\,d\Gamma'\,d\Gamma_1'. \tag{3.6}$$

Во втором члене в подынтегральном выражении интегрирование по $d\Gamma'\,d\Gamma_1'$ относится только к функции w; множители f, f_1 от этих переменных не зависят. Поэтому эту часть интеграла можно преобразовать с помощью соотношения унитарности (2.9). В результате интеграл столкновений примет вид

$$\mathrm{St}\,f=\int w'(f'f_1'-ff_1)\,d\Gamma_1\,d\Gamma'\,d\Gamma_1', \tag{3.7}$$

в котором оба члена входят с одинаковым коэффициентом w' [1]).

Установив вид интеграла столкновений, мы тем самым получили возможность написать кинетическое уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\mathbf{v}\nabla f=\int w'(f'f_1'-ff_1)\,d\Gamma_1\,d\Gamma'\,d\Gamma_1'. \tag{3.8}$$

Это интегро-дифференциальное уравнение называют также *уравнением Больцмана.* Оно было впервые установлено основателем кинетической теории *Людвигом Больцманом* в 1872 г.

Равновесное статистическое распределение должно удовлетворять кинетическому уравнению тождественным образом. Это

---

[1]) Возможность преобразования интеграла столкновений с помощью (2.9) указана *Штюккельбергом* (*E.C.G. Stückelberg*, 1952).

условие действительно выполняется. Равновесное распределение стационарно и (в отсутствие внешнего поля) однородно; поэтому левая часть уравнения (3.8) тождественно обращается в нуль. Равен нулю также и интеграл столкновений: в силу равенства (2.5) обращается в нуль подынтегральное выражение. Удовлетворяет кинетическому уравнению, конечно, и равновесное распределение для газа во внешнем поле. Достаточно вспомнить, что левая часть кинетического уравнения есть полная производная df/dt, тождественно обращающаяся в нуль для всякой функции f, зависящей только от интегралов движения; равновесное же распределение выражается только через интеграл движения — полную энергию молекулы $\varepsilon(\Gamma)$.

В изложенном выводе кинетического уравнения столкновения молекул рассматривались по существу как мгновенные акты, происходящие в одной точке пространства. Ясно поэтому, что кинетическое уравнение позволяет в принципе следить за изменением функции распределения лишь за промежутки времени, большие по сравнению с длительностью столкновений, и на расстояниях, больших по сравнению с размерами области столкновения. Последние порядка величины радиуса действия молекулярных сил d (для нейтральных молекул совпадающего с их размерами); время же столкновения порядка величины $d/\overline{v}$. Эти значения и устанавливают нижний предел расстояний и длительностей, рассмотрение которых допускается кинетическим уравнением (к происхождению этих ограничений мы вернемся еще в § 16). Но фактически обычно нет необходимости (да и возможности) в столь детальном описании поведения системы; для этого понадобилось бы, в частности, и задание начальных условий (пространственного распределения молекул газа) с такой же точностью, что фактически неосуществимо. В реальных физических вопросах существуют характерные параметры длины L и времени T, навязываемые системе условиями задачи (характерные длины градиентов макроскопических величин газа, длины и периоды распространяющихся в нем звуковых волн и т. п.). В таких задачах достаточно следить за поведением системы на расстояниях и за времена, малые лишь по сравнению с этими L и T. Другими словами, малыми лишь по сравнению с L и T должны быть физически бесконечно малые элементы объема и времени. Усредненными по таким элементам задаются и начальные условия задачи.

Для одноатомного газа величины Γ сводятся к трем компонентам импульса атома $\mathbf{p}$, а согласно (2.8) функция w' в интеграле столкновений может быть заменена функцией $w = w(\mathbf{p}', \mathbf{p}'_1; \mathbf{p}, \mathbf{p}_1)$. Выразив затем эту функцию через дифференциальное сечение столкновений $d\sigma$ согласно $w\, d^3p'\, d^3p'_1 = v_{\text{отн}}\, d\sigma$

(где $v_{\text{отн}} = |\mathbf{v} - \mathbf{v}_1|$; см. (2.2)), получим

$$\operatorname{St} f = \int v_{\text{отн}}(f' f_1' - f f_1)\, d\sigma\, d^3 p_1. \tag{3.9}$$

Функция w, а с нею и сечение $d\sigma$, определенное согласно (2.2), содержат в себе δ-функционные множители, выражающие законы сохранения импульса и энергии, в силу которых переменные $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}'$, $\mathbf{p}_1'$ (при заданном $\mathbf{p}$) в действительности не независимы. Но после того, как интеграл столкновений выражен в виде (3.9), можно считать, что эти δ-функции уже устранены соответствующим интегрированием; тогда $d\sigma$ будет обычным сечением рассеяния, зависящим (при заданном $v_{\text{отн}}$) только от угла рассеяния.

Для качественного рассмотрения кинетических явлений в газе используется грубая оценка интеграла столкновений с помощью понятия *длины свободного пробега* l — некоторого среднего расстояния, проходимого молекулой между двумя последовательными столкновениями [1]). Эта величина имеет, конечно, лишь качественный характер; самое ее определение зависит от того, какое именно кинетическое явление в газе рассматривается.

Длина свободного пробега может быть выражена через сечение столкновений σ и плотность числа молекул в газе N. Пусть молекула в своем движении прошла 1 см; на этом пути она столкнулась с молекулами, находящимися в объеме σ (объем цилиндра с площадью сечения σ и длиной 1 см); в этом объеме имеется σN молекул. Ясно поэтому, что

$$l \sim \frac{1}{N\sigma}. \tag{3.10}$$

Сечение столкновений $\sigma \sim d^2$, где d — молекулярные размеры. Написав также $N \sim \bar{r}^{-3}$, где $\bar{r}$ — среднее расстояние между молекулами, найдем, что

$$l \sim \bar{r}\left(\frac{\bar{r}}{d}\right)^2 = d\left(\frac{\bar{r}}{d}\right)^3. \tag{3.11}$$

Поскольку в газе $\bar{r} \gg d$, то длина пробега $l \gg \bar{r}$.

Отношение $\tau \sim l/\bar{v}$ называют *временем свободного пробега.* Для грубой оценки интеграла столкновений можно положить

$$\operatorname{St} f \sim -\frac{f - f_0}{\tau} \sim -\frac{\bar{v}}{l}(f - f_0). \tag{3.12}$$

Написав в числителе разность $f - f_0$, мы тем самым учли, что интеграл столкновений обращается в нуль для равновесной функции распределения. Знак минус в (3.12) выражает тот факт, что

---

[1]) Это понятие было впервые введено *Клаузиусом* (*R. Clausius*, 1858).

столкновения являются механизмом установления статистического равновесия, т. е. стремятся уменьшить отклонение функции распределения от равновесной. В этом смысле величина τ играет роль времени релаксации для установления равновесия в каждом элементе объема газа.

§ 4. H-теорема

Предоставленный самому себе газ, как и всякая замкнутая макроскопическая система, стремится перейти в равновесное состояние. Соответственно эволюция неравновесной функции распределения согласно кинетическому уравнению должна сопровождаться возрастанием энтропии газа. Покажем, что это действительно так.

Как известно, энтропия идеального газа, находящегося в неравновесном макроскопическом состоянии, описывающемся функцией распределения f, равна

$$S = \int f \ln \frac{e}{f}\, dV\, d\Gamma \tag{4.1}$$

(см. V, § 40). Дифференцируя это выражение по времени, пишем

$$\frac{dS}{dt} = \int \frac{\partial}{\partial t}\left(f \ln \frac{e}{f}\right) dV\, d\Gamma = -\int \ln f \frac{\partial f}{\partial t}\, dV\, d\Gamma. \tag{4.2}$$

Поскольку установление статистического равновесия в газе осуществляется столкновениями молекул, то возрастание энтропии должно быть связано именно со столкновительной частью изменения функции распределения. Изменение же этой функции, связанное со свободным движением молекул, не может изменить энтропии газа. Действительно, эта часть изменения функции распределения дается (для газа во внешнем поле $U(\mathbf{r})$) первыми двумя членами в правой части уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\mathbf{v}\nabla f - \mathbf{F}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} + \operatorname{St} f.$$

Их вклад в производную dS/dt равен

$$-\int \ln f \left[-\mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - \mathbf{F}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}\right] dV\, d\Gamma = \int \left[\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F}\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\right]\left(f \ln \frac{f}{e}\right) dV\, d\Gamma.$$

Но интеграл по dV от члена с производной $\partial/\partial\mathbf{r}$ преобразуется согласно теореме Гаусса в интеграл по поверхности; при интегрировании по всему объему газа он обращается в нуль, поскольку за пределами занимаемого газом объема $f = 0$. Аналогичным образом, член с производной $\partial/\partial\mathbf{p}$ при интегрировании по d^3p

преобразуется в интеграл по бесконечно удаленной поверхности в импульсном пространстве и тоже обращается в нуль.

Таким образом, для изменения энтропии остается

$$\frac{dS}{dt} = -\int \ln f \cdot \mathrm{St}\, f\, d\Gamma\, dV. \tag{4.3}$$

Этот интеграл можно преобразовать с помощью приема, который мы сформулируем (имея в виду также и дальнейшие применения) в общем виде для интеграла

$$\int \varphi(\Gamma)\, \mathrm{St}\, f\, d\Gamma,$$

где $\varphi(\Gamma)$ — любая функция величин Γ. Представив интеграл столкновений в виде (3.6), пишем

$$\int \varphi(\Gamma)\, \mathrm{St}\, f\, d\Gamma = \int \varphi w(\Gamma, \Gamma_1; \Gamma', \Gamma'_1) f' f'_1 d^4\Gamma - \\ - \int \varphi w(\Gamma', \Gamma'_1; \Gamma, \Gamma_1) f f_1 d^4\Gamma,$$

где для краткости обозначено $d^4\Gamma = d\Gamma\, d\Gamma_1\, d\Gamma'\, d\Gamma'_1$. Поскольку интегрирование производится здесь по всем переменным Γ, Γ_1, Γ', Γ'_1, то можно, не меняя интеграла, произвести любое переобозначение переменных. Взаимно переобозначив Γ, Γ_1 и Γ', Γ'_1 во втором интеграле, получим

$$\int \varphi(\Gamma)\, \mathrm{St}\, f\, d\Gamma = \int (\varphi - \varphi') w(\Gamma, \Gamma_1; \Gamma', \Gamma'_1) f' f'_1 d^4\Gamma.$$

Переобозначив теперь Γ, $\Gamma' \leftrightarrow \Gamma_1$, Γ'_1, взяв полусумму получающихся таким образом интегралов и учтя очевидную симметрию функции w по отношению к двум сталкивающимся частицам, получим формулу преобразования

$$\int \varphi(\Gamma)\, \mathrm{St}\, f\, d\Gamma = \frac{1}{2} \int (\varphi + \varphi_1 - \varphi' - \varphi'_1) w' f' f'_1 d^4\Gamma. \tag{4.4}$$

В частности, интеграл $\int \mathrm{St}\, f\, d\Gamma = 0$; представив здесь $\mathrm{St}\, f$ в виде (3.7), получим

$$\int \mathrm{St}\, f\, d\Gamma = \int w'(f' f'_1 - f f_1)\, d^4\Gamma = 0. \tag{4.5}$$

В применении к интегралу (4.3) формула (4.4) дает

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} \int w' f' f'_1 \ln \frac{f' f'_1}{f f_1} d^4\Gamma\, dV = \frac{1}{2} \int w' f f_1 x \ln x d^4\Gamma\, dV,$$

где обозначено $x = f' f'_1 / f f_1$. Вычтя из этого выражения половину равного нулю интеграла (4.5), перепишем его в виде

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} \int w' f f_1 (x \ln x - x + 1)\, d^4\Gamma\, dV. \tag{4.6}$$

Функция в скобках в подынтегральном выражении неотрицательна при всех $x > 0$: она равна нулю при $x = 1$ и возрастает по обе стороны от этой точки. По определению положительны также и множители w', f, f_1 под знаком интеграла. Таким образом, мы приходим к требуемому результату

$$\frac{dS}{dt} \geqslant 0, \tag{4.7}$$

выражающему собой закон возрастания энтропии (знак равенства имеет место в равновесии) [1].

Обратим внимание на то, что в силу неотрицательности подынтегрального выражения в (4.6) (а тем самым и в (4.3)) положителен не только весь интеграл (4.3) по $d\Gamma\, dV$, но и интеграл только по $d\Gamma$. Другими словами, столкновения приводят к возрастанию энтропии в каждом элементе объема газа. Это, конечно, не значит, что энтропия вообще возрастает в каждом элементе объема, так как она может переноситься из одного участка в другой за счет свободного движения молекул.

§ 5. Переход к макроскопическим уравнениям

Кинетическое уравнение Больцмана дает микроскопическое описание эволюции состояния газа. Покажем, каким образом производится переход от кинетического уравнения к обычным уравнениям гидродинамики, осуществляющим менее детальное, макроскопическое описание этой эволюции. Такое описание применимо в условиях, когда макроскопические свойства газа (его температура, плотность, скорость и т. п.) достаточно медленно меняются вдоль его объема: расстояния L, на которых происходит существенное изменение этих свойств, должны быть велики по сравнению с длиной свободного пробега молекул l.

Мы уже упоминали, что интеграл

$$N(t, \mathbf{r}) = \int f(t, \mathbf{r}, \Gamma)\, d\Gamma \tag{5.1}$$

есть плотность распределения молекул газа в пространстве; произведение $\rho = mN$ есть соответственно массовая плотность газа. Скорость макроскопического движения газа обозначим через $\mathbf{V}$ (в отличие от микроскопических скоростей молекул $\mathbf{v}$); она определяется как среднее значение

$$\mathbf{V} = \overline{\mathbf{v}} = \frac{1}{N} \int \mathbf{v} f\, d\Gamma. \tag{5.2}$$

[1]) Доказательство закона возрастания энтропии с помощью кинетического уравнения было дано Больцманом и явилось первым микроскопическим обоснованием этого закона. В применении к газам этот закон часто называют *H-теоремой* (по обозначению — H, использованному Больцманом для энтропии).

Столкновения не меняют ни числа сталкивающихся частиц, ни их суммарных энергии и импульса. Ясно поэтому, что столкновительная часть изменения функции распределения не может привести к изменению также и макроскопических величин в каждом элементе объема газа — его плотности, внутренней энергии и макроскопической скорости $\mathbf{V}$. Действительно, столкновительные части изменения полных числа, энергии и импульса молекул в единице объема газа даются равными нулю интегралами

$$\int \operatorname{St} f\, d\Gamma = 0, \qquad \int \varepsilon \operatorname{St} f\, d\Gamma = 0, \qquad \int \mathbf{p} \operatorname{St} f\, d\Gamma = 0. \tag{5.3}$$

В этих равенствах легко убедиться, применив к интегралам преобразование (4.4) соответственно с $\varphi = 1$, ε или $\mathbf{p}$ (первый интеграл обращается в нуль тождественно, а второй и третий — в силу сохранения энергии и импульса при столкновениях).

Напишем теперь кинетическое уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(v_\alpha f) = \operatorname{St} f \tag{5.4}$$

и проинтегрируем его по $d\Gamma$, предварительно умножив на m, p_β или ε. Во всех трех случаях правая часть уравнения обратится в нуль и мы получим следующие уравнения:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{V} = 0, \tag{5.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho V_\alpha + \frac{\partial \Pi_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = 0, \tag{5.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} N\bar{\varepsilon} + \operatorname{div} \mathbf{q} = 0. \tag{5.7}$$

Первое из них есть обычное гидродинамическое уравнение непрерывности, выражающее собой сохранение массы газа. Второе уравнение выражает сохранение импульса; тензор $\Pi_{\alpha\beta}$ определен как

$$\Pi_{\alpha\beta} = \int m v_\alpha v_\beta f\, d\Gamma \tag{5.8}$$

и представляет собой тензор плотности потока импульса: его компонента $\Pi_{\alpha\beta}$ есть α-я компонента импульса, переносимого молекулами в 1 с через единичную площадку, перпендикулярную оси x_β. Наконец, (5.7) есть уравнение сохранения энергии; вектор $\mathbf{q}$ определен как

$$\mathbf{q} = \int \varepsilon \mathbf{v} f\, d\Gamma \tag{5.9}$$

и представляет собой плотность потока энергии в газе.

Для приведения (5.6) и (5.7) к виду обычных гидродинамических уравнений надо, однако, еще выразить $\Pi_{\alpha\beta}$ и $\mathbf{q}$ через макроскопические величины. Мы уже упоминали, что макроскопическое описание газа предполагает достаточную малость градиентов его макроскопических характеристик. В таком случае в

первом приближении можно считать, что в каждом отдельном участке газа успевает установиться тепловое равновесие, между тем как весь газ в целом не находится в равновесии. Другими словами, в каждом элементе объема функция распределения f принимается *локально-равновесной* — совпадающей с равновесной функцией f_0 с теми плотностью, температурой и макроскопической скоростью, которые имеются в данном элементе. Такое приближение означает пренебрежение всеми диссипативными процессами в газе — вязкостью и теплопроводностью. Естественно, что уравнения (5.6), (5.7) сводятся при этом к уравнениям гидродинамики идеальной жидкости. Убедимся в этом.

Равновесное распределение в участке газа, движущемся как целое со скоростью $\mathbf{V}$, отличается от равновесного распределения в неподвижном газе лишь преобразованием Галилея; перейдя в систему отсчета K', движущуюся вместе с газом, мы получим обычное распределение Больцмана. Скорости $\mathbf{v}'$ молекул в этой системе связаны с их скоростями в исходной системе K посредством $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}$. Пишем

$$\Pi_{\alpha\beta} = mN\langle v_\alpha v_\beta\rangle = mN\langle (V_\alpha + v'_\alpha)(V_\beta + v'_\beta)\rangle = mN(V_\alpha V_\beta + \langle v'_\alpha v'_\beta\rangle);$$

члены $V_\alpha v'_\beta$ и $V_\beta v'_\alpha$ обращаются в нуль при усреднении по направлениям $\mathbf{v}'$, поскольку все направления скорости молекулы в системе K' равновероятны. По этой же причине

$$\langle v'_\alpha v'_\beta\rangle = \frac{1}{3}\langle v'^2\rangle\delta_{\alpha\beta}; \tag{5.10}$$

средний же квадрат тепловой скорости $\langle v'^2\rangle = 3T/m$, где T — температура газа. Наконец, заметив, что NT есть давление газа P, получим

$$\Pi_{\alpha\beta} = \rho V_\alpha V_\beta + \delta_{\alpha\beta}P, \tag{5.11}$$

т. е. известное выражение для тензора потока импульса в идеальной жидкости; уравнение (5.6) с этим тензором эквивалентно гидродинамическому уравнению Эйлера (см. VI, § 7).

Для преобразования интеграла (5.9) замечаем, что энергия молекулы ε в системе отсчета K связана с ее энергией ε' в системе K посредством

$$\varepsilon = \varepsilon' + m\mathbf{V}\mathbf{v}' + \frac{1}{2}mV^2.$$

Подставив это выражение и $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}$ в $\mathbf{q} = N\overline{\varepsilon\mathbf{v}}$, получим

$$\mathbf{q} = N\mathbf{V}\left[\frac{mV^2}{2} + \frac{m}{3}\overline{v'^2} + \overline{\varepsilon'}\right] = \mathbf{V}\left(\frac{\rho V^2}{2} + P + N\overline{\varepsilon'}\right)$$

(при усреднении произведения $\mathbf{v}'(\mathbf{V}\mathbf{v}')$ использовано (5.10)). Но $N\overline{\varepsilon'}$ есть термодинамическая внутренняя энергия газа, отнесен-

ная к единице объема; сумма же $N\overline{\varepsilon'} + P$ есть тепловая функция W того же количества газа. Таким образом,

$$\mathbf{q} = \mathbf{V}\left(\frac{\rho V^2}{2} + W\right) \tag{5.12}$$

в согласии с известным выражением потока энергии в гидродинамике идеальной жидкости (см. VI, § 6).

Наконец, остановимся на законе сохранения момента импульса в кинетическом уравнении. Строгий закон сохранения должен иметь место лишь для полного момента газа, складывающегося из орбитального момента молекул в их поступательном движении и их собственных вращательных моментов $\mathbf{M}$; плотность полного момента дается суммой двух интегралов

$$\int[\mathbf{rp}]f\,d\Gamma + \int \mathbf{M}f\,d\Gamma. \tag{5.13}$$

Но эти два члена имеют различный порядок величины. Орбитальный момент относительного движения двух молекул, находящихся на среднем расстоянии $\bar{r}$ друг от друга, порядка величины $m\bar{v}\bar{r}$; собственный же момент молекулы $M \sim m\bar{v}d$, т. е. мал по сравнению с орбитальным моментом (поскольку всегда $d \ll \bar{r}$).

Естественно поэтому, что кинетическое уравнение Больцмана, отвечающее первому неисчезающему приближению по малой величине $d/\bar{r}$, не может учесть малых изменений орбитального момента, связанных с обменом между двумя частями полного момента (5.13). С этим связано то обстоятельство, что уравнение Больцмана сохраняет полный орбитальный момент газа: из равенства $\int \mathbf{p}\,\mathrm{St}\,f\,d\Gamma = 0$, выражающего сохранение импульса, автоматически следует, что и

$$\int[\mathbf{rp}]\,\mathrm{St}\,f\,d\Gamma = \left[\mathbf{r}\int \mathbf{p}\,\mathrm{St}\,f\,d\Gamma\right] = 0. \tag{5.14}$$

Происхождение этого свойства очевидно: поскольку в уравнении Больцмана столкновения рассматриваются как происходящие в одной точке, то вместе с суммой импульсов сталкивающихся молекул сохраняется также и сумма их орбитальных моментов. Чтобы получить уравнение, описывающее изменение орбитального момента, надо было бы учесть члены следующего порядка по $d/\bar{r}$, связанные с тем, что в момент соударения молекулы находятся на конечном расстоянии друг от друга.

В то же время, однако, самый процесс обмена моментом между поступательными и вращательными степенями свободы может быть описан в рамках уравнения Больцмана соотношением вида

$$\frac{d\mathcal{M}}{dt} = \int \mathbf{M}\,\mathrm{St}\,f\,d\Gamma, \tag{5.15}$$

где $\mathcal{M}$ — плотность собственного момента вращения молекул. Поскольку при столкновении молекул сумма их собственных моментов не обязана сохраняться, интеграл в правой части (5.15),

вообще говоря, отличен от нуля и определяет скорость изменения величины $\mathcal{M}$. Если в газе каким-либо искусственным способом создана отличная от нуля плотность момента, то его дальнейшая релаксация будет определяться уравнением (5.15).

§ 6. Кинетическое уравнение для слабо неоднородного газа

Для того чтобы включить в рассмотрение диссипативные процессы (теплопроводность и вязкость) в слабо неоднородном газе, надо обратиться к следующему (после рассмотренного в предыдущем параграфе) приближению. Вместо того чтобы считать функцию распределения в каждом участке газа просто локально-равновесной функцией f_0, учтем теперь также и небольшое отличие f от f_0, т. е. напишем f в виде

$$f = f_0 + \delta f, \quad \delta f = -\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}\chi(\Gamma) = \frac{1}{T} f_0 \chi, \tag{6.1}$$

где δf — малая поправка ($\delta f \ll f_0$). Последнюю целесообразно представлять в написанном здесь виде, вынеся из нее множитель $-\partial f_0/\partial\varepsilon$; для распределения Больцмана эта производная отличается лишь множителем $1/T$ от самой функции f_0. Поправка δf должна в принципе определяться путем решения линеаризованного по отношению к ней кинетического уравнения [1]).

Помимо самого кинетического уравнения, функция χ должна удовлетворять еще и определенным дополнительным условиям. Дело в том, что f_0 есть равновесная функция распределения, отвечающая заданным (в рассматриваемом элементе объема) плотностям числа частиц, энергии и импульса газа, т. е. заданным значениям интегралов

$$\int f_0\, d\Gamma, \quad \int \varepsilon f_0\, f\Gamma, \quad \int \mathbf{p} f_0\, d\Gamma. \tag{6.2}$$

Неравновесная функция распределения (6.1) должна приводить к тем же значениям этих величин, т. е. интегралы с f и f_0 должны быть одинаковыми. Это значит, другими словами, что функция χ должна удовлетворять условиям

$$\int f_0 \chi\, d\Gamma = 0, \quad \int f_0 \chi \varepsilon\, d\Gamma = 0, \quad \int f_0 \chi \mathbf{p}\, d\Gamma = 0. \tag{6.3}$$

Подчеркнем, что само понятие температуры в неравновесном газе становится определенным лишь в результате приписывания интегралам (6.2) определенных значений. Это понятие имеет

[1]) Такой метод решения кинетического уравнения принадлежит *Энскогу* (*D. Enskog*, 1917).

безусловный характер лишь в полностью равновесном состоянии газа в целом; для определения же температуры в неравновесном газе требуется дополнительное условие, каковым и служит задание указанных значений.

Преобразуем, прежде всего, интеграл столкновений в кинетическом уравнении (3.8). При подстановке в него функций в виде (6.1) члены, не содержащие малой поправки χ, взаимно сокращаются, поскольку равновесная функция распределения обращает интеграл столкновений в нуль. Члены первого порядка дают

$$\operatorname{St} f = \frac{f_0}{T} I(\chi), \tag{6.4}$$

где $I(\chi)$ обозначает линейный интегральный оператор

$$I(\chi) = \int w' f_{01}(\chi' + \chi_1' - \chi - \chi_1)\, d\Gamma_1\, d\Gamma'\, d\Gamma_1'. \tag{6.5}$$

Здесь использовано равенство $f_0 f_{01} = f_0' f_{01}'$; множитель f_0 может быть вынесен из-под знака интеграла, поскольку по $d\Gamma$ не производится интегрирования.

Обратим внимание на то, что интеграл (6.5) тождественно обращается в нуль для функций

$$\chi = \mathrm{const}, \quad \chi = \mathrm{const}\cdot\varepsilon, \quad \chi = \mathbf{p}\,\delta\mathbf{V} \tag{6.6}$$

(где $\delta\mathbf{V}$ — постоянный вектор); обращение в нуль для второй и третьей из этих функций связано с сохранением энергии и импульса в каждом столкновении. Будучи независимыми от времени и координат, функции (6.6) удовлетворяют, следовательно, и всему кинетическому уравнению.

Эти решения имеют простое происхождение. Кинетическому уравнению тождественно удовлетворяет равновесная функция распределения с любыми (постоянными) плотностью частиц и температурой. Поэтому ему автоматически удовлетворяет и малая поправка

$$\delta f = \frac{\partial f_0}{\partial N}\,\delta N = f_0 \frac{\delta N}{N},$$

возникающая при изменении плотности на δN; отсюда возникает первое из решений (6.6). Аналогичным образом удовлетворяет уравнению и добавка

$$\delta f = \frac{\partial f_0}{\partial T}\,\delta T,$$

возникающая в результате изменения T на малую постоянную величину δT. Производная же $\partial f_0/\partial T$ складывается из члена вида $\mathrm{const}\cdot f_0$ (происходящего от дифференцирования нормировочного множителя в f_0) и из члена, пропорционального εf_0; отсюда и возникает второе из решений (6.6). Третье же из этих решений

возникает как выражение галилеевского принципа относительности: равновесная функция распределения должна удовлетворять кинетическому уравнению также и после перехода к любой другой инерциальной системе отсчета. При переходе к системе, движущейся относительно первоначальной с малой постоянной скоростью $\delta\mathbf{V}$, скорости молекул $\mathbf{v}$ заменяются на $\mathbf{v}+\delta\mathbf{V}$, так что функция распределения получает приращение

$$\delta f = \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}}\,\delta\mathbf{V} = -\frac{f_0}{T}\mathbf{p}\,\delta\mathbf{V},$$

чему и отвечает третье из решений (6.6). «Паразитные» решения (6.6) исключаются наложением трех условий (6.3).

Преобразование левой части кинетического уравнения произведем сразу в общем виде, охватывающем как задачу о теплопроводности, так и задачу о вязкости. Другими словами, допускаем существование градиентов всех макроскопических характеристик газа, в том числе его макроскопической скорости $\mathbf{V}$.

Равновесная функция распределения в неподвижном ($\mathbf{V}=0$) газе есть распределение Больцмана, которое напишем в виде

$$f_0 = \exp\left(\frac{\mu - \varepsilon(\Gamma)}{T}\right), \tag{6.7}$$

где μ — химический потенциал газа. Распределение же в движущемся газе отличается от (6.7) (как уже было отмечено в § 5) лишь галилеевским преобразованием скорости. Для того чтобы написать эту функцию в явном виде, выделим из полной энергии молекулы $\varepsilon(\Gamma)$ кинетическую энергию ее поступательного движения:

$$\varepsilon(\Gamma) = \frac{mv^2}{2} + \varepsilon_{\text{вн}}; \tag{6.8}$$

внутренняя энергия $\varepsilon_{\text{вн}}$ включает в себя энергию вращения молекулы и колебательную энергию. Заменив $\mathbf{v}$ на $\mathbf{v}-\mathbf{V}$, получим распределение Больцмана в движущемся газе:

$$f_0 = \exp\left(\frac{\mu - \varepsilon_{\text{вн}}}{T}\right)\exp\left(-\frac{m(\mathbf{v}-\mathbf{V})^2}{2T}\right). \tag{6.9}$$

В слабо неоднородном газе f_0 зависит от координат и времени, причем эта зависимость возникает через посредство меняющихся вдоль газа (и со временем) его макроскопических характеристик — скорости $\mathbf{V}$, температуры T и давления P (а с ними и μ). Поскольку градиенты этих величин предполагаются малыми, в левой части кинетического уравнения достаточно (в рассматриваемом приближении) подставить f_0 вместо f.

Вычисления можно несколько упростить, учтя очевидную независимость интересующих нас в конечном счете кинетических коэффициентов от скорости $\mathbf{V}$. Поэтому достаточно рас-

смотреть какую-либо одну точку в газе и выбрать в качестве таковой ту, в которой скорость $\mathbf{V}$ (но, конечно, не ее производные) равна нулю.

Продифференцировав выражение (6.9) по времени и положив затем $\mathbf{V} = 0$, получим

$$\frac{T}{f_0}\frac{\partial f_0}{\partial t} = \left[\left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_P - \frac{\mu - \varepsilon(\Gamma)}{T}\right]\frac{\partial T}{\partial t} + \left(\frac{\partial \mu}{\partial P}\right)_T \frac{\partial P}{\partial t} + m\mathbf{v}\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}.$$

Согласно известным термодинамическим формулам имеем

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_P = -s, \qquad \left(\frac{\partial \mu}{\partial P}\right)_T = \frac{1}{N}, \qquad \mu = w - Ts,$$

где w, s и $1/N$ — тепловая функция, энтропия и объем, отнесенные к одной частице газа. Поэтому

$$\frac{T}{f_0}\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\varepsilon(\Gamma) - w}{T}\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{N}\frac{\partial P}{\partial t} + m\mathbf{v}\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}. \tag{6.10}$$

Аналогичным образом найдем

$$\frac{T}{f_0}\mathbf{v}\nabla f_0 = \frac{\varepsilon(\Gamma) - w}{T}\mathbf{v}\nabla T + \frac{1}{N}\mathbf{v}\nabla P + m v_\alpha v_\beta V_{\alpha\beta}, \tag{6.11}$$

где для краткости введено обозначение

$$V_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial V_\beta}{\partial x_\alpha}\right), \quad V_{\alpha\alpha} = \operatorname{div}\mathbf{V}; \tag{6.12}$$

в последнем члене в (6.11) произведена тождественная замена

$$v_\alpha v_\beta \frac{\partial V_\beta}{\partial x_\alpha} = v_\alpha v_\beta V_{\alpha\beta}.$$

Левая часть кинетического уравнения получается сложением выражений (6.10), (6.11). При этом все производные по времени от макроскопических величин могут быть выражены через их пространственные градиенты согласно гидродинамическим уравнениям идеальной (т. е. невязкой и нетеплопроводящей) среды; учет диссипативных членов здесь привел бы к величинам высшего порядка малости. В точке, в которой $\mathbf{V} = 0$, уравнение Эйлера дает

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla P = -\frac{1}{Nm}\nabla P. \tag{6.13}$$

В той же точке из уравнения непрерывности имеем $\partial N/\partial t = -N\operatorname{div}\mathbf{V}$, или

$$\frac{1}{N}\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial t} = -\operatorname{div}\mathbf{V} \tag{6.14}$$

(использовано уравнение состояния идеального газа $N = P/T$). Наконец, уравнение сохранения энтропии, $\partial s/\partial t + \mathbf{V}\nabla s = 0$, дает $\partial s/\partial t = 0$, или

$$\frac{c_p}{T}\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial t} = 0, \tag{6.15}$$

где использованы термодинамические формулы

$$\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_P = \frac{c_p}{T}, \qquad \left(\frac{\partial s}{\partial P}\right)_T = -\frac{1}{P}$$

(c_p — теплоемкость, тоже отнесенная к одной молекуле); вторая из этих формул относится к идеальному газу. Из равенств (6.14), (6.15) находим

$$\frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{c_v}\operatorname{div}\mathbf{V}, \qquad \frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{c_p}{c_v}\operatorname{div}\mathbf{V} \tag{6.16}$$

(учтено, что для идеального газа $c_p - c_v = 1$).

Простое вычисление приводит теперь к результату

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla f_0 = \\ = \frac{f_0}{T}\left\{\frac{\varepsilon(\Gamma) - w}{T}\mathbf{v}\nabla T + m v_\alpha v_\beta V_{\alpha\beta} + \frac{w - Tc_p - \varepsilon(\Gamma)}{c_v}\operatorname{div}\mathbf{V}\right\}. \tag{6.17}$$

Подчеркнем, что до сих пор не делалось никаких специфических предположений о характере температурной зависимости термодинамических величин; использовалось лишь общее уравнение состояния идеального газа. Для газа же с классическим вращением молекул и невозбужденными колебаниями теплоемкость не зависит от температуры и тепловая функция [1])

$$w = c_p T. \tag{6.18}$$

Тогда последний член в (6.17) упрощается; приравняв (6.17) и (6.4), напишем окончательно кинетическое уравнение в виде

$$\frac{\varepsilon(\Gamma) - c_p T}{T}\mathbf{v}\nabla T + \left[m v_\alpha v_\beta - \delta_{\alpha\beta}\frac{\varepsilon(\Gamma)}{c_v}\right] V_{\alpha\beta} = I(\chi). \tag{6.19}$$

В следующих двух параграфах это уравнение будет рассмотрено более подробно в применении к задачам о теплопроводности и вязкости.

Напомним, что уже из закона возрастания энтропии следует, что градиент давления (в отсутствие градиентов температуры и скорости) не приводит к возникновению диссипативных процессов (ср. VI, § 49). В кинетическом уравнении это требование удовлетворяется автоматически и проявляется в выпадении градиента давления из левой части (6.19).

---

[1]) Предполагается, что энергия молекулы $\varepsilon(\Gamma)$ отсчитывается от ее наименьшего значения; соответственно этому опускается и независящая от температуры аддитивная постоянная в w.

§ 7. Теплопроводность газа

Для вычисления коэффициента теплопроводности газа надо решать кинетическое уравнение с градиентом температуры. Сохранив в (6.19) лишь первый член в левой части, имеем

$$\frac{\varepsilon(\Gamma) - c_p T}{T}\mathbf{v}\nabla T = I(\chi). \qquad (7.1)$$

Решение этого уравнения надо искать в виде

$$\chi = \mathbf{g}\nabla T, \qquad (7.2)$$

где вектор $\mathbf{g}$ — функция только от величин Γ. Действительно, при подстановке в (7.1) в обеих частях равенства получаем множитель ∇T. Поскольку уравнение должно иметь место при произвольных значениях вектора ∇T, должны быть равными коэффициенты при ∇T в обеих частях равенства, так что мы получаем для $\mathbf{g}$ уравнение

$$\mathbf{v}\frac{\varepsilon(\Gamma) - c_p T}{T} = I(\mathbf{g}), \qquad (7.3)$$

уже не содержащее ∇T (а тем самым и явной зависимости от координат).

Функция χ должна еще удовлетворять условиям (6.3). С функцией χ в виде (7.2) первые два из этих условий удовлетворяются автоматически: это очевидно уже из того, что уравнение (7.3) не содержит никаких векторных параметров, вдоль которых могли бы быть направлены постоянные векторы — интегралы $\int f_0\mathbf{g}\,d\Gamma$ и $\int f_0\varepsilon\mathbf{g}\,d\Gamma$. Третье же накладывает на решение уравнения (7.3) дополнительное условие

$$\int f_0\mathbf{v}\mathbf{g}\,d\Gamma = 0. \qquad (7.4)$$

Если кинетическое уравнение решено и функция χ известна, то можно определить коэффициент теплопроводности, вычисляя поток энергии, точнее — его диссипативную часть, не связанную просто с конвективным переносом энергии (эту часть потока энергии будем обозначать символом $\mathbf{q}'$). Но в отсутствие макроскопического движения в газе $\mathbf{q}'$ совпадает с полным потоком энергии $\mathbf{q}$, даваемым интегралом (5.9). При $f = f_0$ этот интеграл исчезает тождественно за счет интегрирования по направлениям $\mathbf{v}$. Поэтому при подстановке f (6.1) остается

$$\mathbf{q} = \frac{1}{T}\int \mathbf{v}f_0\chi\varepsilon\,d\Gamma = \frac{1}{T}\int f_0\varepsilon\mathbf{v}(\mathbf{g}\nabla T)\,d\Gamma,$$

или, в компонентах,

$$q_\alpha = -\varkappa_{\alpha\beta}\frac{\partial T}{\partial x_\beta}, \qquad \varkappa_{\alpha\beta} = -\frac{1}{T}\int f_0\varepsilon v_\alpha g_\beta\,d\Gamma. \qquad (7.5)$$

Ввиду изотропии равновесного газа какие-либо избранные направления в нем отсутствуют и тензор $\varkappa_{\alpha\beta}$ может выражаться лишь через единичный тензор $\delta_{\alpha\beta}$, т. е. сводится к скаляру:

$$\varkappa_{\alpha\beta} = \varkappa\delta_{\alpha\beta}, \qquad \varkappa = \varkappa_{\alpha\alpha}/3.$$

Таким образом, поток энергии

$$\mathbf{q} = -\varkappa\nabla T, \tag{7.6}$$

где скалярный *коэффициент теплопроводности*

$$\varkappa = -\frac{1}{3T}\int f_0\varepsilon\mathbf{v}\mathbf{g}\,d\Gamma. \tag{7.7}$$

Положительность этой величины (поток $\mathbf{q}$ должен быть направлен противоположно градиенту температуры) автоматически обеспечивается кинетическим уравнением (см. § 9).

В одноатомных газах скорость $\mathbf{v}$ — единственный вектор, от которого зависит функция $\mathbf{g}$; ясно поэтому, что эта функция должна иметь вид

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{v}}{v}g(v). \tag{7.8}$$

В многоатомных газах функция $\mathbf{g}$ зависит уже от двух векторов — скорости $\mathbf{v}$ и момента $\mathbf{M}$. Если симметрия молекул не допускает существования стереоизомерии, то интеграл столкновений, а с ним и уравнение (7.3) инвариантны по отношению к инверсии; такой же инвариантностью должно обладать и его решение χ. Другими словами, $\chi = \mathbf{g}\nabla T$ должно быть истинным скаляром, а поскольку градиент ∇T есть истинный вектор, то таким же вектором должна быть и функция $\mathbf{g}$. Так, для двухатомного газа, где векторами $\mathbf{v}$ и $\mathbf{M}$ исчерпываются величины Γ, функция $\mathbf{g}(\Gamma)$ имеет вид

$$\mathbf{g} = \mathbf{v}g_1 + \mathbf{M}(\mathbf{v}\mathbf{M})g_2 + [\mathbf{v}\mathbf{M}]g_3, \tag{7.9}$$

где g_1, g_2, g_3 — скалярные функции от скалярных аргументов $\mathbf{v}^2$, $\mathbf{M}^2$, $(\mathbf{v}\mathbf{M})^2$; это наиболее общий вид истинного вектора, который может быть построен из истинного же вектора $\mathbf{v}$ и псевдовектора $\mathbf{M}$ [1]).

Если же вещество представляет собой стереоизомер, то инвариантность по отношению к инверсии отсутствует: как уже отмечалось в § 2, в таком случае инверсия «превращает» газ, по существу, в другое вещество. Соответственно функция χ сможет содержать также и псевдоскалярные члены, т. е. функция $\mathbf{g}$ — псевдовекторные члены (например, член вида $g_4\mathbf{M}$).

---

[1]) Решения уравнения Больцмана для газа с вращающимися молекулами впервые рассматривались *Ю.М. Каганом* и *А.М. Афанасьевым* (1961).

Условие применимости изложенного метода решения кинетического уравнения (основанного на предположении о близости f к f_0) можно выяснить путем оценки интеграла столкновений согласно (3.12). Средняя энергия молекулы $\bar{\varepsilon} \sim T$, поэтому оценка обеих частей уравнения (7.3) дает $\bar{v} \sim g/\tau \sim g\bar{v}/l$, откуда $g \sim l$. Условие $\chi/T \sim g|\nabla T|/T \ll 1$ (эквивалентное требованию $\delta f \ll f_0$) означает, следовательно, что расстояния L, на которых температура испытывает существенное изменение ($|\nabla T| \sim T/L$), должны быть велики по сравнению с l. Другими словами, функция вида (6.1) представляет собой первые члены разложения решения кинетического уравнения по степеням малого отношения l/L.

Оценка интеграла (7.7) с $g \sim l$ приводит к формуле

$$\varkappa \sim cNl\bar{v}, \tag{7.10}$$

где c — отнесенная к одной молекуле теплоемкость газа. Это — известная элементарная газокинетическая формула (ср. примеч. на с. 57). Положив в ней $l \sim 1/N\sigma$, $c \sim 1$ и $\bar{v} \sim \sqrt{T/m}$, имеем

$$\varkappa \sim \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{T}{m}}. \tag{7.11}$$

В этой оценке сечение σ относится к средней тепловой скорости молекул, и в этом смысле его надо понимать как функцию температуры. С увеличением скорости сечение, вообще говоря, убывает; соответственно σ будет убывающей функцией температуры. При не слишком низких температурах молекулы газа ведут себя, качественно, как твердые упругие частицы, взаимодействующие друг с другом лишь при непосредственных столкновениях. Такому характеру взаимодействия отвечает слабо зависящее от скорости (а потому и от температуры) сечение столкновений. В этих условиях зависимость $\varkappa$ от температуры близка к пропорциональности $\sqrt{T}$.

При заданной температуре коэффициент теплопроводности, как это видно из (7.11), не зависит от плотности газа или, что то же, от его давления. Подчеркнем, что это важное свойство не связано со сделанными при оценке предположениями и является точным в рамках кинетического уравнения Больцмана. Оно возникает как следствие того, что в этом уравнении учитываются только парные столкновения молекул (именно поэтому длина пробега оказывается обратно пропорциональной плотности газа).

§ 8. Вязкость газа

Вычисление вязкости газа с помощью кинетического уравнения производится аналогично вычислению теплопроводности.

Разница состоит в том, что отклонение от равновесия обусловлено не градиентом температуры, а неоднородностью потока газа по скорости макроскопического движения $\mathbf{V}$. При этом снова предполагается, что характерные размеры задачи $L \gg l$.

Существуют, как известно, два вида вязкости, коэффициенты которых принято обозначать посредством η и ζ. Они определяются как коэффициенты в тензоре вязких напряжений $\sigma'_{\alpha\beta}$, входящем как часть в тензор плотности потока импульса:

$$\Pi_{\alpha\beta} = P\delta_{\alpha\beta} + \rho V_\alpha V_\beta - \sigma'_{\alpha\beta}, \tag{8.1}$$

$$\sigma'_{\alpha\beta} = 2\eta\left(V_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\,\delta_{\alpha\beta}\operatorname{div}\mathbf{V}\right) + \zeta\delta_{\alpha\beta}\operatorname{div}\mathbf{V}, \tag{8.2}$$

где $V_{\alpha\beta}$ определено согласно (6.12) (см. VI, § 15). В несжимаемой жидкости проявляется лишь вязкость η. «Вторая» же вязкость ζ проявляется при движениях, в которых $\operatorname{div}\mathbf{V} \neq 0$. Оба коэффициента целесообразно вычислять раздельно.

Опустив в общем кинетическом уравнении (6.19) член с градиентом температуры, перепишем его в виде

$$mv_\alpha v_\beta\left(V_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\,\delta_{\alpha\beta}\operatorname{div}\mathbf{V}\right) + \left(\frac{mv^2}{3} - \frac{\varepsilon(\Gamma)}{c_v}\right)\operatorname{div}\mathbf{V} = I(\chi), \tag{8.3}$$

где в левой части разделены члены, создающие первую и вторую вязкости. При вычислении первой вязкости надо считать, что $\operatorname{div}\mathbf{V} = 0$. Получающееся уравнение тождественно перепишем в виде

$$m\left(v_\alpha v_\beta - \frac{1}{3}\,\delta_{\alpha\beta}v^2\right)V_{\alpha\beta} = I(\chi), \tag{8.4}$$

где оба тензорных множителя в левой стороне имеют равный нулю след.

Решение этого уравнения ищем в виде

$$\chi = g_{\alpha\beta}V_{\alpha\beta}, \tag{8.5}$$

где $g_{\alpha\beta}(\Gamma)$ — симметричный тензор; поскольку след $V_{\alpha\alpha} = 0$, то прибавлением к $g_{\alpha\beta}$ члена $\propto \delta_{\alpha\beta}$ можно всегда добиться того, чтобы было и $g_{\alpha\alpha} = 0$, не меняя при этом функции χ. Для $g_{\alpha\beta}$ имеем уравнение

$$m\left(v_\alpha v_\beta - \frac{1}{3}\,\delta_{\alpha\beta}v^2\right) = I(g_{\alpha\beta}). \tag{8.6}$$

Дополнительные условия (6.3) удовлетворяются автоматически.

Поток импульса вычисляется по функции распределения как интеграл (5.8). Интересующая нас часть этого тензора — тензор вязких напряжений — дается интегралом

$$\sigma'_{\alpha\beta} = -\frac{m}{T}\int v_\alpha v_\beta f_0\chi\,d\Gamma = \eta_{\alpha\beta\gamma\delta}V_{\gamma\delta}, \tag{8.7}$$

$$\eta_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\frac{m}{T}\int f_0 v_\alpha v_\beta g_{\gamma\delta}\,d\Gamma. \tag{8.8}$$

Величины $\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$ составляют тензор четвертого ранга, симметричный по парам индексов α, β и γ, δ и дающий нуль при упрощении по паре γ, δ. Ввиду изотропии газа этот тензор может выражаться только через единичный тензор $\delta_{\alpha\beta}$. Выражение, удовлетворяющее этим условиям:

$$\eta_{\alpha\beta\gamma\delta} = \eta\left[\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma} - \frac{2}{3}\,\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}\right].$$

Тогда $\sigma'_{\alpha\beta} = 2\eta V_{\alpha\beta}$, так что η есть искомый скалярный коэффициент вязкости. Он определяется путем упрощения тензора по парам индексов α, γ и β, δ:

$$\eta = -\frac{m}{10T}\int v_\alpha v_\beta g_{\alpha\beta} f_0\, d\Gamma. \tag{8.9}$$

В одноатомном газе $g_{\alpha\beta}$ является функцией только от вектора $\mathbf{v}$. Общий вид такого симметричного тензора с равным нулю следом есть

$$g_{\alpha\beta} = \left(v_\alpha v_\beta - \frac{1}{3}\,\delta_{\alpha\beta} v^2\right) g(v) \tag{8.10}$$

с одной только скалярной функцией $g(v)$. В многоатомных газах тензор $g_{\alpha\beta}$ составляется с помощью большего числа переменных, в том числе двух векторов $\mathbf{v}$ и $\mathbf{M}$. В отсутствие стереоизометрии $g_{\alpha\beta}$ может содержать только истинно-тензорные члены; в газе стереоизомерного вещества допускаются также и псевдотензорные члены.

Оценка коэффициента вязкости, аналогичная оценке (7.10) для коэффициента теплопроводности, приводит к известной элементарной газокинетической формуле

$$\eta \sim m\overline{v}Nl \tag{8.11}$$

(см. примеч. на с. 57). При этом температуропроводность и кинематическая вязкость оказываются одинакового порядка величины:

$$\varkappa/(Nc_p) \sim \eta/(Nm) \sim \overline{v}l. \tag{8.12}$$

Положив в (8.11) $l \sim 1/N\sigma$ и $\overline{v} \sim (T/m)^{1/2}$, получим

$$\eta \sim \sqrt{mT}/\sigma. \tag{8.13}$$

Все сказанное в § 7 о зависимости $\varkappa$ от давления и от температуры относится и к коэффициенту вязкости η.

Для вычисления второго коэффициента вязкости надо считать отличным от нуля второй член в левой части кинетического уравнения (8.3):

$$\left(\frac{mv^2}{3} - \frac{\varepsilon(\Gamma)}{c_v}\right)\operatorname{div}\mathbf{V} = I(\chi). \tag{8.14}$$

Ищем решение в виде

$$\chi = g\,\mathrm{div}\,\mathbf{V} \tag{8.15}$$

и для функции g находим уравнение

$$\frac{mv^2}{3} - \frac{\varepsilon(\Gamma)}{c_v} = I(g). \tag{8.16}$$

Вычислив тензор напряжений и сравнив его с выражением $\zeta\delta_{\alpha\beta}\,\mathrm{div}\,\mathbf{V}$, получим коэффициент вязкости в виде

$$\zeta = -\frac{m}{3T}\int v^2 g f_0\,d\Gamma. \tag{8.17}$$

У одноатомных газов $\varepsilon(\Gamma) = mv^2/2$, $c_v = 3/2$, и левая часть уравнения (8.16) обращается в нуль. Из уравнения $I(g) = 0$ следует тогда, что и $g = 0$, а потому и $\zeta = 0$. Мы приходим, таким образом, к интересному результату: у одноатомных газов вторая вязкость равна нулю [1]).

З а д а ч а

Показать, что вторая вязкость газа ультрарелятивистских частиц равна нулю (*И.М. Халатников*, 1955).

Р е ш е н и е. Энергия ε релятивистской частицы в системе отсчета K, в которой газ движется с (нерелятивистской) скоростью $\mathbf{V}$, связана с ее энергией ε' в системе K', в которой газ покоится, формулой $\varepsilon' = \varepsilon - \mathbf{pV}$, где $\mathbf{p}$ — импульс частицы в системе K (это — формула преобразования Лоренца, в которой опущены члены более чем первого порядка по $\mathbf{V}$). Функция распределения в системе K: $f_0(\varepsilon - \mathbf{pV})$, где $f_0(\varepsilon')$ — распределение Больцмана.

Интересуясь лишь вязкостью, мы можем с самого начала считать равными нулю градиенты всех макроскопических величин, за исключением лишь скорости $\mathbf{V}$; тогда и $\partial\mathbf{V}/\partial t = 0$, так что последний член в (6.10) выпадает [2]). В (6.11) первые два члена тоже отсутствуют, а третий заменяется на

$$\mathbf{v}\nabla(\mathbf{pV}) = v_\alpha p_\beta \frac{\partial V_\beta}{\partial x_\alpha} = v_\alpha p_\beta V_{\alpha\beta}$$

(направления $\mathbf{v}$ и $\mathbf{p}$ совпадают, поэтому $p_\alpha v_\beta = p_\beta v_\alpha$). Уравнения непрерывности и сохранения энтропии в использованном в § 6 виде остаются справедливыми и при движении (с малыми скоростями $\mathbf{V}$) релятивистского газа.

---

[1]) Подчеркнем, что речь идет о газах именно в том приближении по «параметру газовости» Nd^3, которому отвечает уравнение Больцмана (и в котором вязкость η оказывается независящей от плотности). В следующих приближениях (следующие члены «вириального разложения» — см. § 18) появляется и отличная от нуля вязкость ζ. Существенна также и квадратичная зависимость энергии частицы от ее импульса; в релятивистском «одноатомном» газе вторая вязкость уже не равна нулю (она обращается, однако, снова в нуль в другом предельном случае — ультрарелятивистском; см. задачу).

[2]) Во избежание недоразумений напомним, что в релятивистском газе градиент давления дает свой вклад в теплопроводящий поток энергии (см. VI, § 126).

Поэтому остаются в силе и формулы (6.16). В результате кинетическое уравнение принимает вид

$$\left(v_\alpha p_\beta - \delta_{\alpha\beta}\frac{\varepsilon}{c_v}\right) V_{\alpha\beta} = I(\chi).$$

В задаче о второй вязкости надо положить $V_{\alpha\beta} = \dfrac{1}{3}\,\delta_{\alpha\beta}\operatorname{div}\mathbf{V}$, и тогда

$$\left(\frac{vp}{3} - \frac{\varepsilon}{c_v}\right)\operatorname{div}\mathbf{V} = I(\chi).$$

В ультрарелятивистском газе $v \approx c$, $\varepsilon = cp$, а теплоемкость $c_v = 3$ (см. V, § 44, задача), так что левая часть уравнения, а с нею и χ обращаются в нуль.

§ 9. Симметрия кинетических коэффициентов

Коэффициенты теплопроводности и вязкости относятся к категории величин, определяющих процессы релаксации слабо неравновесных систем. Эти величины — *кинетические коэффициенты* — удовлетворяют принципу симметрии (*принцип Онсагера*), который может быть установлен в общем виде, без рассмотрения конкретных релаксационных механизмов. Но при конкретном вычислении кинетических коэффициентов с помощью кинетических уравнений принцип симметрии не дает каких-либо условий, которые должны были бы дополнительно налагаться на решение уравнений. При таком вычислении требования этого принципа удовлетворяются, разумеется, автоматически. Полезно проследить за тем, каким образом это происходит.

Напомним, что в общей формулировке принципа Онсагера (см. V, § 120) фигурирует набор величин x_a, характеризующих неравновесность системы, и набор «термодинамически сопряженных» с ними величин $X_a = -\partial S/\partial x_a$ (S — энтропия системы). Процесс релаксации слабо неравновесной системы описывается уравнениями, определяющими скорости изменения величин x_a в виде линейных функций величин X_a:

$$\dot{x}_a = -\sum_b \gamma_{ab} X_b, \tag{9.1}$$

где γ_{ab} — кинетические коэффициенты. Согласно принципу Онсагера, если x_a и x_b одинаково ведут себя при обращении времени, то

$$\gamma_{ab} = \gamma_{ba}. \tag{9.2}$$

При этом скорость изменения энтропии дается квадратичной формой

$$\dot{S} = -\sum_a X_a \dot{x}_a = \sum_{a,b} \gamma_{ab} X_a X_b. \tag{9.3}$$

Первым из этих выражений часто бывает удобным пользоваться для установления соответствия между величинами $\dot{x}_a$ и X_a.

В случае теплопроводности в качестве «скоростей» $\dot{x}_a$ рассматриваем компоненты q'_α вектора диссипативного теплового потока (в каждой заданной точке среды); индекс a совпадает при этом с векторным индексом α. Соответствующими величинами X_a будут тогда производные $T^{-2}\partial T/\partial x_\alpha$ (ср. IX, § 88). Роль уравнений (9.1) играют равенства $q'_\alpha = -\varkappa_{\alpha\beta}\partial T/\partial x_\beta$, так что кинетическими коэффициентами γ_{ab} являются величины $T^2\varkappa_{\alpha\beta}$. Согласно принципу Онсагера должно быть $\varkappa_{\alpha\beta} = \varkappa_{\beta\alpha}$.

Аналогичным образом, в случае вязкости в качестве величин $\dot{x}_a$ рассматриваем компоненты тензора вязкого потока импульса $\sigma'_{\alpha\beta}$, а соответствующими X_a являются $-V_{\alpha\beta}/T$ (индексу a отвечает при этом пара тензорных индексов $\alpha\beta$). Роль уравнения (9.1) играют соотношения $\sigma'_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta\gamma\delta}V_{\gamma\delta}$, а кинетическими коэффициентами являются величины $T\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$. Согласно принципу Онсагера должно быть $\eta_{\alpha\beta\gamma\delta} = \eta_{\gamma\delta\alpha\beta}$.

В рассмотренных в предыдущих параграфах задачах о теплопроводности и вязкости газов указанная симметрия тензоров $\varkappa_{\alpha\beta}$ и $\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$ возникала автоматически уже как следствие изотропии среды, безотносительно к решению кинетического уравнения. Покажем, однако, что эта симметрия возникла бы и в результате решения кинетического уравнения, безотносительно к изотропии газа.

Схема решения задач о теплопроводности и вязкости в слабо неоднородном газе состояла в том, что поправка к равновесной функции распределения ищется в виде

$$\chi = \sum_a g_a(\Gamma)X_a \tag{9.4}$$

и для функций g_a получаются уравнения вида

$$L_a = I(g_a). \tag{9.5}$$

Величинами L_a являются компоненты вектора

$$T[\varepsilon(\Gamma) - c_pT]v_\alpha$$

в случае теплопроводности, или тензора

$$-T\left[mv_\alpha v_\beta - \frac{\varepsilon(\Gamma)}{c_v}\delta_{\alpha\beta}\right]$$

в случае вязкости (ср. (6.19)). Решения уравнений (9.5) должны удовлетворять дополнительным условиям

$$\int f_0 g_a\, d\Gamma = 0, \quad \int f_0 g_a\varepsilon\, d\Gamma = 0, \quad \int f_0 g_a\mathbf{p}\, d\Gamma = 0.$$

С учетом этих условий кинетические коэффициенты $\gamma_{\alpha\beta}$ могут быть записаны в виде интегралов

$$T^2\gamma_{ab} = -\int f_0 L_a g_b \, d\Gamma. \tag{9.6}$$

Доказательство симметрии $\gamma_{ab} = \gamma_{ba}$ сводится, таким образом, к доказательству равенства интегралов

$$\int f_0 L_a g_b \, d\Gamma = \int f_0 L_b g_a \, d\Gamma. \tag{9.7}$$

Оно основано на свойстве «самосопряженности» линеаризованного оператора I, к которому можно прийти следующим образом.

Рассмотрим интеграл

$$\int f_0 \varphi I(\psi) \, d\Gamma = \int f_0 f_{01} w' \varphi(\psi' + \psi_1' - \psi - \psi_1) \, d^4\Gamma,$$

где $\psi(\Gamma)$, $\varphi(\Gamma)$ — любые две функции переменных Γ. Поскольку интегрирование производится по всем переменным Γ, Γ_1, Γ', Γ_1', можно, не меняя интеграла, произвести любое их переобозначение (как это делалось уже в § 4). Произведем переобозначение $\Gamma, \Gamma' \leftrightarrow \Gamma_1, \Gamma_1'$, а затем в каждом из двух получающихся таким образом форм интеграла — еще переобозначение $\Gamma, \Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma', \Gamma_1'$. Взяв сумму всех четырех выражений, имеем

$$\int f_0 \varphi I(\psi) \, d\Gamma = \\ = \frac{1}{4} \int f_0 f_{01} [w'(\varphi + \varphi_1) - w(\varphi' + \varphi_1')][(\psi' + \psi_1') - (\psi + \psi_1)] \, d^4\Gamma \tag{9.8}$$

(обозначения w и w' из (3.5)). Рассмотрим теперь такой же интеграл, в котором функции $\psi(\Gamma)$ и $\varphi(\Gamma)$ заменены соответственно на $\varphi(\Gamma^T)$ и $\psi(\Gamma^T)$ (не меняя при этом переменных в w и w'!). Произведя в этом интеграле переобозначение $\Gamma^T, \Gamma_1^T, \ldots \to \Gamma, \Gamma_1, \ldots$ и воспользовавшись принципом детального равновесия (2.3), получим

$$\int f_0 \psi^T I(\varphi^T) \, d\Gamma = \\ = \frac{1}{4} \int f_0 f_{01} [w(\psi + \psi_1) - w'(\psi' + \psi_1'][(\varphi' + \varphi_1') - (\varphi + \varphi_1)] \, d^4\Gamma \tag{9.9}$$

(учтено также, что $f_0(\Gamma^T) = f_0(\Gamma)$). Раскрыв в (9.8) и (9.9) квадратные скобки и сравнив их почленно, убедимся, что оба интеграла равны друг другу. При сравнении надо учесть соотношение унитарности (2.9), в силу которого имеем, например,

$$\int f_0 f_{01} w(\psi + \psi_1)(\varphi + \varphi_1) \, d^4\Gamma = \int f_0 f_{01} w'(\psi + \psi_1)(\varphi + \varphi_1) \, d^4\Gamma$$

(соотношение (2.9) применено здесь к интегрированию по переменным Γ', Γ'_1, от которых в подынтегральном выражении зависят только w и w').

Таким образом, приходим к равенству

$$\int f_0\varphi I(\psi)\,d\Gamma = \int f_0\psi^T I(\varphi^T)\,d\Gamma. \tag{9.10}$$

Отметим, что если принцип детального равновесия справедлив в своей простейшей форме (2.8), $w = w'$, то соотношение (9.10) сводится к буквальной самосопряженности оператора I:

$$\int f_0\varphi I(\psi)\,d\Gamma = \int f_0\psi I(\varphi)\,d\Gamma, \tag{9.11}$$

где в обоих интегралах фигурируют функции φ и ψ одних и тех же переменных Γ (это сразу очевидно при $w = w'$ из выражения (9.8)).

Возвращаясь к кинетическим коэффициентам, произведем в первом интеграле (9.7) переобозначение $\Gamma \to \Gamma^T$ и учтем, что

$$L_a(\Gamma^T) = \pm L_a(\Gamma) \tag{9.12}$$

(верхний знак относится к случаю вязкости, нижний — теплопроводности). Воспользуемся теперь соотношениями (9.5) и (9.10). При этом в (9.10) можно производить интегрирование по Γ^T вместо Γ, значение интеграла от этого, очевидно, не изменится. Имеем

$$\int f_0 g_b L_a\,d\Gamma = \pm\int f_0 g_b^T I(g_a)\,d\Gamma^T = \\ = \pm\int f_0 g_a^T I(g_b)\,d\Gamma^T = \pm\int f_0 g_a^T L_b(\Gamma)\,d\Gamma^T.$$

Теперь достаточно переобозначить в правой части равенства $\Gamma^T \to \Gamma$, и с учетом (9.12) мы получим требуемый результат (9.7).

Кинетические коэффициенты должны удовлетворять также и условиям, следующим из закона возрастания энтропии; в частности, должны быть положительны «диагональные» коэффициенты γ_{aa}. Поскольку кинетическое уравнение обеспечивает возрастание энтропии, то естественно, что при вычислении с его помощью кинетических коэффициентов эти условия удовлетворяются автоматически.

Возрастание энтропии выражается неравенством

$$-\int \ln f\cdot \mathrm{St}\, f\,d\Gamma > 0$$

(см. § 4). Подставив сюда

$$f = f_0\left(1 + \frac{\chi}{T}\right), \quad \mathrm{St}\, f = \frac{f_0}{T} I(\chi),$$

имеем

$$-\int \ln f_0\,\mathrm{St}\, f\,d\Gamma - \frac{1}{T}\int f_0\ln\left(1 + \frac{\chi}{T}\right) I(\chi)\,d\Gamma > 0.$$

Первый интеграл обращается в нуль тождественно, а во втором пишем, ввиду малости χ, $\ln(1+\chi/T) \approx \chi/T$ и находим

$$-\int f_0 \chi I(\chi)\, d\Gamma > 0. \tag{9.13}$$

Этим неравенством и обеспечиваются необходимые свойства кинетических коэффициентов. В частности, при $\chi = g_a$ оно выражает собой положительность γ_{aa}.

§ 10. Приближенное решение кинетического уравнения

Ввиду сложности закона взаимодействия молекул (в особенности многоатомных), определяющего функцию w в интеграле столкновений, уравнение Больцмана по существу не может быть даже записано для конкретных газов в точном виде. Но и при простых предположениях о характере молекулярного взаимодействия сложность математической структуры кинетического уравнения делает, вообще говоря, невозможным нахождение его решения в точном аналитическом виде; это относится даже к линеаризованному уравнению. В связи с этим в кинетической теории газов приобретают особое значение достаточно эффективные методы приближенного решения уравнения Больцмана. Изложим здесь идею такого метода в применении к одноатомному газу (*S. Chapman*, 1916).

Рассмотрим сначала задачу о теплопроводности. Для одноатомного газа теплоемкость $c_p = 5/2$ и линеаризованное уравнение (7.3) принимает вид

$$-\mathbf{v}\left(\frac{5}{2} - \beta v^2\right) = I(\mathbf{g}) \tag{10.1}$$

(где $\beta = m/(2T)$); линейный интегральный оператор $I(\mathbf{g})$ определяется формулой

$$I(\mathbf{g}) = \iint v_{\text{отн}} f_{01}(\mathbf{g}' + \mathbf{g}_1' - \mathbf{g} - \mathbf{g}_1)\, d^3p_1\, d\sigma \tag{10.2}$$

(соответствующей интегралу столкновений (3.9)), а равновесная функция распределения [1])

$$f_0(v) = \frac{N\beta^{3/2}}{m^3\pi^{3/2}}\, e^{-\beta v^2}. \tag{10.3}$$

Эффективный метод приближенного решения уравнения (10.1) основан на разложении искомых функций по полной системе взаимно ортогональных функций, в качестве которых особым удобством обладают так называемые полиномы Сонина

---

[1]) Функция распределения везде предполагается определенной по отношению к импульсному пространству. Это не мешает, однако, тому, что она может быть выражена, по соображениям удобства, через скорость $\mathbf{v} = \mathbf{p}/m$.

(*D. Burnett*, 1935). Эти функции определяются формулой [1])

$$S_r^s(x) = \frac{1}{s!}\, e^x x^{-r} \frac{d^s}{dx^s}\, e^{-x} x^{r+s}, \tag{10.4}$$

причем r — произвольное, а s — целое положительное число или нуль. В частности,

$$S_r^0 = 1, \quad S_r^1(x) = r + 1 - x. \tag{10.5}$$

Свойство ортогональности этих полиномов при заданном индексе r и различных индексах s:

$$\int\limits_0^\infty e^{-x} x^r S_r^s(x) S_r^{s'}(x)\, dx = \frac{\Gamma(r+s+1)}{s!}\, \delta_{ss'}. \tag{10.6}$$

Ищем решение уравнения (10.1) в виде разложения

$$\mathbf{g}(\mathbf{v}) = \frac{\beta}{N}\mathbf{v} \sum_{s=1}^{\infty} A_s S_{3/2}^s(\beta v^2). \tag{10.7}$$

Опустив в разложении член с $s = 0$, мы тем самым автоматически удовлетворяем условию (7.4) (интеграл обращается в нуль в силу ортогональности полиномов с $s = 0$ и $s \neq 0$). Выражение в скобках в левой части (10.1) есть полином $S_{3/2}^1(\beta v^2)$, так что уравнение принимает вид

$$-\mathbf{v} S_{3/2}^1(\beta v^2) = \frac{\beta}{N} \sum_{s=1}^{\infty} A_s I(\mathbf{v} S_{3/2}^s). \tag{10.8}$$

Умножив его с обеих сторон на $\mathbf{v} f_0(v) S_{3/2}^l(\beta v^2)$ и проинтегрировав по d^3p, получим систему алгебраических уравнений

$$\sum_{s=1}^{\infty} a_{ls} A_s = \frac{15}{4}\, \delta_{l1}, \quad l = 1, 2, \ldots, \tag{10.9}$$

причем

$$a_{ls} = -\frac{\beta^2}{N^2} \int f_0 \mathbf{v} S_{3/2}^l I(\mathbf{v} S_{3/2}^s)\, d^3p = \frac{\beta^2}{4N^2}\{\mathbf{v} S_{3/2}^l, \mathbf{v} S_{3/2}^s\}, \tag{10.10}$$

где введены обозначения

$$\begin{gathered} \{F, G\} = \int f_0(v) f_0(v_1) |\mathbf{v} - \mathbf{v}_1| \Delta(F) \Delta(G)\, d^3p\, d^3p_1\, d\sigma, \\ \Delta(F) = F(\mathbf{v}') + F(\mathbf{v}_1') - F(\mathbf{v}) - F(\mathbf{v}_1). \end{gathered} \tag{10.11}$$

[1]) Они отличаются лишь нормировкой и индексированием от обобщенных полиномов Лагерра:

$$S_r^s(x) = \frac{(-1)^r}{(r+s)!} L_{r+s}^r(x).$$

Уравнение с $l = 0$ (10.9) отсутствует, поскольку $a_{0s} = 0$ в силу сохранения импульса: $\Delta(\mathbf{v}S^0_{3/2}) = \Delta(\mathbf{v}) = 0$. Коэффициент теплопроводности вычисляется подстановкой (10.7) в интеграл (7.7). Ввиду условия (7.4) этот интеграл (с $\varepsilon = mv^2/2$) можно представить в виде

$$\varkappa = -\frac{1}{3}\int f_0 S^1_{3/2}(\beta v^2)\mathbf{v}\mathbf{g}\, d^3p$$

и в результате находим

$$\varkappa = \frac{5}{4}A_1. \tag{10.12}$$

В простоте правой части уравнений (10.9) и выражения (10.12) проявляется преимущество разложения по полиномам Сонина.

Ход вычислений для задачи о вязкости вполне аналогичен. Ищем решение уравнения (8.6) в виде

$$g_{\alpha\beta} = -\frac{\beta^2}{N^2}\left(v_\alpha v_\beta - \frac{1}{3}v^2\delta_{\alpha\beta}\right)\sum_{s=0}^{\infty} B_s S^s_{5/2}(\beta v^2). \tag{10.13}$$

Подстановка в (8.6) с последующим умножением этого уравнения на

$$f_0(v)S^l_{5/2}(\beta v^2)\left(v_\alpha v_\beta - \frac{1}{3}\,v^2\delta_{\alpha\beta}\right)$$

и интегрированием по d^3p приводит к системе уравнений

$$\sum_{s=0}^{\infty} b_{ls}B_s = 5\delta_{l0}, \qquad l = 0, 1, 2, \ldots\,, \tag{10.14}$$

где

$$b_{ls} = \frac{\beta^2}{N^2}\left\{\left(v_\alpha v_\beta - \frac{v^2}{3}\,\delta_{\alpha\beta}\right)S^l_{5/2},\ \left(v_\alpha v_\beta - \frac{v^2}{3}\,\delta_{\alpha\beta}\right)S^s_{5/2}\right\}. \tag{10.15}$$

Для коэффициента вязкости из (8.9) получается

$$\eta = \frac{1}{4}\,mB_0. \tag{10.16}$$

Приближенное решение бесконечной системы уравнений (10.9) или (10.14) достигается сохранением в разложениях (10.7) или (10.13) лишь нескольких первых членов, т. е. искусственным обрывом системы. Сходимость процесса приближения при увеличении числа членов оказывается чрезвычайно быстрой: уже сохранение всего одного члена приводит, вообще говоря, к точности 1–2 % в значении $\varkappa$ или η[1]).

[1]) Сходимость оказывается, однако, несколько хуже в задачах о диффузии и в особенности о термодиффузии.

Покажем, что приближенное решение линеаризованного кинетического уравнения для одноатомных газов, осуществляемое описанным способом, приводит к значениям кинетических коэффициентов, заведомо меньшим, чем дало бы точное решение этого уравнения.

Запишем кинетическое уравнение в символическом виде

$$I(g) = L \tag{10.17}$$

(где функции g и L — векторы в задаче о теплопроводности и тензоры второго ранга в задаче о вязкости). По функции g соответствующий кинетический коэффициент определяется как величина, пропорциональная интегралу

$$-\int f_0 g I(g)\, d^3p \tag{10.18}$$

(см. § 9). Приближенная же функция g удовлетворяет не самому уравнению (10.17), а лишь интегральному соотношению

$$\int f_0 g I(g)\, d^3p = \int f_0 L g\, d^3p \tag{10.19}$$

(как это очевидно из способа определения коэффициентов в разложениях g).

Высказанное выше утверждение непосредственно следует из «вариационного принципа», согласно которому решение уравнения (10.17) осуществляет максимум функционала (10.18) в классе функций, удовлетворяющих условию (10.19). В справедливости этого принципа легко убедиться, рассмотрев интеграл

$$-\int f_0 (g-\varphi) I(g-\varphi)\, d^3p,$$

где g — решение уравнения (10.17), а φ — любая пробная функция, удовлетворяющая лишь условию (10.19). По общему свойству (9.13) оператора I этот интеграл положителен. Раскрыв в нем скобки, пишем

$$-\int f_0 \{g I(g) + \varphi I(\varphi) - \varphi I(g) - g I(\varphi)\}\, d^3p.$$

Поскольку для одноатомного газа принцип детального равновесия справедлив в форме (2.8), то оператор I обладает свойством самосопряженности (9.11) [1]. Поэтому интегралы от двух последних членов в фигурной скобке равны друг другу. Подставив затем $I(g) = L$, имеем

$$-\int f_0 \{g I(g) + \varphi I(\varphi) - 2\varphi I(g)\}\, d^3p = \\ = -\int f_0 \{g I(g) + \varphi I(\varphi) - 2L\varphi\}\, d^3p > 0.$$

[1]) Подчеркнем, что вариационный принцип в сформулированном виде связан с этим обстоятельством и не имеет места при соблюдении принципа детального равновесия лишь в его наиболее общем виде (2.3).

Наконец, преобразовав интеграл от последнего члена с помощью условия (10.19), находим

$$-\int f_0 g I(g)\, d^3p > -\int f_0 \varphi I(\varphi)\, d^3p,$$

что и требовалось доказать.

Упомянем о случае, представляющем интерес с формальной точки зрения, хотя он и не имеет прямого физического смысла. Это — газ из частиц, взаимодействующих по закону $U = \alpha/r^4$ [1]. Этот случай характерен тем, что сечение столкновений таких частиц (определенное по классической механике) обратно пропорционально их относительной скорости $v_{\text{отн}}$, а потому фигурирующее в интеграле столкновений произведение $v_{\text{отн}}\, d\sigma$ оказывается зависящим только от угла рассеяния θ, но не от $v_{\text{отн}}$. В этом свойстве легко убедиться уже из соображений размерности. Действительно, сечение зависит всего от трех параметров: постоянной α, массы частиц m и скорости $v_{\text{отн}}$. Из этих величин нельзя составить безразмерной комбинации и всего одну комбинацию с размерностью площади: $v_{\text{отн}}^{-1}(\alpha/m)^{1/2}$; ей и должно быть пропорционально сечение. Это свойство сечения приводит к существенному упрощению структуры интеграла столкновений, в результате чего оказывается возможным найти точные решения линеаризованных кинетических уравнений задач о теплопроводности и вязкости. Оказывается, что они даются просто первыми членами разложений (10.7) и (10.13) [2].

Задачи [3]

1. Найти теплопроводность одноатомного газа, сохранив в разложении (10.7) лишь первый член.

Решение. При одном члене разложения уравнения (10.9) сводятся к равенству $A_1 = \dfrac{15}{4}\, a_{11}$. Для вычисления интеграла (10.10) с $l = s = 1$ вводим вместо $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}'$, $\mathbf{v}'_1$ скорость центра инерции и относительные скорости двух атомов:

$$\mathbf{V} = \frac{1}{2}\,(\mathbf{v} + \mathbf{v}_1) = \frac{1}{2}\,(\mathbf{v}' + \mathbf{v}'_1), \quad \mathbf{v}_{\text{отн}} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{v}'_{\text{отн}} = \mathbf{v}' - \mathbf{v}'_1,$$

$$v^2 + v_1^2 = 2V^2 + \frac{1}{2}v_{\text{отн}}^2, \quad d^3p\, d^3p_1 = m^6\, d^3V\, d^3v_{\text{отн}}.$$

Простое вычисление дает

$$\Delta\left(\mathbf{v}S^1_{3/2}\right) = \Delta(\beta v^2 \mathbf{v}) = \beta[(\mathbf{V}\mathbf{v}'_{\text{отн}})\mathbf{v}'_{\text{отн}} - (\mathbf{V}\mathbf{v}_{\text{отн}})\mathbf{v}_{\text{отн}}].$$

---

[1] Кинетические свойства такой газовой модели впервые рассматривались *Максвеллом* (1866).

[2] Подробное изложение теории этого случая — см. § 38–40 статьи *Л. Вальдмана* в сборнике «Термодинамика газов», Москва, 1970 (перевод из Handbuch der Physik, Bd. XII, 1958).

[3] Формулы (1)–(6) были получены *Чепменом* и *Энскогом*.

Возведя это выражение в квадрат и усреднив его по направлениям $\mathbf{V}$, получим

$$\frac{2\beta^2}{3}\left[v_{\text{отн}}^4-\left(\mathbf{v}_{\text{отн}}\,v'_{\text{отн}}\right)^2\right]V^2=\frac{2\beta^2}{3}v_{\text{отн}}^4V^2\sin^2\theta.$$

После выполнения интегрирования по $4\pi V^2\,dV$ и по направлениям $\mathbf{v}_{\text{отн}}$ (последнее сводится к умножению на 4π) получим окончательно

$$a_{11}=\frac{\beta^4}{4}\left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^{1/2}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{\infty}\exp\left(-\frac{\beta v_{\text{отн}}^2}{2}\right)v_{\text{отн}}^7\sin^2\theta\frac{d\sigma}{d\theta}\,dv_{\text{отн}}\,d\theta; \tag{1}$$

коэффициент теплопроводности

$$\varkappa=\frac{75}{16a_{11}}. \tag{2}$$

2. То же для вязкости одноатомного газа.

Р е ш е н и е. Аналогичным образом имеем

$$B_0=\frac{5}{b_{00}},\qquad \eta=\frac{5m}{4b_{00}}.$$

В интеграле (10.15) при $l=s=0$ находим

$$\Delta\left(v_\alpha v_\beta-\frac{1}{3}\,v^2\delta_{\alpha\beta}\right)=\frac{1}{2}(v_{\text{отн}\,\alpha}v_{\text{отн}\,\beta}-v'_{\text{отн}\,\alpha}v'_{\text{отн}\,\beta}).$$

Квадрат этого выражения есть

$$\frac{1}{2}v_{\text{отн}}^4\sin^2\theta.$$

После интегрирования по d^3V и по направлениям $\mathbf{v}_{\text{отн}}$ оказывается, что $b_{00}=a_{11}$, так что

$$\eta=\frac{4m\varkappa}{15}. \tag{3}$$

Для одноатомного газа теплоемкость $c_p=5/2$. Поэтому отношение кинематической вязкости $\nu=\dfrac{\eta}{Nm}$ к температуропроводности $\chi=\dfrac{\varkappa}{Nc_p}$ (так называемое число Прандтля) в рассматриваемом приближении оказывается равным

$$\frac{\nu}{\chi}=\frac{2}{3} \tag{4}$$

вне зависимости от закона взаимодействия атомов [1]).

3. В том же приближении найти теплопроводность и вязкость одноатомного газа, рассматривая атомы как твердые упругие шарики диаметра d.

Р е ш е н и е. Сечение рассеяния шарика на шарике эквивалентно рассеянию точечной частицы на непроницаемой сфере радиуса d; поэтому

---

[1]) Для газа с законом взаимодействия частиц $U=\alpha/r^4$ формулы (1)–(4) являются точными и приводят к следующим значениям:

$$\varkappa=3,04T(m\alpha)^{-1/2},\qquad \eta=0,81T\left(\frac{m}{\alpha}\right)^{1/2}.$$

сечение $d\sigma = (d/2)^2 do$. Вычисление интеграла (1) приводит к результатам [1])

$$\varkappa = \frac{75}{64\sqrt{\pi}\,d^2}\sqrt{\frac{T}{m}} = \frac{0,66}{d^2}\sqrt{\frac{T}{m}}, \tag{5}$$

$$\eta = \frac{5}{16\sqrt{\pi}\,d^2}\sqrt{mT} = 0,18\frac{\sqrt{mT}}{d^2}. \tag{6}$$

§ 11. Диффузия легкого газа в тяжелом

Явление диффузии в смеси двух газов мы изучим для некоторых частных случаев, допускающих сравнительно далеко идущее теоретическое исследование.

Обозначим плотности числа частиц двух компонент смеси через N_1 и N_2 и определим концентрацию смеси как $c = N_1/N$, где $N = N_1 + N_2$. Полная плотность числа частиц связана с давлением и температурой согласно $N = P/T$. Давление газа постоянно по его объему; концентрация же и температура пусть меняются вдоль оси x (допуская изменение температуры, мы тем самым включаем в рассмотрение также и термодиффузию).

Рассмотрим диффузию в смеси газов, из которых один («тяжелый») состоит из молекул с массой, большой по сравнению с массой частиц другого («легкого») газа. Легкий газ будем считать одноатомным. Поскольку средняя тепловая энергия поступательного движения всех частиц (при заданной температуре) одинакова, то средняя скорость тяжелых молекул мала по сравнению со скоростью легких и их можно рассматривать приближенно как неподвижные. При столкновении легкой частицы с тяжелой последнюю можно считать остающейся неподвижной; скорость же легкой частицы меняет направление, оставаясь неизменной по своей абсолютной величине.

В этом параграфе рассмотрим случай, когда концентрация легкого газа в смеси мала (пусть это будет газ *1*). Тогда столкновения его атомов друг с другом относительно редки и можно считать, что легкие частицы сталкиваются только с тяжелыми [2]).

В общем случае произвольной газовой смеси для функции распределения частиц каждой из компонент смеси должно быть составлено свое кинетическое уравнение, в правую часть кото-

---

[1]) Для характеристики быстроты сходимости последовательных приближений укажем, что при учете второго и третьего членов в разложениях (10.7) и (10.13) выражения (5) и (6) умножаются соответственно на $(1 + 0,015 + 0,001)$ и $(1 + 0,023 + 0,002)$.

[2]) Кинетическая теория такой газовой модели была впервые развита *Лоренцем* (*H.A. Lorentz*, 1905).

рого входит сумма интегралов столкновений частиц данной компоненты с частицами ее же и других компонент. В рассматриваемом частном случае, однако, целесообразно произвести вывод упрощенного кинетического уравнения заново.

Искомое уравнение должно определять функцию распределения частиц легкого газа; обозначим ее через $f(\mathbf{p}, x)$. В сделанных предположениях столкновения легких частиц с тяжелыми не меняют распределения последних, и в задаче о диффузии это распределение можно считать заданным.

Пусть θ — угол между направлением импульса легкой частицы $\mathbf{p} = m_1\mathbf{v}$ и осью x. В силу симметрии условий задачи очевидно, что функция распределения будет зависеть (помимо переменных p и x) только от угла θ. Обозначим через $d\sigma = F(p, \alpha)\, do'$ сечение столкновений, в результате которых легкая частица, имевшая импульс $\mathbf{p}$, приобретает импульс $\mathbf{p}' = m\mathbf{v}'$, направленный в элементе телесных углов do'; α есть угол между векторами $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$ (абсолютные величины которых одинаковы). Вероятность частице испытать такое столкновение на единице пути есть $N_2\, d\sigma$, где N_2 — плотность числа тяжелых частиц. Вероятность же, отнесенная к единице времени, получается умножением еще на скорость частицы: $N_2 v\, d\sigma$.

Рассмотрим частицы, находящиеся в заданной единице объема и обладающие импульсом в заданном интервале абсолютных значений dp, направленным в элементе телесных углов do. Число таких частиц есть $f\, d^3p = f(p, \theta, x)p^2\, dp\, do$. Из них в единицу времени в результате столкновений приобретет импульс $\mathbf{p}'$, направленный в do',

$$f(p, \theta, x)p^2\, dp\, do \cdot N_2 v F(p, \alpha)\, do'$$

частиц. Всего, следовательно, изменит направление импульса

$$d^3p \int N_2 v f(p, \theta, x) F(p, \alpha)\, do'$$

частиц.

Наоборот, из числа частиц в $d^3p' = p'^2\, dp'\, do'$ приобретет скорость, направленную в do,

$$f(p', \theta', x)p'^2\, dp'\, do' \cdot N_2 v' F(p', \alpha)\, do$$

частиц. Поскольку $p' = p$, то для полного числа частиц, приобретающих в результате столкновений скорость в d^3p, имеем

$$d^3p \int N_2 v f(p, \theta', x) F(p, \alpha)\, do'.$$

Таким образом, изменение числа частиц в элементе d^3p равно разности

$$d^3p \cdot N_2 v \int F(p, \alpha)[f(p, \theta', x) - f(p, \theta, x)]\, do'.$$

С другой стороны, это изменение должно быть равно полной производной по времени

$$d^3p\frac{df}{dt} = d^3p \cdot \mathbf{v}\nabla f = d^3p\frac{\partial f}{\partial x}\, v\cos\theta.$$

Приравняв оба выражения, получим искомое кинетическое уравнение в виде

$$v\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} = N_2 v \int F(p,\alpha)[f(p,\theta',x) - f(p,\theta,x)]\, do' \equiv \mathrm{St}\, f. \quad (11.1)$$

Отметим, что правая часть этого уравнения обращается в нуль для любой функции f, не зависящей от направления $\mathbf{p}$, а не только для максвелловской функции f_0, как это имеет место для уравнения Больцмана. Это обстоятельство связано с предположением о неизменности величины импульса при рассеянии легких частиц на тяжелых: очевидно, что такие столкновения оставляют стационарным любое распределение легких частиц по энергиям. Фактически уравнение (11.1) отвечает лишь нулевому приближению по малой величине m_1/m_2, и уже в следующем приближении появляется релаксация по энергии.

Если градиенты концентрации и температуры не слишком велики (величины мало меняются на расстояниях порядка длины свободного пробега), то можно искать f в виде суммы

$$f = f_0(p,x) + \delta f(p,\theta,x),$$

где δf — малая поправка к локально-равновесной функции распределения f_0, линейная по градиентам c и T. В свою очередь ищем δf в виде

$$\delta f = \cos\theta \cdot g\,(p,x), \quad (11.2)$$

где g — функция только от p и x. При подстановке в (11.1) в левой части уравнения достаточно оставить только член с f_0; в интеграле же столкновений член с f_0 выпадает:

$$\mathrm{St}\, f = g N_2 v \int F(p,\alpha)(\cos\theta' - \cos\theta)\, do';$$

независящая от углов функция g вынесена из-под знака интеграла.

Этот интеграл можно упростить. Выберем в качестве полярной оси для отсчета углов направление импульса $\mathbf{p}$. Пусть φ и φ' — азимуты направлений оси x и импульса $\mathbf{p}'$ относительно полярной оси. Тогда

$$\cos\theta' = \cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha\cos(\varphi - \varphi').$$

Элемент телесных углов $do' = \sin\alpha\, d\alpha\, d\varphi'$, поскольку α — полярный угол для импульса $\mathbf{p}'$. Интеграл от члена с $\cos(\varphi - \varphi')$

обращается в нуль при интегрировании по $d\varphi'$. В результате найдем, что

$$\mathrm{St}\, f = -N_2\sigma_t(p)vg\cos\theta = -N_2\sigma_t(p)v\delta f, \tag{11.3}$$

где введено обозначение

$$\sigma_t(p) = 2\pi \int F(p,\alpha)(1-\cos\alpha)\sin\alpha\, d\alpha = \int (1-\cos\alpha)\, d\sigma; \tag{11.4}$$

величину σ_t называют *транспортным сечением* столкновений.

Из уравнения (11.1) находим теперь

$$g(p,x) = -\frac{1}{N_2\sigma_t}\frac{\partial f_0}{\partial x}. \tag{11.5}$$

Диффузионный поток $\mathbf{i}$ есть, по определению, плотность потока молекул одной из компонент смеси (в данном случае — легкой). Он вычисляется по функции распределения как интеграл

$$\mathbf{i} = \int f\mathbf{v}\, d^3p, \tag{11.6}$$

или, поскольку вектор $\mathbf{i}$ направлен по оси x,

$$i = \int \cos\theta \cdot fv\, d^3p = \int \cos^2\theta \cdot gv\, d^2p \tag{11.7}$$

(член с f_0 обращается в нуль при интегрировании по углам). Подставив сюда (11.5), получим

$$i = -\frac{1}{N_2}\frac{\partial}{\partial x}\int \frac{f_0 v\cos^2\theta}{\sigma_t(p)}\, d^3p = -\frac{1}{3N_2}\frac{\partial}{\partial x}\int \frac{f_0 v}{\sigma_t}\, d^3p.$$

Это выражение можно записать в виде

$$i = -\frac{1}{3N_2}\frac{\partial}{\partial x}\left\{N_1\left\langle\frac{v}{\sigma_t}\right\rangle\right\},$$

где усреднение приводится по максвелловскому распределению. Наконец, вводим концентрацию $c = N_1/N \approx N_1/N_2$ (напомним, что по предположению $N_2 \gg N_1$) и заменяем $N_2 \approx N = P/T$. С учетом постоянства давления получим в результате

$$i = -\frac{T}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{c}{T}\left\langle\frac{v}{\sigma_t}\right\rangle\right\} = -\frac{1}{3}\left\langle\frac{v}{\sigma_t}\right\rangle\frac{\partial c}{\partial x} - \frac{cT}{3}\frac{\partial}{\partial T}\left[\frac{1}{T}\left\langle\frac{v}{\sigma_t}\right\rangle\right]\frac{\partial T}{\partial x}. \tag{11.8}$$

Эту формулу надо сравнить с феноменологическим выражением диффузионного потока

$$i = -ND\left(\nabla c + \frac{k_T}{T}\nabla T\right), \tag{11.9}$$

заключающим в себе определения *коэффициента диффузии* D и *термодиффузионного отношения* k_T (*коэффициентом* же

термодиффузии называют произведение $D_T = Dk_T$; см. VI, § 58)[1]. Таким образом, находим

$$D = \frac{T}{3P}\left\langle \frac{v}{\sigma_t} \right\rangle, \tag{11.10}$$

$$k_T = cT\frac{\partial}{\partial T}\ln\frac{\langle v/\sigma_t\rangle}{T}. \tag{11.11}$$

При диффузионном равновесии в неравномерно нагретом газе устанавливается такое распределение концентраций, при котором диффузионный поток $\mathbf{i} = 0$. Приравняв постоянной выражение, стоящее в фигурных скобках в (11.8), получим

$$c = \mathrm{const}\cdot\frac{T}{\langle v/\sigma_t\rangle}. \tag{11.12}$$

Предполагая сечение σ_t не зависящим от скорости и заметив, что $\langle v\rangle \sim (T/m_1)^{1/2}$, найдем, что при диффузионном равновесии в смеси с малой концентрацией легкого газа последняя пропорциональна $\sqrt{T}$; другими словами, легкий газ концентрируется в местах с большей температурой.

По порядку величины коэффициент диффузии

$$D \sim \overline{v}l, \tag{11.13}$$

где $\overline{v}$ — средняя тепловая скорость молекул легкого газа, а $l\sim 1/(N\sigma)$ — длина свободного пробега. Напомним известный элементарный вывод этой формулы. Число молекул газа *1*, проходящих слева направо в 1 с через единичную площадку, перпендикулярную оси x, равно по порядку величины произведению $N_1\overline{v}$, причем плотность N_1 должна быть взята на расстоянии l влево от площадки, т. е. в тех местах, откуда молекулы достигают эту площадку уже без столкновений. Аналогичным образом определяется число молекул, пересекающих ту же площадку справа налево, а разность обоих чисел дает диффузионный поток:

$$i \sim N_1(x-l)\overline{v} - N_1(x+l)\overline{v} \sim -l\overline{v}\frac{dN_1}{dx},$$

откуда и следует (11.13)[2].

---

[1]) Явление термодиффузии было предсказано *Энскогом* (1911) именно для рассматриваемой здесь модели газовой смеси.

[2]) Диффузия, теплопроводность и вязкость осуществляются одним и тем же механизмом — непосредственным молекулярным переносом. Теплопроводность можно рассматривать как «диффузию энергии», а вязкость — как «диффузию импульса». Поэтому можно утверждать, что коэффициент диффузии D, температуропроводность $\chi = \varkappa/(Nc_p)$ и кинематическая вязкость $\nu = \eta/(Nm)$ имеют один и тот же порядок величины, откуда и получаются формулы (7.10) для теплопроводности и (8.11) для вязкости.

§ 12. Диффузия тяжелого газа в легком

Рассмотрим теперь обратный предельный случай, когда мала концентрация тяжелого газа в смеси. В этом случае коэффициент диффузии можно вычислить косвенным способом, не прибегая к помощи кинетического уравнения. Именно, определим так называемую *подвижность* частиц тяжелого газа, предполагая его находящимся во внешнем поле. Подвижность же b связана с коэффициентом диффузии этих же частиц известным соотношением Эйнштейна

$$D = bT \tag{12.1}$$

(см. VI, § 59).

Подвижность есть, по определению, коэффициент пропорциональности между средней скоростью $\mathbf{V}$, приобретаемой частицей газа во внешнем поле, и действующей на частицу со стороны поля силой $\mathbf{f}$:

$$\mathbf{V} = b\mathbf{f}. \tag{12.2}$$

Скорость же $\mathbf{V}$ определяется в данном случае из условия взаимной компенсации силы $\mathbf{f}$ и силы сопротивления $\mathbf{f}_r$, испытываемой движущейся тяжелой частицей со стороны легких (столкновениями тяжелых частиц друг с другом можно пренебречь ввиду их относительной редкости). Функция распределения легких частиц является при этом максвелловской:

$$f_0 = \frac{N_1}{(2\pi m_1 T)^{3/2}} \exp\left(-\frac{m_1 v^2}{2T}\right),$$

где m_1 — масса легкой частицы.

Рассмотрим какую-нибудь одну определенную тяжелую частицу; пусть ее скорость есть $\mathbf{V}$. Перейдем теперь к системе координат, движущейся вместе с этой частицей, и пусть $\mathbf{v}$ обозначает скорости легких частиц в этой новой системе. Функция распределения легких частиц в этой системе координат есть $f_0(\mathbf{v}+\mathbf{V})$ (ср. с (6.9)). Предполагая скорость $\mathbf{V}$ малой, можем написать

$$f_0(\mathbf{v}+\mathbf{V}) \approx f_0(v)\left(1 - \frac{m_1\mathbf{v}\mathbf{V}}{T}\right). \tag{12.3}$$

Искомую силу сопротивления $\mathbf{f}_r$ можно вычислить как полный импульс, передаваемый тяжелой частице легкими, которые сталкиваются с нею в единицу времени. Тяжелая частица остается при столкновении неподвижной. Легкая же частица приносит с собой импульс $m_1\mathbf{v}$; после столкновения, при котором ее импульс поворачивается на угол α, она уносит с собой импульс, равный в среднем $m_1\mathbf{v}\cos\alpha$. Поэтому импульс, передаваемый при таком столкновении тяжелой частице, равен в среднем $m_1\mathbf{v}(1-\cos\alpha)$. Умножая его на плотность потока легких частиц

со скоростью $\mathbf{v}$ и на сечение $d\sigma$ такого столкновения и интегрируя, получим полный передаваемый тяжелой частице импульс:

$$\mathbf{f}_r = m_1 \int f_0(\mathbf{v}+\mathbf{V}) v\mathbf{v}\sigma_t \, d^3p,$$

где опять введено обозначение (11.4). При подстановке сюда $f_0(\mathbf{v}+\mathbf{V})$ в виде (12.3) первый член обращается в нуль (интегрированием по направлениям скорости $\mathbf{v}$), так что остается

$$\mathbf{f}_r = -\frac{m_1^2}{T} \int f_0(v)(\mathbf{V}\mathbf{v})\mathbf{v} v\sigma_t \, d^3p,$$

или, усредняя по направлениям $\mathbf{v}$,

$$\mathbf{f}_r = -\frac{m_1^2}{3T}\mathbf{V} \int f_0(v)\sigma_t v^3 \, d^3p = -N_1 \frac{m_1^2}{3T}\mathbf{V}\langle \sigma_t v^3\rangle,$$

где угловые скобки снова обозначают усреднение по обычному максвелловскому распределению. Наконец, имея в виду, что в рассматриваемом случае $N_1 \gg N_2$, пишем $N_1 \approx N = P/T$, так что

$$\mathbf{f}_r = -\frac{m_1^2 P}{3T^2}\langle \sigma_t v^3\rangle \mathbf{V}.$$

Приравняв нулю сумму силы сопротивления $\mathbf{f}_r$ и внешней силы $\mathbf{f}$, получим согласно (12.2) подвижность b, а затем и искомый коэффициент диффузии

$$D = bT = \frac{3T^3}{m_1^2 P\langle \sigma_t v^3\rangle}. \qquad (12.4)$$

Что касается термодиффузии, то для ее вычисления в рассматриваемом случае необходимо было бы знать функцию распределения частиц легкого газа при наличии в нем градиента температуры. Поэтому коэффициент термодиффузии не может быть вычислен здесь в общем виде.

По порядку величины $D \sim \overline{v}/N\sigma$, где $\overline{v} \sim \sqrt{T/m_1}$ — снова (как и в (11.13)) средняя тепловая скорость молекул легкого газа. Таким образом, порядок величины коэффициента диффузии в обоих случаях одинаков:

$$D \sim \frac{T^{3/2}}{\sigma P m_1^{1/2}}. \qquad (12.5)$$

З а д а ч а

Определить коэффициент диффузии в смеси двух газов (легкого и тяжелого), рассматривая их частицы как твердые упругие шарики диаметров d_1 и d_2.

Р е ш е н и е. Сечение столкновений $d\sigma = \pi(d_1+d_2)^2\, do/(16\pi)$, откуда транспортное сечение $\sigma_t = \pi(d_1+d_2)^2/4$ (в данном случае совпадает с полным сечением σ). Коэффициент диффузии имеет вид

$$D = \frac{AT^{3/2}}{(d_1+d_2)^2 P m_1^{1/2}},$$

где m_1 — масса легкой частицы, а A — численный коэффициент. В случае малой концентрации легкого газа вычисление по (11.10) дает

$$A = \frac{4}{3}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2} = 0,68.$$

При малой же концентрации тяжелого газа (12.4) дает

$$A = \frac{3}{2\sqrt{2\pi}} = 0,6.$$

Обратим внимание на близость значений A в обоих предельных случаях.

§ 13. Кинетические явления в газе во внешнем поле

Вращательные степени свободы молекул создают тот механизм, через который внешнее магнитное или электрическое поле может оказывать влияние на кинетические явления в газе [1]). Характер этого влияния одинаков в магнитном и электрическом случаях; будем говорить сначала о газе в магнитном поле.

Вращающаяся молекула обладает, вообще говоря, магнитным моментом, среднее (в квантовомеханическом смысле) значение которого обозначим через $\boldsymbol{\mu}$. Магнитное поле будем предполагать ограниченным по величине настолько, что произведение μB мало по сравнению с интервалами тонкой структуры молекулярных уровней [2]). Тогда можно пренебречь влиянием поля на состояние молекулы, так что магнитный момент вычисляется по ее невозмущенному состоянию. При не слишком низких температурах (которые мы и рассматриваем) величина μB будет мала также и по сравнению с T; это позволяет пренебречь влиянием поля на равновесную функцию распределения молекул газа.

Магнитный момент направлен вдоль вращательного момента молекулы $\mathbf{M}$; напишем его в виде

$$\boldsymbol{\mu} = \gamma\mathbf{M}. \tag{13.1}$$

Классическому вращению молекулы отвечают большие вращательные квантовые числа; при этом можно пренебречь в $\mathbf{M}$ различием между полным (включающим спин) и вращательным моментами. Значение постоянного коэффициента γ зависит от рода молекулы и природы ее магнитного момента. Так, для двухатом-

[1]) Этот механизм был указан *Ю.М. Каганом* и *Л.А. Максимовым* (1961); им же принадлежат излагаемые в этом параграфе результаты.

[2]) Напомним, что в макроскопической электродинамике среднее (по физически бесконечно малым объемам) значение напряженности магнитного поля называется магнитной индукцией и обозначается как $\mathbf{B}$. При малой плотности среды — в газе — ее намагниченностью можно пренебречь, и тогда вектор $\mathbf{B}$ совпадает с вектором макроскопической напряженности $\mathbf{H}$.

ной молекулы с отличным от нуля спином S имеем

$$\gamma \approx \frac{2\sigma}{M}\mu_B, \tag{13.2}$$

где μ_B — магнетон Бора, а число $\sigma = J - K$ — разность между квантовыми числами полного момента J и вращательного момента K (эта разность пробегает значения $S, S-1, \ldots, -S$); в знаменателе же различие между J и K несущественно: $M \approx \hbar J \approx \hbar K$. В формуле (13.2) предполагается, что взаимодействие спин–ось в молекуле мало по сравнению с интервалами вращательной структуры уровней (случай b по Гунду)[1].

В магнитном поле $\mathbf{B}$ на молекулу действует момент сил, равный $[\boldsymbol{\mu}\mathbf{B}]$. Под его влиянием вектор $\mathbf{M}$ перестает быть постоянным в течение «свободного» движения молекулы и меняется согласно уравнению

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = [\boldsymbol{\mu}\mathbf{B}] = -\gamma[\mathbf{BM}] \tag{13.3}$$

— вектор $\mathbf{M}$ прецессирует вокруг направления поля с угловой скоростью $-\gamma\mathbf{B}$. В связи с этим в левую часть кинетического уравнения должен быть добавлен член $(\partial f/\partial\mathbf{M})\dot{\mathbf{M}}$, так что уравнение принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \gamma[\mathbf{MB}]\frac{\partial f}{\partial \mathbf{M}} = \operatorname{St} f. \tag{13.4}$$

В число переменных Γ, от которых зависит функция распределения, должна быть включена также и дискретная переменная σ, определяющая значение магнитного момента (если таковая имеется, как в (13.2)).

В задачах о теплопроводности и вязкости снова рассматриваем распределение, близкое к равновесному, представив его в виде

$$f = f_0(1 + \chi/T). \tag{13.5}$$

Покажем прежде всего, что член с производной $\partial f_0/\partial\mathbf{M}$ в кинетическом уравнении выпадает. Действительно, поскольку f_0 зависит только от энергии молекулы $\varepsilon(\Gamma)$, а производная $\partial\varepsilon/\partial\mathbf{M}$ есть угловая скорость $\boldsymbol{\Omega}$, то

$$\gamma[\mathbf{MB}]\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{M}} = \gamma([\mathbf{MB}]\boldsymbol{\Omega})\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}. \tag{13.6}$$

Для молекул типа ротатора и шарового волчка направления $\mathbf{M}$ и $\boldsymbol{\Omega}$ совпадают, так что выражение (13.6) обращается в нуль

[1]) Формула (13.2) получается из точной (для случая b) формулы, найденной в задаче 3, т. III, § 113, путем перехода к пределу больших J и K при заданной разности $J-K$. Вклад орбитального момента Λ при этом исчезает (он оказывается величиной следующего порядка малости по $1/J$).

тождественно. В других же случаях оно обращается в нуль после усреднения по быстро меняющимся фазам, необходимость которого была объяснена в § 1. При вращении молекул типа симметрического или асимметрического волчка быстро меняется как направление осей самой молекулы, так и направление ее угловой скорости $\mathbf{\Omega}$. После указанного усреднения в $\mathbf{\Omega}$ может остаться лишь составляющая $\mathbf{\Omega}_M$ вдоль постоянного вектора $\mathbf{M}$, но для такой составляющей произведение $[\mathbf{MB}]\mathbf{\Omega}_M = 0$.

Остальные члены в кинетическом уравнении преобразуются так же, как это было сделано в § 7 (или § 8). Так, для задачи о теплопроводности находим уравнение

$$\frac{\varepsilon(\Gamma) - c_pT}{T}\mathbf{v}\nabla T = -\gamma[\mathbf{MB}]\frac{\partial\chi}{\partial\mathbf{M}} + I(\chi). \tag{13.7}$$

Решение этого уравнения снова надо искать в виде $\chi = \mathbf{g}\nabla T$, но для составления векторной функции $\mathbf{g}(\Gamma)$ мы имеем в своем распоряжении уже не два, а три вектора: $\mathbf{v}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{B}$. Внешнее поле создает в газе избранное направление. В связи с этим процесс теплопроводности становится анизотропным и вместо скалярного коэффициента $\varkappa$ надо ввести тензор теплопроводности $\varkappa_{\alpha\beta}$, определяющий тепловой поток согласно

$$q_\alpha = -\varkappa_{\alpha\beta}\frac{\partial T}{\partial x_\beta}. \tag{13.8}$$

Тензор $\varkappa_{\alpha\beta}$ вычисляется по функции распределения как интеграл

$$\varkappa_{\alpha\beta} = -\frac{1}{T}\int f_0\varepsilon v_\alpha g_\beta\, d\Gamma \tag{13.9}$$

(ср. (7.5)).

Общий вид тензора второго ранга, зависящего от вектора $\mathbf{B}$, есть

$$\varkappa_{\alpha\beta} = \varkappa\delta_{\alpha\beta} + \varkappa_1 b_\alpha b_\beta + \varkappa_2 e_{\alpha\beta\gamma}b_\gamma, \tag{13.10}$$

где $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$, $e_{\alpha\beta\gamma}$ — единичный антисимметричный тензор, а $\varkappa$, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ — скаляры, зависящие от абсолютной величины поля B. Тензор (13.10) обладает, очевидно, свойством [1])

$$\varkappa_{\alpha\beta}(\mathbf{B}) = \varkappa_{\beta\alpha}(-\mathbf{B}). \tag{13.11}$$

Выражению (13.10) отвечает тепловой поток

$$\mathbf{q} = -\varkappa\nabla T - \varkappa_1\mathbf{b}(\mathbf{b}\nabla T) - \varkappa_2[\nabla T\cdot\mathbf{b}]. \tag{13.12}$$

Последний член здесь представляет собой, как говорят, *нечетный эффект*: эта часть теплового потока меняет знак при изменении знака поля.

---

[1]) Это свойство выражает собой принцип симметрии кинетических коэффициентов в присутствии магнитного поля. В данном случае оно оказывается автоматическим следствием наличия всего одного вектора $\mathbf{b}$, с помощью которого строится тензор $\varkappa_{\alpha\beta}$.

Интегральный член $I(\chi)$ в правой части уравнения (13.7) дается формулой (6.5). В его подынтегральном выражении содержится функция f_0, пропорциональная плотности газа N. Выделив этот множитель и разделив на него обе части уравнения, найдем, что N входит в уравнение только в комбинациях $\mathbf{B}/N$ и $\nabla T/N$ с полем и градиентом температуры. Отсюда ясно, что функция $f_0\chi = f_0\mathbf{g}\nabla T$ будет зависеть от параметров N и B только в виде отношения B/N; только от этой же величины будут зависеть и интегралы (13.9), а тем самым и коэффициенты $\varkappa$, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ в (13.12). Плотность N пропорциональна (при заданной температуре) давлению газа P. Таким образом, теплопроводность газа в магнитном поле зависит от величины поля и от давления только через отношение B/P [1]).

При увеличении B первый член в правой части уравнения (13.7) возрастает, а второй не меняется. Отсюда ясно, что в пределе $B \to \infty$ решение уравнения должно представлять собой функцию, зависящую только от направления (но не от величины) поля, причем эта функция должна обращать тождественно в нуль член $[\mathbf{MB}]\partial\chi/\partial\mathbf{M}$ в уравнении; соответственно коэффициенты $\varkappa$, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ стремятся при $B \to \infty$ к постоянным (не зависящим от B) пределам.

Аналогичным образом рассматривается задача о вязкости газа в магнитном поле. Соответствующее кинетическое уравнение имеет вид

$$\left(mv_\alpha v_\beta - \frac{\varepsilon(\Gamma)}{c_v}\delta_{\alpha\beta}\right) V_{\alpha\beta} = I(\chi) - \gamma[\mathbf{MB}]\frac{\partial\chi}{\partial\mathbf{M}} \tag{13.13}$$

(ср. (6.19)). Решение этого уравнения надо искать в виде $\chi = g_{\alpha\beta}V_{\alpha\beta}$. Вместо двух коэффициентов вязкости η и ζ надо ввести теперь тензор четвертого ранга $\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$, определяющий тензор вязких напряжений согласно

$$\sigma'_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta\gamma\delta}V_{\gamma\delta}; \tag{13.14}$$

по определению тензор $\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$ симметричен по парам индексов α, β и γ, δ. По известной функции χ его компоненты вычисляются как интегралы

$$\eta_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\int mv_\alpha v_\beta f_0 g_{\gamma\delta}\, d\Gamma. \tag{13.15}$$

Вычисленный таким образом тензор вязкости будет автоматически удовлетворять условию

$$\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}(\mathbf{B}) = \eta_{\gamma\delta\alpha\beta}(-\mathbf{B}), \tag{13.16}$$

[1]) Изменение теплопроводности газа в магнитном поле называют *эффектом Зенфтлебена*.

выражающему собой принцип симметрии кинетических коэффициентов.

С помощью вектора $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$ (и единичных тензоров $\delta_{\alpha\beta}$ и $e_{\alpha\beta\gamma}$) можно составить следующие независимые тензорные комбинации со свойствами симметрии тензора $\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$:

$$\begin{aligned}
&1)\ \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma},\\
&2)\ \delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta},\\
&3)\ \delta_{\alpha\gamma}b_\beta b_\delta + \delta_{\beta\gamma}b_\alpha b_\delta + \delta_{\alpha\delta}b_\beta b_\gamma + \delta_{\beta\delta}b_\alpha b_\gamma,\\
&4)\ \delta_{\alpha\beta}b_\gamma b_\delta + \delta_{\gamma\delta}b_\alpha b_\beta,\\
&5)\ b_\alpha b_\beta b_\gamma b_\delta,\\
&6)\ b_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + b_{\beta\gamma}\delta_{\alpha\delta} + b_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma} + b_{\beta\delta}\delta_{\alpha\gamma},\\
&7)\ b_{\alpha\gamma}b_\beta b_\delta + b_{\beta\gamma}b_\alpha b_\delta + b_{\alpha\delta}b_\beta b_\gamma + b_{\beta\delta}b_\alpha b_\gamma,
\end{aligned} \tag{13.17}$$

где $b_{\alpha\beta} = -b_{\beta\alpha} = e_{\alpha\beta\gamma}b_\gamma$. Во всех этих комбинациях, за исключением четвертой, свойство (13.16) возникает автоматически как следствие симметрии по парам индексов α, β и γ, δ; в четвертом же выражении объединение двух членов вызывается лишь условием (13.16) [1]).

Соответственно числу тензоров (13.17) газ в магнитном поле характеризуется в общем случае семью независимыми коэффициентами вязкости. Определим их как коэффициенты в следующем выражении тензора вязких напряжений:

$$\begin{aligned}
\sigma'_{\alpha\beta} = 2\eta\left(V_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}\operatorname{div}\mathbf{V}\right) + \zeta\delta_{\alpha\beta}\operatorname{div}\mathbf{V} +{}&\\
+ \eta_1(2V_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}\operatorname{div}\mathbf{V} + \delta_{\alpha\beta}V_{\gamma\delta}b_\gamma b_\delta - 2V_{\alpha\gamma}b_\gamma b_\beta -{}&\\
- 2V_{\beta\gamma}b_\gamma b_\alpha + b_\alpha b_\beta \operatorname{div}\mathbf{V} + b_\alpha b_\beta V_{\gamma\delta}b_\gamma b_\delta) +{}&\\
+ 2\eta_2(V_{\alpha\gamma}b_\gamma b_\beta + V_{\beta\gamma}b_\gamma b_\alpha - 2b_\alpha b_\beta V_{\gamma\delta}b_\gamma b_\delta) +{}&\\
+ \eta_3(V_{\alpha\gamma}b_{\beta\gamma} + V_{\beta\gamma}b_{\alpha\gamma} - V_{\gamma\delta}b_{\alpha\gamma}b_\beta b_\delta - V_{\gamma\delta}b_{\beta\gamma}b_\alpha b_\delta) +{}&\\
+ 2\eta_4(V_{\gamma\delta}b_{\alpha\gamma}b_\beta b_\delta + V_{\gamma\delta}b_{\beta\gamma}b_\alpha b_\delta) + \zeta_1(\delta_{\alpha\beta}V_{\gamma\delta}b_\gamma b_\delta + b_\alpha b_\beta \operatorname{div}\mathbf{V})&
\end{aligned} \tag{13.18}$$

($V_{\alpha\beta}$ определено в (6.12)). Оно составлено таким образом, что $\eta, \eta_1, \ldots, \eta_4$ стоят коэффициентами при тензорах, обращающихся в нуль при упрощении по индексам α, β. Коэффициенты же ζ и ζ_1 стоят при тензорах с отличным от нуля следом; их можно назвать коэффициентами второй вязкости. Обратим внимание на то, что они содержат не только скаляр $\operatorname{div}\mathbf{V}$, но и $V_{\gamma\delta}b_\gamma b_\delta$. Первые два члена в (13.18) соответствуют обычному выражению тензора напряжений, так что η и ζ — обычные коэффициенты вязкости.

[1]) Комбинации из членов с двумя множителями $b_{\alpha\beta}$ писать не надо: поскольку произведение двух тензоров $e_{\alpha\beta\gamma}$ сводится к произведениям тензоров $\delta_{\alpha\beta}$, такие комбинации сводятся к уже выписанным в (13.17).

Отметим, что тензоры $\varkappa_{\alpha\beta}$ и $\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$ автоматически оказываются истинными тензорами, так что эти выражения удовлетворяют требованию симметрии по отношению к инверсии. Поэтому отказ от этого требования (для газа стереоизомерного вещества) не привел бы к появлению в них каких-либо новых членов.

Такой отказ приводит, однако, к появлению новых эффектов — возникновению теплового потока $q^{(V)}$ под влиянием градиентов скорости и возникновению вязких напряжений $\sigma'^{(T)}$ под влиянием градиента температуры. Эти (так называемые *перекрестные*) эффекты описываются формулами вида

$$q_\gamma^{(V)} = c_{\gamma,\alpha\beta} V_{\alpha\beta}, \quad \sigma'^{(T)}_{\alpha\beta} = -a_{\alpha\beta,\gamma} \frac{\partial T}{\partial x_\gamma}, \tag{13.19}$$

где $c_{\gamma,\alpha\beta}$ и $a_{\alpha\beta,\gamma}$ — тензоры третьего ранга, симметричные по паре индексов, отделенных запятой. При указанном в § 9 выборе величин $\dot{x}_a$ и X_a кинетическими коэффициентами γ_{ab} и γ_{ba} являются $Tc_{\gamma,\alpha\beta}$ и $T^2 a_{\alpha\beta,\gamma}$. Поэтому в силу принципа Онсагера при наличии магнитного поля должно быть

$$Ta_{\alpha\beta,\gamma}(\mathbf{B}) = c_{\gamma,\alpha\beta}(-\mathbf{B}). \tag{13.20}$$

Общий вид таких тензоров:

$$a_{\alpha\beta,\gamma} = a_1 b_\alpha b_\beta b_\gamma + a_2 b_\gamma \delta_{\alpha\beta} + \\ + a_3(b_\alpha \delta_{\beta\gamma} + b_\beta \delta_{\alpha\gamma}) + a_4(b_{\alpha\gamma} b_\beta + b_{\beta\gamma} b_\alpha). \tag{13.21}$$

Все члены в этом выражении — псевдотензоры, так что соотношения (13.19) с такими коэффициентами не инвариантны по отношению к инверсии.

Остановимся коротко на кинетических явлениях в газе в электрическом поле. Рассмотрим газ, состоящий из полярных (т. е. обладающих дипольным моментом $\mathbf{d}$) молекул типа симметрического волчка. В электрическом поле на полярную молекулу действует момент сил $[\mathbf{dE}]$, так что в кинетическом уравнении появится член

$$\dot{\mathbf{M}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{M}} = [\mathbf{dE}] \frac{\partial f}{\partial \mathbf{M}}.$$

Направление $\mathbf{d}$ совпадает с осью молекулы и не имеет отношения к ее вращательному моменту $\mathbf{M}$. Однако в результате усреднения по быстрой прецессии оси волчка вокруг направления постоянного вектора $\mathbf{M}$ в написанном члене останется лишь проекция d на направление $\mathbf{M}$ и он примет вид

$$\gamma[\mathbf{ME}] \frac{\partial f}{\partial \mathbf{M}}, \tag{13.22}$$

где $\gamma = \sigma d/M$, причем переменная σ (косинус угла между $\mathbf{d}$ и $\mathbf{M}$) пробегает теперь непрерывный ряд значений в интервале от -1

до +1. Выражение (13.22) отличается от соответствующего члена в магнитном случае лишь заменой **B** на **E**. Поэтому остаются в силе и все написанные выше кинетические уравнения и следствия из них[1]).

Некоторое отличие возникает, однако, в связи с тем, что электрическое поле **E** — истинный (а не псевдо) вектор и что оно не меняется при обращении времени. В силу последнего обстоятельства принцип Онсагера для тензоров теплопроводности и вязкости выразится теперь равенствами

$$\varkappa_{\alpha\beta}(\mathbf{E}) = \varkappa_{\beta\alpha}(\mathbf{E}), \qquad \eta_{\alpha\beta\gamma\delta}(\mathbf{E}) = \eta_{\gamma\delta\alpha\beta}(\mathbf{E}) \tag{13.23}$$

вместо (13.11) и (13.16). Соответственно в выражениях (13.10) и (13.18) (где теперь $\mathbf{b} = \mathbf{E}/E$) будет $\varkappa_2 \equiv 0$, $\eta_3 = \eta_4 \equiv 0$[2]). В то же время перекрестные эффекты оказываются возможными не только в газе стереоизомерного вещества (где выражение (13.21) остается в силе целиком), но и в газе из нестереоизомерных молекул: выражение (13.21) с $a_4 \equiv 0$ является теперь истинным тензором.

§ 14. Явления в слабо разреженных газах

Гидродинамические уравнения движения газа с учетом процессов теплопроводности и внутреннего трения содержат тепловой поток $\mathbf{q}'$ (диссипативная часть потока энергии $\mathbf{q}$) и тензор вязких напряжений $\sigma'_{\alpha\beta}$ (диссипативная часть потока импульса $\Pi_{\alpha\beta}$). Эти уравнения приобретают реальный смысл после того, как $\mathbf{q}'$ и $\sigma'_{\alpha\beta}$ выражены через градиенты температуры и скорости газа. Но обычные выражения, линейные по этим градиентам, представляют собой лишь первые члены разложения по степеням малого отношения l/L — длины свободного пробега к характерным размерам задачи (его называют *числом Кнудсена* K). Если это отношение не очень мало, может иметь смысл введение поправок, учитывающих члены следующего порядка малости по l/L. Такие поправки возникают как в самих уравнениях движения, так и в граничных условиях к ним на поверхности обтекаемых газом тел.

---

[1]) Двухатомные молекулы вращаются в плоскости, перпендикулярной **M**; поэтому для двухатомной полярной молекулы $\sigma = 0$. В таком случае влияние электрического поля на движение молекул проявляется в кинетическом уравнении лишь в квадратичном по полю приближении.

[2]) В газе из нестереоизомерных молекул отсутствие членов с $\varkappa_2$, η_3, η_4 в электрическом поле требуется и условием инвариантности по отношению к инверсии.

Последовательные члены разложений потоков $\mathbf{q}'$ и $\sigma'_{\alpha\beta}$ выражаются через пространственные производные температуры, давления и скорости различных порядков и в различных степенях. Эти члены должны вычисляться в принципе путем перехода к следующим приближениям в решении кинетического уравнения. «Нулевому» приближению соответствует локально-равновесная функция распределения f_0; этому приближению отвечают гидродинамические уравнения идеальной жидкости. Первому приближению соответствует функция распределения вида $f = f_0(1 + \chi^{(1)}/T)$, рассматривавшаяся в § 6–8, и ему отвечают гидродинамические уравнения Навье–Стокса и уравнение теплопроводности. В следующем, втором, приближении функцию распределения надо искать и виде

$$f = f_0\left[1 + \frac{1}{T}\chi^{(1)} + \frac{1}{T}\chi^{(2)}\right] \tag{14.1}$$

и линеаризовать кинетическое уравнение по поправке второго порядка $\chi^{(2)}$. Получающееся уравнение имеет вид

$$\frac{T}{f_0}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla\right)\frac{f_0\chi^{(1)}}{T} + \frac{T}{f_0}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_1 f_0 - \\ - \frac{1}{T^2}\int w' f_{01}[\chi^{(1)\prime}\chi_1^{(1)\prime} - \chi^{(1)}\chi_1^{(1)}]\,d\Gamma_1\,d\Gamma'\,d\Gamma_1' = \frac{1}{T}I(\chi^{(2)}), \tag{14.2}$$

где I — прежний линейный интегральный оператор (6.5). Производные по времени от макроскопических величин, получающиеся в левой части уравнения от дифференцирования $(f_0\chi)/T$, должны быть выражены через пространственные производные с помощью гидродинамических уравнений первого приближения. Символ $(\partial/\partial t)_1$ во втором члене слева означает, что исключение временных производных должно производиться с помощью уравнений, в которых опущены члены нулевого порядка и оставлены только члены первого порядка, т. е. содержащие η, ζ или κ.

Мы не будем выписывать все многочисленные члены в $\mathbf{q}'$ и $\sigma'_{\alpha\beta}$, возникающие во втором приближении (эти члены называют *барнеттовскими*; *D. Burnett*, 1935). В большом числе случаев эти члены вносят в решение вклад, малый по сравнению с поправками в граничных условиях, о которых речь будет идти ниже. В таких случаях учет поправок в самих уравнениях был бы неоправданным превышением над допустимой точностью. Ограничимся рассмотрением лишь некоторых типичных поправочных членов и оценим их для движений различных типов.

Отметим прежде всего, что малый параметр $\mathsf{K} = l/L$ определенным образом связан с двумя параметрами, характеризующими гидродинамическое движение, — числом Рейнольдса R и числом Маха M. Напомним, что первое из них определяется как

$\mathsf{R} \sim VL/\nu$, где V — характерный масштаб изменения скорости течения, а ν — кинематическая вязкость; число же Маха $\mathsf{M} \sim V/u$, где u — скорость звука. В газе порядок величины скорости звука совпадает со средней тепловой скоростью молекул $\overline{v}$, а кинематическая вязкость $\nu \sim (l\overline{v})$. Поэтому $\mathsf{R} \sim VL/(l\overline{v})$, $\mathsf{M} \sim V/\overline{v}$, а число Кнудсена

$$\mathsf{K} \sim \mathsf{M}/\mathsf{R}. \tag{14.3}$$

Отсюда видно, что условие гидродинамичности движения, $\mathsf{K} \ll 1$, накладывает определенное ограничение на относительный порядок величины чисел R и M. Рассмотрим сначала «медленные» движения, в которых

$$\mathsf{R} \lesssim 1, \quad \mathsf{M} \ll 1. \tag{14.4}$$

Рассмотрим какой-либо из барнеттовских членов в тензоре вязких напряжений, содержащих произведение двух первых производных от скорости, например

$$\rho l^2 \frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\gamma} \frac{\partial V_\beta}{\partial x_\gamma}; \tag{14.5}$$

написанный здесь коэффициент ρl^2 (ρ — плотность газа) — оценка по порядку величины. Этот член дает в $\sigma'_{\alpha\beta}$ вклад $\sigma^{(2)} \sim \sim \rho l^2 V^2/L^2$. Порядок же величины основных (навье-стоксовых) членов в вязких напряжениях: $\sigma^{(1)} \sim \eta(\partial V/\partial x) \sim \rho l\overline{v}V/L$, и отношение $\sigma^{(2)}/\sigma^{(1)} \sim lV/(L\overline{v}) \sim (l^2/L^2)\mathsf{R}$. Поскольку $\mathsf{R} \lesssim 1$, то мы видим, что члены (14.5) вносят в вязкие напряжения поправку относительного порядка $\lesssim (l/L)^2$, между тем как поправка в граничных условиях (см. ниже) вносит в движение поправки относительного порядка l/L, т. е. значительно большие.

Еще меньше будут поправки, происходящие от членов вида [1])

$$\frac{\rho l^2}{m^2\overline{v}^2} \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} \frac{\partial T}{\partial x_\beta}, \tag{14.6}$$

Но если перепады температуры задаются «извне» (скажем, погруженными в газ нагретыми телами), то барнеттовские члены вида (14.6) могут привести к возникновению стационарного движения с характерными скоростями, определяющимися условием $\partial(\sigma^{(1)}_{\alpha\beta} + \sigma^{(2)}_{\alpha\beta})/\partial x_\beta = \partial P/\partial x_\alpha$. Оценка скорости движения дает

$$V \sim \frac{l}{L} \frac{(\Delta T)^3}{m\overline{v}T^2}. \tag{14.7}$$

(*М.Н. Коган, В.С. Галкин, О.Г. Фридлендер*, 1970).

---

[1]) Такие члены в вязких напряжениях впервые рассматривались *Максвеллом* (1879).

При оценке следует учесть, что лапласиан температуры можно выразить с помощью уравнения теплопроводности $\operatorname{div}(\kappa\nabla)T = 0$ через квадрат ее градиента, а также, что движение вызывается только непотенциальной частью силы $\partial\sigma^{(2)}_{\alpha\beta}/\partial x_\beta$. Потенциальная же часть силы уравновешивается давлением.

Аналогичные соображения относятся к поправочным членам в тепловом потоке $\mathbf{q}'$. Из производных одной только температуры вообще нельзя составить поправочного члена второго порядка; первый (после $-\varkappa\nabla T$) такой поправочный член имеет вид $\text{const}\times$ $\times\, \nabla\Delta T$ (Δ — оператор Лапласа), т. е. третьего порядка. Члены же, содержащие наряду с производными от температуры еще и производные от скорости, например

$$\frac{\rho l^2}{m}\operatorname{div}\mathbf{V}\cdot\nabla T,$$

снова приводят к поправкам относительного порядка l^2/L^2.

Перейдем к «быстрым» движениям, в которых

$$\mathsf{R} \gg 1, \quad \mathsf{M} \lesssim 1. \tag{14.8}$$

В таких случаях картина гидродинамического движения газа складывается из двух областей: объемной, в которой вязкие члены в уравнениях движения вообще несущественны, и тонкого пограничного слоя, в котором скорость газа быстро убывает.

Пусть, например, речь идет об обтекании газом плоской пластинки; направление обтекания выберем в качестве оси x. Толщина δ пограничного слоя на пластинке:

$$\delta \sim \left(\frac{x\nu}{V}\right)^{1/2} \sim \left(\frac{xl\overline{v}}{V}\right)^{1/2},$$

где x — расстояние от ее передней кромки (см. VI, § 39). Характерный размер для изменения скорости вдоль оси x дается самой координатой x, а вдоль перпендикулярного пластинке направления оси y — толщиной пограничного слоя δ. При этом $V_y \sim V_x\delta/x$, как это следует из уравнения непрерывности. Главный член в навье-стоксовом тензоре вязких напряжений:

$$\sigma'_{xy} \sim \rho\nu\frac{\partial V_x}{\partial y} \sim \rho\frac{\overline{v}lV}{\delta}.$$

Среди барнеттовских же членов в σ'_{xy}, однако, нет члена, который бы содержал квадрат $(\partial V_x/\partial y)^2$ — легко сообразить, что из производных $\partial V_\alpha/\partial x_\beta$ нельзя составить квадратичного по ним тензора второго ранга, xy-компонента которого содержала бы этот квадрат. Самыми большими членами в $\sigma^{(2)}_{xy}$ могут быть лишь члены вида

$$\rho l^2\frac{\partial V_x}{\partial y}\operatorname{div}\mathbf{V} \sim \frac{\rho l^2V^2}{x\delta}.$$

Их отношение к $\sigma_{xy}^{(1)}$: $\sigma^{(2)}/\sigma^{(1)} \sim lV/(x\overline{v}) \sim (l/\delta)^2$, т. е. снова второго порядка.

Покажем теперь, что поправочные члены в предельных условиях на границе между газом и твердыми телами приводят к эффектам первого порядка по l/L. Поэтому заметные явления, обусловленные разреженностью газа, имеют место именно вблизи твердых поверхностей.

В неразреженных газах граничным условием на поверхности твердого тела является равенство температур газа и тела. В действительности, однако, это условие приближенно и имеет место лишь постольку, поскольку длину свободного пробега можно считать сколь угодно малой. При учете же конечности длины свободного пробега на поверхности соприкосновения твердого тела и неравномерно нагретого газа имеется некоторая разность температур; эта разность обращается в нуль, вообще говоря, лишь при полном тепловом равновесии, когда температура газа постоянна [1]).

Вблизи твердой поверхности (на небольших, но и не на слишком малых расстояниях от нее) градиент температуры газа можно считать постоянным, так что ход температуры как функции расстояния изображается прямой линией. Однако в непосредственной близости от стенки (на расстояниях $\sim l$) ход температуры, вообще говоря, более сложен и ее градиент непостоянен. Примерный ход температуры газа вблизи поверхности изображен на рис. 1 сплошной линией.

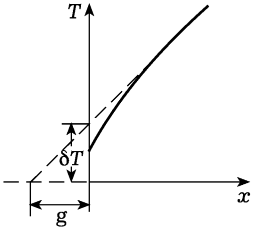


Рис. 1

Однако этот истинный ход температуры в непосредственной близости стенки, относящийся к расстояниям, сравнимым с длиной свободного пробега, несуществен при рассмотрении распределения температуры во всем объеме газа. При изучении распределения температуры около твердой стенки нас интересует по существу только прямая часть кривой на рис. 1, простирающаяся на расстояния, большие по сравнению с длиной свободного пробега. Уравнение этой прямой определяется углом ее наклона и отрезком, отсекаемым ею от оси ординат. Таким образом, нас интересует не истинный пристеночный скачок температуры, а скачок, получающийся экстраполированием температуры газа

---

[1]) Когда речь идет о температуре газа в участках, размеры которых порядка длины свободного пробега, необходимо, строго говоря, определить, что именно подразумевается под понятием температуры. Температуру будем определять в этом случае по средней энергии молекул в данном месте газа, причем функция, определяющая температуру по средней энергии молекул, полагается той же, какой она является для больших объемов газа.

до самой стенки, считая ее градиент постоянным вблизи стенки вплоть до равного нулю расстояния (штриховая прямая на рис. 1). Под δT мы будем понимать именно такой экстраполированный скачок температуры, причем определим его как температуру газа минус температура стенки (на рис. 1 температура стенки условно принята за нуль).

При равном нулю градиенте температуры скачок δT тоже исчезает. Поэтому при не слишком больших градиентах температуры

$$\delta T = g\frac{\partial T}{\partial n} \tag{14.9}$$

(производная берется по направлению нормали к поверхности, направленной внутрь газа). Коэффициент g можно назвать *коэффициентом температурного скачка.* Если температура газа растет по направлению внутрь его объема ($\partial T/\partial n > 0$), то должно быть и $\delta T > 0$; следовательно, коэффициент g положителен.

Аналогичные явления имеют место на границе между твердой стенкой и движущимся газом. Вместо того чтобы полностью «прилипать» к поверхности, разреженный газ сохраняет около нее некоторую конечную, хотя и малую скорость; происходит, как говорят, скольжение газа у поверхности. Аналогично формуле (14.9) имеем для скорости v_0 этого скольжения:

$$v_0 = \xi\frac{\partial V_t}{\partial n}, \tag{14.10}$$

где V_t — касательная составляющая скорости газа вблизи стенки. Как и g, *коэффициент скольжения* ξ положителен. К величине v_0 относятся те же замечания, которые были сделаны по поводу температурного скачка δT, определяемого (14.9). Эта скорость является, строго говоря, не истинной скоростью газа у самой стенки, а скоростью, экстраполированной в предположении постоянства градиента $\partial V_t/\partial n$ в пристеночном слое газа.

Коэффициенты g и ξ имеют размерность длины и по порядку величины совпадают с длиной свободного пробега:

$$g \sim l, \quad \xi \sim l. \tag{14.11}$$

Самые скачок температуры и скорость скольжения являются, следовательно, величинами первого порядка по l/L. Для вычисления коэффициентов g и ξ надо было бы решать кинетическое уравнение для функции распределения молекул газа вблизи поверхности. В этом уравнении должны были бы быть учтены столкновения молекул со стенкой, и потому должен быть известен закон, по которому происходит их рассеяние при таких столкновениях.

Если продолжить на рис. 1 штриховую прямую до ее пересечения с осью абсцисс, то она отсечет от этой оси отрезок длины g. Другими словами, можно сказать, что распределение температуры при наличии температурного скачка такое же, каким оно было бы при отсутствии скачка, но со стенкой, отодвинутой на расстояние g. То же самое относится к скольжению газа, причем стенка отодвигается на расстояние ξ. Разумеется, при таких заменах в решениях гидродинамических задач должны сохраняться только члены первого порядка по g или ξ. Поскольку учет скачков температуры или скорости эквивалентен смещению границ на расстояния порядка величины l, то вызванные этим поправки в решениях задач имеют порядок $l\partial/\partial x \sim l/L$ — первый по величине l/L.

Наряду с рассмотренными поправками к граничным условиям существуют еще и другие эффекты того же порядка по l/L, которые во многих случаях являются более важными, поскольку здесь возникают некоторые качественно новые явления.

Один из них состоит в возникновении движения газа вблизи неравномерно нагретой твердой поверхности — так называемое *тепловое скольжение*. Этот эффект в известном смысле аналогичен термодиффузии в смеси газов. Подобно тому как при наличии градиента температуры в газовой смеси столкновения с молекулами «чужого» газа приводят к появлению потока частиц, в данном случае поток возникает в результате столкновений с неравномерно нагретой стенкой молекул в узком (с толщиной $\sim l$) приповерхностном слое газа.

Обозначим тангенциальную скорость, приобретаемую газом вблизи стенки в результате теплового скольжения, символом $\mathbf{V}_t$, а тангенциальную составляющую градиента температуры — $\nabla_t T$. В первом приближении можно утверждать, что $\mathbf{V}_t$ пропорциональна $\nabla_t T$, т. е. для изотропной поверхности

$$\mathbf{V}_t = \mu \nabla_t T. \qquad (14.12)$$

Коэффициент μ должен быть пропорционален длине пробега (поскольку он связан с частицами в слое газа такой толщины). Тогда из соображений размерности ясно, что $\mu \sim l/(m\bar{v})$. Выразив длину пробега через сечение столкновений и плотность газа, имеем $l \sim 1/(N\sigma) \sim T/(\sigma P)$ и окончательно

$$\mu \sim \frac{1}{\sigma P}\sqrt{\frac{T}{m}}. \qquad (14.13)$$

Знак коэффициента μ не определяется термодинамическими требованиями; согласно опытным данным обычно $\mu > 0$.

Наконец, еще один эффект первого порядка заключается в появлении в движущемся газе дополнительного поверхностного (т. е. сосредоточенного в пристеночном слое толщины $\sim l$) теп-

лового потока $\mathbf{q}'_{\text{пов}}$, пропорционального нормальному градиенту тангенциальной скорости:

$$\mathbf{q}'_{\text{пов}} = \varphi \frac{\partial \mathbf{V}_t}{\partial n} \tag{14.14}$$

(этот поток имеет размерность эрг/см·с).

Коэффициенты μ и φ связаны друг с другом соотношением, следующим из принципа Онсагера. Для вывода этой связи рассмотрим «поверхностную» часть возрастания энтропии, $\dot{S}_{\text{пов}}$, связанную с пристеночным движением газа (и отнесенную к единице площади поверхности стенки). Это возрастание складывается из двух частей. Во-первых, наличие теплового потока $\mathbf{q}'_{\text{пов}}$ дает в производную $\dot{S}_{\text{пов}}$ вклад

$$-T^{-2}\mathbf{q}'_{\text{пов}}\nabla T$$

(ср. аналогичное выражение для возрастания энтропии, связанного с объемным тепловым потоком, — VI, § 49; IX, § 88). Во-вторых, на обтекаемую газом стенку действует сила трения, равная (будучи отнесена к единице площади) $-\eta \partial \mathbf{V}_t/\partial n$. Диссипируемая в единицу времени энергия равна работе этой силы

$$-\eta \frac{\partial \mathbf{V}_t}{\partial n} \mathbf{V}_t,$$

а поделенная на T она дает соответствующий вклад в возрастание энтропии. Таким образом,

$$\dot{S}_{\text{пов}} = -\frac{1}{T^2}\mathbf{q}'_{\text{пов}}\nabla T - \frac{1}{T}\eta \mathbf{V}_t \frac{\partial \mathbf{V}_t}{\partial n}. \tag{14.15}$$

Выберем теперь в качестве величин X_a, фигурирующих в общей формулировке принципа Онсагера (§ 9), векторы

$$\mathbf{X}_1 = \frac{1}{T^2}\nabla_t T, \quad \mathbf{X}_2 = \frac{1}{T}\frac{\partial \mathbf{V}_t}{\partial n}.$$

Тогда сравнение (14.15) с общим выражением (9.3) показывает, что соответствующими величинами $\dot{x}_a$ будут векторы

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{q}'_{\text{пов}}, \quad \dot{\mathbf{x}}_2 = \eta \mathbf{V}_t.$$

Роль же «уравнений движения» (9.1) играют соотношения (14.12) и (14.14); записав их в виде

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = T\varphi \mathbf{X}_2, \quad \dot{\mathbf{x}}_2 = \eta\mu T^2 \mathbf{X}_1,$$

мы придем к искомому соотношению

$$\varphi = T\eta\mu \tag{14.16}$$

(*L. Waldmann*, 1967).

Задачи

1. Два сосуда, содержащие газ при различных температурах T_1 и T_2, соединены длинной трубкой. В результате теплового скольжения установится разность давлений между газами в обоих сосудах (*термомеханический эффект*). Определить эту разность.

Решение. Граничное условие на поверхности трубки при пуазейлевском течении под влиянием градиентов давления и температуры с учетом теплового скольжения гласит: $v = \mu\, dT/dx$ при $r = R$ (R — радиус трубки, ось x направлена вдоль ее длины). Обычным образом (см. VI, § 17) находим распределение скоростей по сечению трубки:

$$v = -\frac{1}{4\eta}\frac{dP}{dx}(R^2 - r^2) + \mu\frac{dT}{dx}.$$

Количество (масса) газа, протекающего через сечение трубки в единицу времени, равно

$$Q = -\frac{\rho\pi R^4}{8\eta}\frac{dP}{dx} + \rho\mu\pi R^2\frac{dT}{dx} \tag{1}$$

(ρ — плотность газа). При механическом равновесии $Q = 0$, откуда

$$\frac{dP}{dx} = \frac{8\eta\mu}{R^2}\frac{dT}{dx}.$$

Интегрируя по всей длине трубки, находим для разности давлений:

$$P_2 - P_1 = \frac{8\eta\mu}{R^2}(T_2 - T_1)$$

(при не слишком больших разностях $T_2 - T_1$ коэффициенты η и μ можно считать постоянными). Оценка порядка величины эффекта (с помощью (14.13) и (8.11)) дает

$$\frac{\delta P}{P} \sim \frac{l^2}{R^2}\frac{\delta T}{T}.$$

Распределение скоростей по сечению трубки при $Q = 0$ имеет вид

$$v = \mu\left(\frac{2r^2}{R^2} - 1\right)\frac{dT}{dx}.$$

Вдоль стенок газ течет в направлении градиента температуры ($v > 0$), а вблизи оси трубки — в противоположном направлении ($v < 0$).

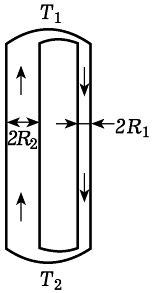


Рис. 2

2. Две трубки (с длинами L) различных радиусов ($R_1 < R_2$) соединены своими концами; места соединения поддерживаются при различных температурах ($T_2 > T_1$; разность $T_2 - T_1$ мала). В результате теплового скольжения устанавливается круговое движение газа по трубкам; определить полный расход газа через сечение трубок.

Решение. Разделив соотношение (1) задачи 1 на R^4 и интегрируя по замкнутому контуру, образованному обеими трубками, получим

$$Q = \frac{\rho\mu\pi}{L}(T_2 - T_1)(R_2^2 - R_1^2)\frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^4 + R_1^4}.$$

Течение происходит в указанном на рис. 2 направлении.

3. Определить силу $\mathbf{F}$, действующую на шар (радиуса R), погруженный в газ, в котором поддерживается постоянный градиент температуры $\nabla T = \mathbf{A}$.

Р е ш е н и е. Распределение температуры внутри шара дается формулой

$$T = \frac{3\varkappa_2}{\varkappa_1 + 2\varkappa_2} Ar\cos\theta,$$

где $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ — коэффициенты теплопроводности шара и газа; r и θ — сферические координаты с началом в центре шара и направлением $\mathbf{A}$ в качестве полярной оси (см. VI, § 50, задача 2). Отсюда находим для градиента температуры вдоль поверхности шара:

$$\frac{1}{R}\frac{\partial T}{\partial \theta} = -\frac{3\varkappa_2}{\varkappa_1 + 2\varkappa_2} A\sin\theta.$$

Возникающее благодаря тепловому скольжению ламинарное движение газа определяется всего одним вектором $\mathbf{A}$. Поэтому соответствующее решение уравнения Навье–Стокса можно искать в таком же виде, как и в задаче об обтекании жидкостью движущегося в ней шара (см. V, § 20):

$$\mathbf{v} = -a\frac{\mathbf{A} + \mathbf{n}(\mathbf{A}\mathbf{n})}{r} + b\frac{3\mathbf{n}(\mathbf{A}\mathbf{n}) - \mathbf{A}}{r^3},$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ (аддитивной постоянной в $\mathbf{v}$ не пишем, так как должно быть $v = 0$ при $r \to \infty$). Постоянные a и b определяются из условий

$$v_r = 0, \quad v_\theta = \frac{\mu}{R}\frac{\partial T}{\partial \theta} \text{ при } r = R$$

и равны

$$a = \frac{b}{R^2} = -\frac{3\varkappa_2 R\mu}{2(\varkappa_1 + 2\varkappa_2)}.$$

Действующая на шар сила:

$$\mathbf{F} = 8\pi a\eta\mathbf{A} = -\frac{12\pi\eta\mu R\varkappa_2}{\varkappa_1 + 2\varkappa_2}\nabla T.$$

Для того чтобы рассмотренные в задачах поверхностные эффекты были действительно малы по сравнению с объемными, температура должна мало меняться — в задачах 1 и 2 на радиусе трубки, а в задаче 3 на радиусе шара.

4. Два сосуда, соединенные длинной трубкой, содержат газ при одной и той же температуре и давлениях P_1 и P_2. Определить тепловой поток между сосудами, сопровождающий пуазейлевское течение по трубке (*механокалорический эффект*).

Р е ш е н и е. Согласно формулам (14.14), (14.16) тепловой поток вдоль стенок трубки

$$q' = 2\pi R q'_{\text{пов}} = 2\pi RT\eta\mu\frac{dV}{dr}.$$

С другой стороны, из условия механического равновесия жидкости при стационарном течении имеем

$$2\pi R\eta\frac{dV}{dr} = \pi R^2\frac{dP}{dx} = \pi R^2\frac{P_2 - P_1}{L}.$$

Отсюда окончательно

$$q' = \pi R^2 T\mu(P_2 - P_1)/L.$$

§ 15. Явления в сильно разреженных газах

Рассмотренные в предыдущем параграфе явления представляют собой лишь поправочные эффекты, связанные с высшими степенями отношения длины свободного пробега l к характеристическим размерам задачи L; это отношение по-прежнему предполагалось малым. Если же газ настолько разрежен (или размеры L настолько малы), что $l/L \gtrsim 1$, то гидродинамические уравнения становятся вовсе неприменимыми, даже с исправленными граничными условиями.

В общем случае произвольного l/L требуется в принципе решать кинетическое уравнение с определенными граничными условиями на соприкасающихся с газом твердых поверхностях. Эти условия определяются взаимодействием молекул газа с поверхностью и связывают функцию распределения частиц, падающих на поверхность, с функцией распределения частиц, покидающих ее. Если это взаимодействие сводится к рассеянию молекул (без их химического превращения, ионизации или поглощения поверхностью), то оно описывается вероятностью $w(\Gamma', \Gamma)\, d\Gamma'$, т. е. вероятностью того, что молекула с заданными значениями Γ, столкнувшись с поверхностью, отразится от нее в заданный интервал $d\Gamma'$; функция w нормирована условием

$$\int w(\Gamma', \Gamma)\, d\Gamma' = 1. \tag{15.1}$$

С помощью w граничное условие для функции распределения $f(\Gamma)$ записывается в виде

$$\int\limits_{\mathbf{nv}<0} w(\Gamma', \Gamma)\mathbf{nv} f(\Gamma)\, d\Gamma = -\mathbf{nv}' f(\Gamma') \text{ при } \mathbf{nv}' > 0. \tag{15.2}$$

Интеграл в левой части представляет собой число молекул, падающих в 1 с на 1 см^2 поверхности и попадающих в результате рассеяния в заданный интервал $d\Gamma'$; интегрирование производится по области значений Γ, отвечающей молекулам, движущимся по направлению к поверхности ($\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности тела). Выражение же в правой части условия (15.2) есть число молекул, покидающих поверхность (за то же время и с той же площади); значения Γ' в обеих частях равенства должны отвечать молекулам, движущимся по направлению от поверхности.

В равновесии, когда температура газа совпадает с температурой тела, функция распределения как падающих, так и отраженных частиц должна быть больцмановской. Отсюда следует, что функция w должна тождественно удовлетворять равенству

$$\int\limits_{\mathbf{nv}<0} w(\Gamma', \Gamma)\mathbf{nv} e^{-\varepsilon/T_1}\, d\Gamma = -\mathbf{nv}' e^{-\varepsilon'/T_1}, \tag{15.3}$$

получающемуся подстановкой в (15.2) $f(\Gamma) = \text{const} \cdot \exp(-\varepsilon/T_1)$, где T_1 — температура тела.

В описанной общей постановке решение задачи о движении сильно разреженного газа, конечно, весьма затруднительно. Задача может быть поставлена, однако, более простым образом в предельных случаях настолько сильного разрежения газа, что отношение $l/L \gg 1$.

Большая категория таких задач относится к ситуациям, когда значительная масса газа занимает объем, размеры которого велики как по сравнению с размерами L погруженных в газ твердых тел, так и по сравнению с длиной пробега l. Столкновения молекул с поверхностью тел происходят тогда сравнительно редко и несущественны по сравнению со взаимными столкновениями молекул. Если газ сам по себе находится в равновесии с некоторой температурой T_2, то в этих условиях можно считать, что равновесие не нарушается погруженным в него телом. При этом между газом и телом могут существовать произвольные разности температур. То же самое относится и к скоростям макроскопического движения.

Пусть $\tau = T_2 - T_1$ есть разность между температурой газа и температурой некоторого участка df поверхности тела, а $\mathbf{V}$ — скорость движения газа относительно тела. При отличных от нуля τ и $\mathbf{V}$ возникает, во-первых, обмен теплом между газом и телом и, во-вторых, на тело действует со стороны газа некоторая сила. Обозначим плотность диссипативного потока тепла от газа к телу через q. Силу же, действующую в каждой точке поверхности тела по направлению $\mathbf{n}$ внешней нормали к ней (и отнесенную к единице площади), обозначим как $\mathbf{F} - P\mathbf{n}$. Здесь второй член есть обычное давление газа, а $\mathbf{F}$ — интересующая нас дополнительная сила, связанная с τ и $\mathbf{V}$. Величины q и $\mathbf{F}$ являются функциями от τ и $\mathbf{V}$, обращающимися в нуль вместе с ними.

Если τ и $\mathbf{V}$ достаточно малы (первое — по сравнению с самими температурами газа и тела, а второе — по сравнению с тепловой скоростью молекул газа), то можно разложить q и $\mathbf{F}$ в ряд по степеням τ и $\mathbf{V}$, ограничившись линейными членами. Обозначим символами F_n и V_n компоненты $\mathbf{F}$ и $\mathbf{V}$ по направлению нормали $\mathbf{n}$, а символами $\mathbf{F}_t$, $\mathbf{u}_t$ — их тангенциальные составляющие; последние являются векторами с двумя независимыми компонентами. Тогда указанные разложения будут иметь вид

$$q = \alpha\tau + \beta V_n, \quad F_n = \gamma\tau + \delta V_n, \quad \mathbf{F}_t = \theta\mathbf{V}_t, \tag{15.4}$$

где α, β, γ, δ, θ — постоянные (вернее, функции температуры и давления), характерные для каждых данных газа и вещества твердого тела. «Скалярные» величины q и F_n не могут, в силу соображений симметрии, содержать членов, линейных по векто-

ру $\mathbf{V}_t$. По такой же причине в разложении вектора $\mathbf{F}_t$ отсутствуют члены, линейные по «скалярам» τ и V_n.

Величины α, δ, θ положительны. Так, если температура газа выше температуры тела ($\tau > 0$), то тепло будет переходить от газа к телу, т. е. соответствующая часть потока q будет положительна; поэтому $\alpha > 0$. Далее, действующие на тело силы F_n, $\mathbf{F}_t$, обусловленные движением газа относительно тела, должны быть направлены в ту же сторону, куда направлены V_n и $\mathbf{V}_t$; поэтому должно быть $\delta > 0$, $\theta > 0$. Что касается коэффициентов β и γ, то их знак не следует из общих термодинамических соображений (хотя, по-видимому, фактически они, как правило, положительны). Между ними имеется простое соотношение, являющееся следствием принципа симметрии кинетических коэффициентов.

Для вывода этого соотношения вычислим производную по времени от полной энтропии всей системы, состоящей из газа вместе с находящимся в нем телом. В единицу времени тело получает от газа через каждый элемент поверхности df количество тепла $q\,df$. При этом энтропия тела S_1 испытывает приращение:

$$\dot{S}_1 = \oint \frac{q}{T_1}\,df,$$

где интегрирование производится по всей поверхности тела.

Для вычисления увеличения энтропии газа выбираем такую систему координат, в которой газ (в месте нахождения тела) покоится; в этой системе скорость каждой точки поверхности тела есть $-\mathbf{V}$. Для целей доказательства искомого соотношения будем считать, что форма тела может меняться при его движении; тогда скорости $\mathbf{V}$ различных точек его поверхности будут являться произвольными независимыми переменными величинами. Согласно термодинамическому соотношению $dE = T\,dS - P\,d\mathcal{V}$ изменение энтропии газа в единицу времени равно

$$\dot{S}_2 = \frac{1}{T_2}(\dot{E}_2 + P_2\dot{\mathcal{V}}_2)$$

(величины с индексом 2 относятся к газу). Производная $\dot{E}_2$ равна, в силу сохранения полной энергии системы, взятому с обратным знаком изменению энергии тела. Последнее складывается из количества тепла $\oint q\,df$ и произведенной над телом работы, равной интегралу $\oint(-\mathbf{V})(\mathbf{F} - P\mathbf{n})\,df$. Отсюда находим для изменения энергии газа:

$$\dot{E}_2 = \oint(-q + F_nV_n + \mathbf{F}_t\mathbf{V}_t - P_2V_n)\,df.$$

Что касается изменения объема газа, то оно равно взятому с обратным знаком изменению объема тела:

$$\dot{\mathcal{V}}_2 = \oint V_n\,df.$$

Таким образом, имеем для изменения энтропии газа:

$$\dot{S}_2 = \frac{1}{T_2}\oint(-q + F_n V_n + \mathbf{F}_t \mathbf{V}_t)\, df.$$

Складывая производные от S_1 и S_2 и полагая затем (при малых τ) $T_1 \approx T_2 \equiv T$, получаем окончательно для скорости изменения полной энтропии системы:

$$\dot{S} = \int \left[\frac{q\tau}{T^2} + \frac{F_n V_n}{T} + \frac{\mathbf{F}_t \mathbf{V}_t}{T}\right] df. \tag{15.5}$$

Выберем в качестве величин $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$, $\dot{x}_3$, $\dot{x}_4$ в общей формулировке принципа Онсагера (§ 9) соответственно q, F_n и две компоненты вектора $\mathbf{F}_t$ (в каждой заданной точке поверхности тела). Для выяснения смысла соответствующих величин X_a сравним формулу (15.5) с общим выражением скорости изменения энтропии (9.3). Мы увидим тогда, что величинами X_1, X_2, X_3, X_4 будут соответственно $-\tau/T^2$, $-V_n/T$ и две компоненты вектора $-\mathbf{V}_t/T$ в той же точке. Кинетические же коэффициенты (коэффициенты в соотношениях (9.1)):

$$\gamma_{11} = \alpha T^2, \quad \gamma_{22} = \delta T, \quad \gamma_{33} = \gamma_{44} = \theta T,$$
$$\gamma_{12} = \beta T, \quad \gamma_{21} = \gamma T^2.$$

Из симметрии $\gamma_{12} = \gamma_{21}$ следует, таким образом, искомое соотношение

$$\beta = \gamma T. \tag{15.6}$$

Отметим также, что из условия положительности квадратичной формы (9.3) ($\dot{S} > 0$) следуют уже упомянутые неравенства α, β, $\theta > 0$ и дополнительно еще неравенство

$$T\alpha\delta > \beta^2.$$

Вычисление коэффициентов в (15.4) требует знания конкретного закона рассеяния молекул газа от поверхности тела, выражаемого введенной выше функцией $w(\Gamma', \Gamma)$. Для примера получим формулу, позволяющую в принципе вычислить величину α.

Плотность потока энергии от газа к телу выражается интегралом

$$q = \int (\varepsilon - \varepsilon')|v_x| w(\Gamma', \Gamma) f(\Gamma)\, d\Gamma\, d\Gamma' \tag{15.7}$$

(взятым по области $v_x < 0$, $v'_x > 0$), — при каждом столкновении молекулы со стенкой последней передается энергия $\varepsilon - \varepsilon'$.

Преобразуем это выражение с помощью принципа детального равновесия, согласно которому в состоянии равновесия число

переходов $\Gamma \to \Gamma'$ при рассеянии молекул от стенки равно числу переходов $\Gamma'^T \to \Gamma^T$. Это означает, что

$$w(\Gamma', \Gamma)|v_x| \exp\left(\frac{\mu - \varepsilon}{T_1}\right) = w(\Gamma^T, \Gamma'^T)|v'_x| \exp\left(\frac{\mu - \varepsilon'}{T_1}\right) \tag{15.8}$$

(в равновесии температура газа совпадает с температурой стенки).

Произведем в (15.7) переобозначение переменных интегрирования $\Gamma \to \Gamma'^T$, $\Gamma' \to \Gamma^T$. Взяв полусумму обоих получающихся выражений, напишем

$$q = \frac{1}{2} \int (\varepsilon - \varepsilon') e^{\mu/T_2} \times \\ \times \left[w(\Gamma', \Gamma)|v_x| e^{-\varepsilon/T_2} - w(\Gamma^T, \Gamma'^T)|v'_x| e^{-\varepsilon'/T_2}\right] d\Gamma\, d\Gamma'.$$

Наконец, подставив сюда $w(\Gamma^T, \Gamma'^T)$ из (15.8) и разложив затем подынтегральное выражение по степеням малой разности $\tau = T_2 - T_1$, найдем, что $q = \alpha\tau$, где

$$\alpha = \frac{1}{2T^2} \int (\varepsilon - \varepsilon')^2 |v_x| w(\Gamma', \Gamma) \exp\left(\frac{\mu - \varepsilon(\Gamma)}{T}\right) d\Gamma\, d\Gamma' \tag{15.9}$$

($v_x < 0$, $v'_x > 0$; индекс у температуры $T_1 \approx T_2$ опущен).

Функция распределения молекул, рассеянных от стенки, зависит от конкретного характера их взаимодействия со стенкой. Говорят, что имеет место *полная аккомодация*, если молекулы, отраженные от каждого элемента поверхности тела, имеют (независимо от величины и направления их скорости до столкновения) такое же распределение, какое имели бы молекулы в пучке, выходящем из маленького отверстия в сосуде с газом с температурой, равной температуре тела. Другими словами, при полной аккомодации рассеиваемый от стенки газ приходит в тепловое равновесие с нею. Величину коэффициентов в (15.4) имеет смысл сравнивать именно с их значениями при полной аккомодации. В частности, обмен энергией между молекулами газа и твердой стенкой обычно характеризуют коэффициентом аккомодации, определяемым как отношение α/α_0 (где α_0 отвечает полной аккомодации). В реальных случаях полная аккомодация, вообще говоря, не достигается и коэффициент аккомодации меньше единицы.

В том, что значение α_0 действительно является наибольшим возможным, легко убедиться с помощью следующих соображений. Рассмотрим энтропию S в (15.5) с несколько иной точки зрения: не как полную энтропию тела и газа в целом, а как энтропию тела и лишь той совокупности молекул газа, которые за время Δt падают на поверхность тела. Для этой системы отра-

жение молекул с полной аккомодацией означает переход в состояние полного равновесия, так что ее энтропия принимает максимально возможное значение. Соответственно будет максимально возможным и изменение энтропии, $\Delta S = \dot{S}\Delta t$, сопровождающее этот переход[1]). Другими словами, при полной аккомодации квадратичная форма (9.3) должна быть максимальна при любых заданных значениях величин X_a (т. е. τ, V_n, $\mathbf{V}_t$). Отмечая соответствующие значения коэффициентов γ_{ab} индексом нуль, запишем это условие в виде

$$\frac{\alpha_0-\alpha}{T^2}\tau^2+\frac{2(\beta_0-\beta)}{T^2}\tau V_n+\frac{\delta_0-\delta}{T}V_n^2+\frac{\theta_0-\theta}{T}\mathbf{V}_t^2>0.$$

Отсюда следуют неравенства

$$\alpha_0>\alpha,\ \delta_0>\delta,\ \theta_0>\theta,$$
$$T(\alpha_0-\alpha)(\delta_0-\delta)>(\beta_0-\beta)^2. \tag{15.10}$$

Рассмотрим вытекание сильно разреженного газа из маленького отверстия (с линейными размерами L). В предельном случае $l/L \gg 1$ этот процесс приобретает весьма простой характер. Молекулы будут покидать сосуд независимо одна от другой, образуя молекулярный пучок, в котором каждая молекула движется с той скоростью, с которой она подошла к отверстию. Число молекул, выходящих в 1 с из отверстия, совпадает с числом столкновений, которые испытали бы за это время молекулы газа с площадью поверхности, равной площади отверстия s. Число столкновений, отнесенное к единице площади стенки, есть $P(2\pi mT)^{-1/2}$, где P — давление газа, m — масса молекулы (см. V, § 39). Таким образом, для количества (массы) вытекающего в 1 с газа находим

$$Q = sP\sqrt{\frac{m}{2\pi T}}. \tag{15.11}$$

Если два сосуда с газом соединены друг с другом отверстием, то в случае $l \ll L$ при механическом равновесии давления P_1 и P_2 газов в обоих сосудах будут одинаковыми, вне зависимости от значений их температур T_1 и T_2. Если же $l \gg L$, то условием механического равновесия будет являться равенство чисел молекул, переходящих через отверстие из одного сосуда в другой и

[1]) В этих рассуждениях существенно, что тело (играющее роль «теплового резервуара») можно считать находящимся в состоянии равновесия в течение всего процесса, а энтропия идеального газа зависит только от закона распределения его молекул, но не от закона их взаимодействия друг с другом.

обратно. Согласно (15.11) это приводит к равенству

$$\frac{P_1}{\sqrt{T_1}} = \frac{P_2}{\sqrt{T_2}}. \qquad (15.12)$$

Таким образом, давления разреженных газов в двух сообщающихся сосудах будут различными, причем они относятся друг к другу как корни из температур (*эффект Кнудсена*).

До сих пор речь шла о явлениях в значительной массе сильно разреженного газа, находящегося самом по себе в равновесии. Остановимся коротко на явлениях другого характера, в которых и сам газ не находится в равновесном состоянии. Такова, например, передача тепла между двумя твердыми пластинками, нагретыми до различных температур и погруженными в разреженный газ, причем расстояние между ними мало по сравнению с длиной свободного пробега. Молекулы, движущиеся в пространстве между пластинками, практически не испытывают столкновений друг с другом и, отражаясь от одной пластинки, свободно движутся до столкновения с другой. При рассеянии от более нагретой пластинки молекулы приобретают от нее некоторую энергию, а затем при столкновении с менее нагретой — отдают ей часть своей энергии. Механизм теплопередачи в этом случае существенно отличается, таким образом, от механизма обычной теплопроводности в неразреженном газе. Его можно характеризовать коэффициентом теплопередачи $\varkappa$, определенным (по аналогии с обычным коэффициентом теплопроводности) так, чтобы было

$$q = \frac{\varkappa(T_2 - T_1)}{L}, \qquad (15.13)$$

где q — передаваемое количество тепла (отнесенное к единице площади пластинок в единицу времени), T_1 и T_2 — температуры пластинок, а L — расстояние между ними. Коэффициент $\varkappa$ можно оценить по порядку величины с помощью формулы (7.10). Поскольку вместо столкновений молекул друг с другом мы имеем теперь дело с непосредственными столкновениями с пластинками, то вместо длины свободного пробега l надо подставить расстояние L между пластинками. Таким образом, имеем

$$\varkappa \sim L\bar{v}N \sim \frac{PL}{\sqrt{mT}}. \qquad (15.14)$$

Коэффициент теплопередачи в сильно разреженном газе пропорционален давлению — в противоположность теплопроводности неразреженного газа, не зависящей от давления. Подчеркнем, впрочем, что теперь $\varkappa$ не является характеристикой лишь самого газа: $\varkappa$ зависит также и от конкретных условий задачи (от расстояния L между пластинками).

Аналогичное явление представляет собой «вязкость» сильно разреженного газа, проявляющаяся, например, при относительном движении двух находящихся в нем пластинок (причем опять $L \ll l$). Коэффициент вязкости η надо определить теперь так, чтобы было

$$F = \eta V/L, \tag{15.15}$$

где F — сила трения, испытываемая движущейся пластинкой (отнесенная к единице ее площади), а V — скорость движения одной пластинки относительно другой. Написав в (8.11) расстояние L вместо длины пробега l, получим

$$\eta \sim m\bar{v}NL \sim LP\sqrt{\frac{m}{T}}, \tag{15.16}$$

т. е. вязкость разреженного газа тоже пропорциональна давлению.

Задачи

1. В начальный момент $t = 0$ газ занимает полупространство $x < 0$. В пренебрежении столкновениями определить распределение плотности в последующие моменты времени.

Решение. В пренебрежении столкновениями кинетическое уравнение сводится к уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = 0,$$

общее решение которого есть $f = f(\mathbf{r} - \mathbf{v}t, \mathbf{v})$. С учетом поставленного начального условия получим в данном случае

$$f = f_0(v) \text{ при } v_x > x/t, \qquad f = 0 \text{ при } v_x < x/t,$$

где f_0 — максвелловское распределение. Плотность газа

$$N(t,x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\!\!\int \int\limits_{x/t}^{\infty} f_0(v)m^3\,dv_x\,dv_y\,dv_z = \frac{N_0}{2}\left[1 - \Phi\left(\frac{x}{t}\sqrt{\frac{m}{2T}}\right)\right],$$

где

$$\Phi(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\xi} e^{-y^2}\,dy,$$

а N_0 — начальная плотность. Ввиду пренебрежения столкновениями, написанные формулы фактически справедливы лишь в области $|x| \ll l$.

2. Определить силу, действующую на шарик радиуса R, движущийся со скоростью $\mathbf{V}$ в разреженном газе.

Решение. Полная сила сопротивления движению шарика равна

$$\mathbf{F} = -\frac{4\pi}{3}\mathbf{V}R^2(\delta + 2\theta).$$

3. Определить скорость, с которой будет двигаться в разреженном газе невесомый плоский диск, стороны которого нагреты до различных температур T_1 и T_2.

Решение. Скорость V движения диска (в направлении, перпендикулярном к его плоскости) определится из условия равенства нулю суммы

сил, действующих на обе его стороны. Диск будет двигаться менее нагретой стороной вперед со скоростью, равной (считаем, что $T_2 > T_1$)

$$V = \frac{\gamma}{2\delta}(T_2 - T_1).$$

4. Вычислить значение α_0 коэффициента α при полной аккомодации.

Р е ш е н и е. Количество энергии, приносимой в единицу времени молекулами, сталкивающимися с единицей площади поверхности тела, есть $\int f_2 v_x \varepsilon \, d\Gamma$, где f_2 — больцмановская функция распределения с температурой T_2 газа (ε — энергия молекулы, а ось x направлена перпендикулярно к поверхности тела). Количество уносимой этими же молекулами энергии получится отсюда (при полной аккомодации) просто заменой T_2 на температуру тела T_1. Поток тепла

$$q = \int (f_2 - f_1)\varepsilon v_x \, d\Gamma$$

(интегрирование по v_x — в пределах от 0 до ∞). Энергию молекулы пишем в виде $\varepsilon = \varepsilon_{\text{вн}} + mv^2/2$, где $\varepsilon_{\text{вн}}$ — внутренняя энергия. Вычисление дает для каждого из интегралов значение

$$\int f\varepsilon v_x \, d\Gamma = \nu(\bar{\varepsilon}_{\text{вн}} + 2T) = \nu\left(\bar{\varepsilon} + \frac{T}{2}\right) = \nu T\left(c_v + \frac{1}{2}\right),$$

где $\bar{\varepsilon} = c_v T$ — средняя энергия молекулы, а $\nu = P/\sqrt{2\pi m T}$ — число молекул, сталкивающихся в 1 с 1 см^2 поверхности. Тепло q равно разности энергии приходящих и уходящих молекул при одинаковом числе тех и других, т. е. одинаковом ν. В результате находим для коэффициента в $q = \alpha(T_2 - T_1)$ значение

$$\alpha_0 = \frac{P}{\sqrt{2\pi m T}}\left(c_v + \frac{1}{2}\right)$$

(разность $T_2 - T_1$ предполагается малой, так что полагаем $T_1 \approx T_2 \equiv T$).

5. То же для коэффициентов β и γ.

Р е ш е н и е. Нормальная составляющая импульса, приносимого молекулами, сталкивающимися в 1 с 1 см^2 поверхности тела, равна половине давления газа. Выражая давление через ν, имеем

$$\frac{P}{2} = \nu\sqrt{\frac{\pi m T}{2}}.$$

Взяв разность значений этой величины при температурах T_1 и T_2 и одинаковых ν, получим дополнительную силу F_n, обусловленную разностью температур. Считая $T_2 - T_1$ малой, найдем

$$\gamma_0 = P/4T.$$

Для коэффициента β имеем согласно (15.6) $\beta_0 = P/4$.

6. То же для коэффициентов δ и θ.

Р е ш е н и е. Выбираем систему координат, в которой тело покоится, а газ движется со скоростью $\mathbf{V}$; ось x направлена по нормали к поверхности, а плоскость xy выбрана так, чтобы $\mathbf{V}$ лежало на ней. Функция распределения в этой системе есть

$$f = \text{const} \cdot \exp\left\{-\frac{\varepsilon_{\text{вн}}}{T} - \frac{m}{2T}\left[(v_x - V_x)^2 + (v_y - V_y)^2 + v_z^2\right]\right\}.$$

Что касается отраженных молекул, то при полной аккомодации они имеют функцию распределения с $\mathbf{V} = 0$; τ считаем равным нулю.

При вычислении касательной силы F_y полагаем $V_x = 0$. Приносимая падающими на поверхность тела молекулами полная y-компонента импульса есть

$$\int mv_y v_x f\, d\Gamma = mV_y \int v_x f\, d\Gamma = mV_y \nu$$

(по v_x интегрирование производится везде в пределах от 0 до ∞). Уносимая же ими y-компонента импульса исчезает. Таким образом, $F_y = m\nu V_y$, так что

$$\theta_0 = \nu m = P\sqrt{\frac{m}{2\pi T}}.$$

Пусть теперь $V_x \neq 0$, $V_y = 0$. С точностью до членов первого порядка по V_x имеем

$$f = f_0 + V_x \frac{mv_x}{T} f_0,$$

где f_0 — функция распределения с $\mathbf{V} = 0$. Число молекул, сталкивающихся в 1 с с 1 см^2 поверхности, есть

$$\nu = \int f v_x\, d\Gamma = \frac{P}{\sqrt{2\pi mT}} + \frac{PV_x}{2T}.$$

Приносимая этими молекулами x-компонента импульса есть

$$\int mv_x^2 f\, d\Gamma = \frac{P}{2} + PV_x\sqrt{\frac{2m}{\pi T}}.$$

Отраженные от стенки молекулы имеют функцию распределения с $V_x = 0$, нормированную таким образом, чтобы интеграл $\int f v_x\, d\Gamma$ был равен числу ν падающих молекул, определенному выше. Уносимая этими молекулами x-компонента импульса равна

$$-\frac{\nu}{2}\sqrt{2\pi mT} = -\frac{P}{2} - \frac{PV_x}{2}\sqrt{\frac{\pi m}{2T}}.$$

Дополнительная к давлению нормальная сила есть $F_x = \delta_0 V_x$, где

$$\delta_0 = P\sqrt{\frac{m}{2\pi T}}\left(2 + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\theta_0}{2}(4 + \pi).$$

7. В предположении полной аккомодации определить температуру пластинки, движущейся со скоростью V в разреженном газе параллельно самой себе.

Р е ш е н и е. Поступая как в задаче 4, имеем для приносимой энергии:

$$\nu\left(c_v T_2 + \frac{T_2}{2} + \frac{mV^2}{2}\right),$$

а для уносимой:

$$\nu T_1\left(c_v + \frac{1}{2}\right).$$

Приравнивая эти потоки, находим

$$T_1 - T_2 = \frac{mV^2}{2c_v + 1}.$$

8. Определить количество газа, протекающего в единицу времени через поперечное сечение цилиндрической трубы (радиуса R) под влиянием градиентов давления и температуры. Газ настолько разрежен, что длина сво-

бодного пробега $l \gg R$ [1]). При столкновениях молекул с ее стенками имеет место полная аккомодация.

Р е ш е н и е. Распределение молекул по скоростям при отражении их от стенки при полной аккомодации имеет вид $v_x f\, d^3p$, где f — максвелловская функция распределения, а ось x перпендикулярна к поверхности. Обозначая через ϑ угол между скоростью молекулы и осью x, найдем, что распределение отраженных молекул по направлениям их движения (независимо от абсолютной величины скорости) имеет вид

$$\frac{\nu}{\pi} \cos\vartheta\, do$$

(эта функция нормирована так, что ее интеграл по всем телесным углам по одну сторону плоскости равен ν).

Выбираем ось z по оси трубки, а начало координат — в рассматриваемом ее сечении. Через это сечение проходят молекулы, испытавшие последнее отражение от различных участков поверхности трубы. Из числа молекул, рассеянных от некоторого элемента df поверхности стенки на расстояние z, пройдут через заданное сечение те, которые отражены по направлениям, лежащим внутри телесного угла, под которым видно это сечение из рассматриваемой точки на поверхности трубы, т. е. $df \cdot \nu \int \cos\vartheta\, do/\pi$ молекул (интегрирование производится по указанному интервалу углов).

Этот интеграл, очевидно, одинаков для всех точек, лежащих на одинаковом расстоянии z от заданного сечения. Поэтому полное число молекул, проходящих (в 1 с) через это сечение, получится заменой df на кольцевой элемент поверхности $2\pi R\, dz$ и интегрированием по всей длине трубы; умножая еще на массу m молекулы, получим расход массы газа через сечение трубы:

$$Q = 2mR \int \nu \left(\int \cos\vartheta\, do\right) dz.$$

Число ν, будучи функцией давления и температуры, меняется вдоль длины трубы. Если градиенты давления и температуры вдоль длины не слишком велики, то можно написать

$$\nu(z) = \nu(0) + z \left.\frac{d\nu}{dz}\right|_{z=0}.$$

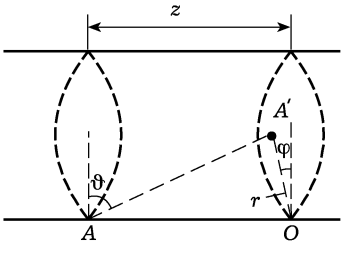


Рис. 3

Интеграл с $\nu(0)$ обращается, очевидно, в нуль, так что

$$Q = 2\pi R \left.\frac{d\nu}{dz}\right|_{z=0} \iint z \cos\vartheta\, do\, dz.$$

Для проведения интегрирования вводим в плоскости рассматриваемого сечения трубы координаты r и φ, где r — расстояние переменной точки A' от некоторой заданной точки O на окружности сечения, а φ — угол между отрезком OA' и радиусом сечения (рис. 3). Молекула, отраженная от стенки в точке A (лежащей на одной образующей с точкой O) и проходящая затем через точку A', должна иметь скорость под углом ϑ с нормалью к поверхности трубы в точке A, для которого

$$\cos\vartheta = \frac{r\cos\varphi}{\sqrt{r^2 + z^2}}.$$

[1]) О потоке газа в таких условиях говорят как о *свободномолекулярном*.

Элемент телесного угла можно написать в виде

$$do = \frac{r\,dr\,d\varphi}{r^2+z^2}\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

(площадь $r\,dr\,d\varphi$ проецируем на плоскость, перпендикулярную к прямой AA', и делим на квадрат длины этой прямой). Интегрирование производится по области

$$-\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2, \quad 0 \leqslant r \leqslant 2R\cos\varphi, \quad -\infty \leqslant z \leqslant \infty,$$

и дает

$$Q = \frac{8\pi R^3}{3}\frac{d\nu}{dz}.$$

Наконец, подставив $\nu = P/\sqrt{2\pi mT}$, получим окончательно

$$Q = \frac{4\pi R^3}{3L}\sqrt{2\pi m}\left(\frac{P_2}{\sqrt{T_2}} - \frac{P_1}{\sqrt{T_1}}\right),$$

где в скобках стоит разность значений величины $P/\sqrt{T}$ на длине L трубы (замена производной разностью допустима ввиду постоянства Q, а потому и этой производной, вдоль длины трубы).

9. В предположении полной аккомодации найти силу трения между двумя твердыми плоскостями (расстояние между которыми $L \ll l$), движущимися относительно друг друга со скоростью V; плоскости имеют температуры T_1 и T_2.

Р е ш е н и е. Пусть плоскость *1* (с температурой T_1) покоится, а плоскость *2* движется со скоростью V вдоль оси x; ось y направлена от первой плоскости ко второй. Молекулы со скоростями $v_y > 0$ и $v_y < 0$ отражены соответственно от плоскостей *1* и *2*: при полной аккомодации их функции распределения

$$f = \frac{2N_1}{(2\pi mT_1)^{3/2}}\exp\left(-\frac{mv^2}{2T_1}\right) \qquad \text{при } v_y > 0,$$

$$f = \frac{2N_2}{(2\pi mT_2)^{3/2}}\exp\left(-\frac{m(\mathbf{v}-\mathbf{V})^2}{2T_2}\right) \qquad \text{при } v_y < 0,$$

где N_1 и N_2 — соответствующие плотности числа частиц; полная плотность $N = N_1 + N_2$. Условие отсутствия суммарного потока в направлении оси y дает

$$N_1\sqrt{T_1} = N_2\sqrt{T_2}.$$

На каждую из плоскостей действует давление $P = N_1T_1 + N_2T_2$ и сила трения (отнесенная к единице площади)

$$F_2 = -F_1 = mV\int\limits_{v_y>0} v_y f\,d^3p = VN_2\sqrt{\frac{2mT_2}{\pi}} = VN\sqrt{\frac{2m}{\pi}}\frac{(T_1T_2)^{1/2}}{T_1^{1/2}+T_2^{1/2}}.$$

Если $T_1 = T_2 \equiv T$, то

$$F_2 = -F_1 = VP\sqrt{\frac{m}{2\pi T}}$$

в соответствии с (15.15), (15.16).

10. В предположении полной аккомодации определить коэффициент теплопередачи $\varkappa$ между двумя пластинками с близкими температурами T_1 и T_2.

Р е ш е н и е. При полной аккомодации падающие на пластинку *1* молекулы имеют равновесное распределение с температурой T_2. Поэтому поток энергии от пластинки *1* к пластинке *2*: $q = \alpha_0(T_2 - T_1)$. Взяв α_0 из задачи 4 и определив $\varkappa$ согласно (15.13), получим

$$\varkappa = \alpha_0 L = \frac{PL}{\sqrt{2\pi mT}}\left(c_v + \frac{1}{2}\right)$$

в соответствии с оценкой (15.14).

11. Определить плотность газа на оси позади кругового диска радиуса $R \ll l$, движущегося в газе со скоростью $-\mathbf{V}$, большой по сравнению со средней тепловой скоростью атомов v_T.

Р е ш е н и е. При $V \gg v_T$ частицы, отраженные от задней поверхности диска, несущественны (за исключением узкой области у этой поверхности — см. ниже). Все дело сводится к «затенению» диском набегающего потока. В системе координат, в которой диск покоится (а газ движется со скоростью $\mathbf{V}$), в отсутствие самого диска функция распределения была бы равна

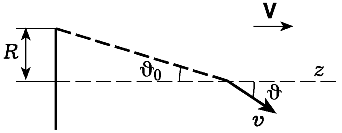


Рис. 4

$$f_0(\mathbf{v}) = \frac{N_0}{(2\pi mT)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{m(\mathbf{v}-\mathbf{V})^2}{2T}\right\}.$$

В присутствии диска плотность числа частиц газа на оси z (рис. 4) будет

$$N(z) = 2\pi\int_0^{\infty}\int_{\vartheta_0}^{\pi} f_0(\mathbf{v})p^2\sin\vartheta\, d\vartheta\, dp,$$

где ϑ — угол между $\mathbf{v}$ и осью z, а ϑ_0 — угол, под которым радиус диска виден из точки наблюдения на оси z ($\operatorname{tg}\vartheta_0 = R/z$; частицы с $\vartheta < \vartheta_0$ «затенены»). Интегрирование с учетом условия $V \gg v_T$ дает

$$N(z) = \frac{N_0}{V}\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{1/2}\int_0^{\infty}\exp\left\{-\frac{m}{2T}[(v - V\cos\vartheta_0)^2 + V^2\sin^2\vartheta_0]\right\}v\,dv \approx$$

$$\approx N_0\cos\vartheta_0\exp\left\{-\frac{mV^2}{2T}\sin^2\vartheta_0\right\} = N_0\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\exp\left\{-\frac{mV^2}{2T}\frac{R^2}{R^2+z^2}\right\},$$

где N_0 — плотность газа вдали от диска. Интегрирование по dp выполнено в предположении $\cos\vartheta_0 \gg v_T/V$ (можно показать, что это же неравенство является также и условием допустимости пренебрежения отраженными от задней стенки частицами).

§ 16. Динамический вывод кинетического уравнения

Хотя изложенный в § 3 вывод кинетического уравнения удовлетворителен с физической точки зрения, представляет значительный интерес проследить за тем, каким образом это уравнение можно аналитически получить из математического аппарата теории, т. е. из уравнений движения частиц газа; такой вывод дан *Н.Н. Боголюбовым* (1946). Значение этого метода состоит

также и в том, что он дает регулярную процедуру, позволяющую в принципе получить не только уравнение Больцмана, но и поправки к нему, т. е. члены следующих порядков по малому «параметру газовости» — отношению $(d/\overline{r})^3$, где d — молекулярные размеры (радиус действия молекулярных сил), а $\overline{r}$ — среднее расстояние между молекулами. Излагаемый ниже вывод относится к одноатомному газу в чисто классических рамках, т. е. в предположении, что не только свободное движение, но и процессы столкновения частиц газа описываются классической механикой.

Исходным пунктом метода является теорема Лиувилля для функции распределения газа в целом как системы $\mathcal{N}$ частиц. Обозначим такую функцию (в $6\mathcal{N}$-мерном фазовом пространстве) через $f^{(\mathcal{N})}\,(t, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{\mathcal{N}})$, где символы τ_a обозначают совокупности координат и компонент импульса a-й частицы: $\tau_a = (\mathbf{r}_a, \mathbf{p}_a)$; эта функция будет предполагаться нормированной на единицу:

$$\int f^{(\mathcal{N})}(t, \tau_1, \ldots, \tau_{\mathcal{N}})\, d\tau_1 \ldots d\tau_{\mathcal{N}} = 1, \qquad d\tau_a = d^3x_a\, d^3p_a.$$

Фигурирующая в уравнении Больцмана «одночастичная» функция распределения получается интегрированием функции $f^{(\mathcal{N})}$ по всем $d\tau_a$, кроме одного:

$$f^{(1)}(t, \tau_1) = \int f^{(\mathcal{N})}\, d\tau_2 \ldots d\tau_{\mathcal{N}}; \tag{16.1}$$

функция $f^{(1)}$ тоже нормирована на 1; обозначение же f (без индекса) сохраним для функции распределения, нормированной на полное число частиц: $f = \mathcal{N} f^{(1)}$.

Напомним (см. V, § 3), что теорема Лиувилля возникает как следствие уравнения непрерывности в фазовом пространстве, которому должна удовлетворять функция распределения замкнутой системы:

$$\frac{\partial f^{(\mathcal{N})}}{\partial t} + \sum_{a=1}^{\mathcal{N}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_a}(f^{(\mathcal{N})}\dot{\mathbf{r}}_a) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_a}(f^{(\mathcal{N})}\dot{\mathbf{p}}_a) \right\} = 0. \tag{16.2}$$

С помощью уравнений Гамильтона

$$\dot{\mathbf{r}}_a = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_a}, \qquad \dot{\mathbf{p}}_a = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}_a} \tag{16.3}$$

отсюда получается равенство

$$\frac{\partial f^{(\mathcal{N})}}{\partial t} + \sum_{a=1}^{\mathcal{N}} \left\{ \frac{\partial f^{(\mathcal{N})}}{\partial \mathbf{r}_a}\dot{\mathbf{r}}_a + \frac{\partial f^{(\mathcal{N})}}{\partial \mathbf{p}_a}\dot{\mathbf{p}}_a \right\} = \frac{df^{(\mathcal{N})}}{dt} = 0, \tag{16.4}$$

причем $\dot{\mathbf{r}}_a \equiv \mathbf{v}_a$ и $\dot{\mathbf{p}}_a$ предполагаются выраженными через $\tau_1, \tau_2, \ldots$ согласно уравнениям (16.3); равенство (16.4) и составляет содержание теоремы Лиувилля.

Функцию Гамильтона одноатомного газа представим в виде

$$H = \sum_{a \leqslant \mathcal{N}} \frac{p_a^2}{2m} + \sum_{b<a\leqslant \mathcal{N}} U(|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|). \tag{16.5}$$

Здесь предполагается, что внешнее поле отсутствует, а взаимодействие частиц газа друг с другом сводится к сумме их попарных взаимодействий [1]). С такой функцией Гамильтона уравнение (16.4) принимает вид

$$\frac{\partial f^{(\mathcal{N})}}{\partial t} + \sum_{a=1}^{\mathcal{N}} \left\{ \frac{\partial f^{(\mathcal{N})}}{\partial \mathbf{r}_a} \mathbf{v}_a - \frac{\partial f^{(\mathcal{N})}}{\partial \mathbf{p}_a} \sum_{b<a} \frac{\partial U_{ab}}{\partial \mathbf{r}_a} \right\} = 0, \tag{16.6}$$

где U_{ab} $(a \neq b)$ обозначает $U(|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|)$.

Проинтегрируем теперь это уравнение по $d\tau_2 \ldots d\tau_{\mathcal{N}}$. В результате такого интегрирования из всех членов под знаком суммы в (16.6) останутся лишь те, которые содержат дифференцирования по $\mathbf{p}_1$ или $\mathbf{r}_1$; интегралы от остальных членов преобразуются в интегралы по бесконечно удаленным поверхностям в импульсном или координатном пространстве и обращаются в нуль. Таким образом, получим

$$\frac{\partial f^{(1)}(t,\tau_1)}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \frac{\partial f^{(1)}(t,\tau_1)}{\partial \mathbf{r}_1} = \mathcal{N} \int \frac{\partial U_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial f^{(2)}(t,\tau_1,\tau_2)}{\partial \mathbf{p}_1}\, d\tau_2, \tag{16.7}$$

где $f^{(2)}$ — нормированная на 1 двухчастичная функция распределения, т. е. интеграл

$$f^{(2)}(t,\tau_1,\tau_2) = \int f^{(\mathcal{N})}\, d\tau_3 \ldots d\tau_{\mathcal{N}} \tag{16.8}$$

(множитель $\mathcal{N}$ в (16.7) учитывает члены, отличающиеся лишь обозначением переменных интегрирования; строго говоря, число таких членов есть $\mathcal{N} - 1$, но, ввиду очень большой величины $\mathcal{N}$, $\mathcal{N} - 1 \approx \mathcal{N}$).

[1]) Последнее предположение имеет модельный характер. Подчеркнем, однако, что на результате первого приближения (отвечающего уравнению Больцмана) оно вообще не сказывается: в этом приближении фигурируют только двойные столкновения частиц, в которых другие (не парные) взаимодействия не участвуют.

Аналогичным образом, проинтегрировав (16.6) по $d\tau_3 \ldots d\tau_{\mathcal{N}}$, получим уравнение

$$\frac{\partial f^{(2)}}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \frac{\partial f^{(2)}}{\partial \mathbf{r}_1} + \mathbf{v}_2 \frac{\partial f^{(2)}}{\partial \mathbf{r}_2} - \frac{\partial U_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial f^{(2)}}{\partial \mathbf{p}_1} - \frac{\partial U_{12}}{\partial \mathbf{r}_2} \frac{\partial f^{(2)}}{\partial \mathbf{p}_2} = \\ = \mathcal{N} \int \left[\frac{\partial f^{(3)}}{\partial \mathbf{p}_1} \frac{\partial U_{13}}{\partial \mathbf{r}_1} + \frac{\partial f^{(3)}}{\partial \mathbf{p}_2} \frac{\partial U_{23}}{\partial \mathbf{r}_2} \right] d\tau_3, \quad (16.9)$$

где $f^{(3)}(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3)$ — трехчастичная функция распределения.

Продолжая таким образом, мы получили бы практически неограниченную ($\mathcal{N}$ очень велико!) цепочку последовательных уравнений, каждое из которых выражает $f^{(n)}$ через $f^{(n+1)}$. Все эти уравнения — точные в том смысле, что никаких предположений, связанных с разреженностью газа, в них еще не делалось. Но для получения замкнутой системы уравнений эту цепочку надо где-то оборвать, воспользовавшись условием разреженности газа. В частности, первому приближению метода отвечает обрыв цепочки уже на первом уравнении (уравнение (16.7)), в котором двухчастичная функция $f^{(2)}$ будет приближенно выражена через $f^{(1)}$. Последнее осуществляется с учетом разреженности газа с помощью уравнения (16.9).

Обращаясь к этому уравнению, покажем прежде всего, что интеграл в его правой части мал. Действительно, функция $U(r)$ заметно отлична от нуля лишь в радиусе действия сил, т. е. при $r \lesssim d$. Поэтому и в обеих частях интеграла в (16.9) интегрирования по координатам происходят фактически лишь по областям $|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1| \lesssim d$ или $|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2| \lesssim d$, т. е. по объему $\sim d^3$. Заметив также, что при интегрировании по всему объему газа $\mathcal{V} \sim \mathcal{N}\bar{r}^3$ было бы $\int f^{(3)}\, d\tau_3 = f^{(2)}$, находим следующую оценку:

$$\mathcal{N} \int \frac{\partial f^{(3)}}{\partial \mathbf{p}_1} \frac{\partial U_{13}}{\partial \mathbf{r}_1} d\tau_3 \sim \frac{\partial U(r)}{\partial r} \frac{\partial f^{(2)}}{\partial p_1} \frac{d^3}{\bar{r}^3}.$$

Отсюда видно, что правая часть уравнения (16.9) мала в отношении $(d/\bar{r})^3$ по сравнению с содержащими $\partial U/\partial \mathbf{r}$ членами в левой части уравнения и поэтому ею можно пренебречь. Совокупность же членов в левой части уравнения представляет собой полную производную $df^{(2)}/dt$, в которой $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ рассматриваются как функции времени, удовлетворяющие уравнениям движения (16.3) с функцией Гамильтона задачи двух тел:

$$H = \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m} + \frac{\mathbf{p}_2^2}{2m} + U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|).$$

Таким образом, имеем

$$\frac{d}{dt}f^{(2)}(t,\tau_1,\tau_2)=0. \tag{16.10}$$

До сих пор все преобразования уравнений носили чисто механический характер. Разумеется, для вывода кинетического уравнения необходимо сделать также и некоторое предположение статистического характера. Оно может быть сформулировано как утверждение о статистической независимости каждой пары частиц, вступающих в столкновение (по существу именно это предположение подразумевалось при выводе кинетического уравнения в § 3, когда вероятность столкновения записывалась в виде (2.1), пропорциональном произведению ff_1). В излагаемом методе это утверждение играет роль начального условия к дифференциальному уравнению (16.10). Именно оно вносит асимметрию по отношению к обоим направлениям времени, в результате чего из инвариантных к обращению времени уравнений механики получается необратимое кинетическое уравнение. Корреляция между положениями и импульсами частиц газа возникает лишь в течение времени их столкновения ($\sim d/\overline{v}$) и простирается на расстояния $\sim d$. Таким образом, предположение о статистической независимости сталкивающихся частиц является также и источником принципиальных ограничений в допускаемых кинетическим уравнением расстояниях и промежутках времени, о которых говорилось уже в § 3.

Пусть t_0 — некоторый момент времени, предшествующий столкновению, когда две частицы находятся еще далеко друг от друга ($|\mathbf{r}_{10}-\mathbf{r}_{20}|\gg d$, где индекс нуль отличает значения величин в этот момент). Статистическая независимость сталкивающихся частиц означает, что в такой момент t_0 двухчастичная функция распределения распадается на произведение двух одночастичных функций $f^{(1)}$. Поэтому интегрирование уравнения (16.10) от t_0 до t дает

$$f^{(2)}(t,\tau_1,\tau_2)=f^{(1)}(t_0,\tau_{10})f^{(1)}(t_0,\tau_{20}). \tag{16.11}$$

Здесь $\tau_{10}=(\mathbf{r}_{10},\mathbf{p}_{10})$ и $\tau_{20}=(\mathbf{r}_{20},\mathbf{p}_{20})$ надо понимать как те значения координат и импульсов, которые должны иметь частицы в момент t_0 для того, чтобы к моменту t приобрести требуемые значения $\tau_1=(\mathbf{r}_1,\mathbf{p}_1)$ и $\tau_2=(\mathbf{r}_2,\mathbf{p}_2)$; в этом смысле τ_{10}, τ_{20} являются функциями от τ_1, τ_2 и $t-t_0$ (причем от $t-t_0$ зависят лишь $\mathbf{r}_{10}$ и $\mathbf{r}_{20}$; значения же $\mathbf{p}_{10}$ и $\mathbf{p}_{20}$, относясь к свободно движущимся перед столкновением частицам, от выбора $t-t_0$ не зависят).

Возвратимся к уравнению (16.7) — будущему кинетическому уравнению. Его левая часть уже имеет требуемый вид; нас будет интересовать теперь интеграл в его правой части, который должен превратиться в конце концов в интеграл столкновений

уравнения Больцмана. Подставив в этот интеграл $f^{(2)}$ из (16.11) и перейдя в обеих частях уравнения от функции $f^{(1)}$ к функции $f = \mathcal{N} f^{(1)}$, пишем

$$\frac{\partial f(t,\tau_1)}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \frac{\partial f(t,\tau_1)}{\partial \mathbf{r}_1} = \operatorname{St} f,$$

где

$$\operatorname{St} f = \int \frac{\partial U_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} \{ f(t_0,\tau_{10}) f(t_0,\tau_{20}) \}\, d\tau_2. \tag{16.12}$$

В интеграле (16.12) существенна только область $|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| \sim d$ — область, в которой происходит столкновение. Но в этой области можно пренебречь (в рассматриваемом первом приближении!) координатной зависимостью функции f; эта функция заметно меняется лишь на расстояниях L (характерные размеры задачи), во всяком случае больших по сравнению с d. Мы не изменим поэтому окончательного вида интеграла столкновений, если будем рассматривать (с целью некоторого упрощения рассуждений и записи формул) пространственно-однородный случай, т. е. предположив, что функция f вообще не зависит от координат. Сразу же отметим, что в функциях $f(t_0, \mathbf{p}_{10})$, $f(t_0, \mathbf{p}_{20})$ пропадает тогда и явная (через посредство $\mathbf{r}_{10}(t)$ и $\mathbf{r}_{20}(t)$) зависимость от времени.

Преобразуем подынтегральное выражение в (16.12), воспользовавшись тем, что выражение в фигурных скобках является интегралом движения (именно как таковое оно появилось в (16.11); независимо от этого очевидно, что $\mathbf{p}_{10}$ и $\mathbf{p}_{20}$ — значения импульсов в фиксированный момент времени t_0 — уже по определению являются интегралами движения). Учтя также и отмеченное выше отсутствие в них явной зависимости от времени t, имеем

$$\frac{d}{dt} f(t_0,\mathbf{p}_{10}) f(t_0,\mathbf{p}_{20}) = \left(\mathbf{v}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} + \mathbf{v}_2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_2} - \frac{\partial U_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} - \frac{\partial U_{12}}{\partial \mathbf{r}_2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_2} \right) \times$$
$$\times f(t_0,\mathbf{p}_{10}) f(t_0,\mathbf{p}_{20}) = 0. \tag{16.13}$$

Выразим отсюда производную по $\mathbf{p}_1$ через производные по $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ и $\mathbf{p}_2$ и подставим в (16.12). Член с производной $\partial/\partial\mathbf{p}_2$ исчезает после преобразования в интеграл по поверхности в импульсном пространстве. После этого получим

$$\operatorname{St} f(t,\mathbf{p}_1) = \int \mathbf{v}_{\text{отн}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \{ f(t_0,\mathbf{p}_{10}) f(t_0,\mathbf{p}_{20}) \}\, d^3x\, d^3p_2, \tag{16.14}$$

где введена относительная скорость частиц $\mathbf{v}_{\text{отн}} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ и учтено, что $\mathbf{p}_{10}$ и $\mathbf{p}_{20}$ (а с ними и все выражение в фигурных скобках) зависят от $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ лишь через разность $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Введя

вместо $\mathbf{r} = (x, y, z)$ цилиндрические координаты z, ρ, φ с осью z вдоль $\mathbf{v}_{\text{отн}}$, заметив, что $\mathbf{v}_{\text{отн}}\partial/\partial\mathbf{r} = v_{\text{отн}}\partial/\partial z$, и проинтегрировав по dz, перепишем (16.14) в виде [1])

$$\operatorname{St} f(t, \mathbf{p}_1) = \int \{f(t_0, \mathbf{p}_{10}) f(t_0, \mathbf{p}_{20})\}\Big|_{z=-\infty}^{z=\infty} v_{\text{отн}}\rho\, d\rho\, d\varphi \cdot d^3p_2. \tag{16.15}$$

Вспомним теперь, что $\mathbf{p}_{10}$ и $\mathbf{p}_{20}$ — начальные (в момент t_0) импульсы частиц, которые в конечный момент t имеют импульсы $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$. Если в конечный момент $z = z_1 - z_2 = -\infty$, то ясно, что в начальный момент частицы находились «еще дальше» друг от друга, т. е. столкновения вообще не было; другими словами, в этом случае начальные и конечные импульсы совпадают:

$$\mathbf{p}_{10} = \mathbf{p}_1, \quad \mathbf{p}_{20} = \mathbf{p}_2 \quad \text{при} \quad z = -\infty.$$

Если же $z = +\infty$, то $\mathbf{p}_{10}$ и $\mathbf{p}_{20}$ играют роль начальных импульсов для столкновения, в результате которого частицы приобретают импульсы $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$; в этом случае введем обозначения

$$\mathbf{p}_{10} = \mathbf{p}'_1(\rho), \quad \mathbf{p}_{20} = \mathbf{p}'_2(\rho) \text{ при } z = +\infty.$$

Эти значения являются функциями координаты ρ, играющей роль прицельного параметра столкновения. Произведение же

$$\rho\, d\rho\, d\varphi = d\sigma$$

есть классическое сечение столкновений.

Наконец, остается заметить, что явную зависимость функций $f(t_0, \mathbf{p}_{10})$ и $f(t_0, \mathbf{p}_{20})$ от t_0 можно заменить в рассматриваемом приближении такой же зависимостью от t. Действительно, справедливость утверждения (16.11) требует соблюдения лишь неравенства $t - t_0 \gg d/\overline{v}$: в момент t_0 расстояние между частицами должно быть велико по сравнению с радиусом действия сил d. Но разность $t - t_0$ может быть выбрана так, чтобы удовлетворять также и условию $t - t_0 \ll l/\overline{v}$, где l — длина пробега; отношение же $l/\overline{v}$ — время свободного пробега — есть как раз та характерная величина, которая определяет периоды возможного изменения функции распределения со временем. Изменение функции распределения за время $t - t_0$ будет тогда относительно малым, так что им можно пренебречь.

[1]) Пределы $z = \pm\infty$ надо понимать как расстояния, большие по сравнению с d, но малые по сравнению с длиной пробега l (при буквально бесконечных пределах все выражение обратилось бы в нуль, поскольку $f \equiv 0$ вне объема, занимаемого газом). Такая ситуация возникла вследствие того, что при переходе от (16.12) к (16.14) было использовано уравнение (16.13), справедливое лишь до тех пор, пока рассматриваемые частицы не испытывают следующих столкновений.

После всего сказанного получаем окончательное выражение для интеграла (16.15):

$$\operatorname{St} f(t, \mathbf{p}_1) = \int \{f(t, \mathbf{p}'_1) f(t, \mathbf{p}'_2) - f(t, \mathbf{p}_1) f(t, \mathbf{p}_2)\} v_{\text{отн}} \, d\sigma \, d^3p_2, \tag{16.16}$$

совпадающее с больцмановским интегралом столкновений (3.9).

§ 17. Кинетическое уравнение с учетом тройных столкновений

Для нахождения первых поправочных членов к уравнению Больцмана надо вернуться к тем пунктам изложенных в § 16 вычислений, в которых были произведены пренебрежения, и продвинуть точность вычислений на один порядок (по параметру газовости) дальше. Эти пренебрежения относились, прежде всего, к уравнению (16.9), в котором были опущены члены, содержащие тройную корреляцию $f^{(3)}$; тем самым были исключены из рассмотрения тройные столкновения атомов. Кроме того, при преобразовании интеграла столкновения (16.12) к окончательному виду (16.16) было пренебрежено изменением функции распределения на расстояниях $\sim d$ и за времена $\sim d/\overline{v}$; тем самым двойные столкновения рассматривались как «локальные» — происходящие в одной точке. Теперь должны быть учтены оба эти источника поправок — тройные столкновения и «нелокальность» парных столкновений.

В первом приближении цепочка уравнений была оборвана на втором уравнении, связывающем $f^{(2)}$ с $f^{(3)}$. Во втором приближении надо дойти до третьего уравнения, связывающего $f^{(3)}$ с $f^{(4)}$, причем члены с $f^{(4)}$ в нем можно опустить (подобно тому, как в первом приближении были опущены члены с $f^{(3)}$ в (16.9)). После этого оно сведется к виду

$$\frac{d}{dt} f^{(3)}(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3) = 0, \tag{17.1}$$

аналогичному прежнему уравнению (16.10) для $f^{(2)}$; переменные τ_1, τ_2, τ_3 в (17.1) предполагаются изменяющимися со временем согласно уравнениям движения задачи трех тел (причем взаимодействие между частицами по-прежнему будем считать парным[1])). С учетом статистической независимости частиц перед

---

[1]) В противоположность первому приближению (ср. примеч. на с. 90) теперь это предположение несколько ограничивает общность рассмотрения, поскольку в тройных столкновениях могли бы проявляться и тройные взаимодействия (т. е. члены в функции Гамильтона вида $U(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)$), не сводящиеся к парным.

столкновением решение уравнения (17.1) есть

$$f^{(3)}(t,\tau_1,\tau_2,\tau_3) = f^{(1)}(t_0,\tau_{10})f^{(1)}(t_0,\tau_{20})f^{(1)}(t_0,\tau_{30}). \tag{17.2}$$

Величины t_0, τ_{a0} $(a = 1,2,3)$ имеют здесь такой же смысл, что и в (16.11); $\tau_{a0} = \tau_{a0}(t,t_0,\tau_1,\tau_2,\tau_3)$ — это значения координат и импульсов, которые частицы должны иметь в момент t_0 для того, чтобы к моменту t попасть в заданные точки τ_1, τ_2, τ_3 фазового пространства. Отличие от (16.11) состоит лишь в том, что теперь $\tau_{a0} = (\mathbf{r}_{a0},\mathbf{p}_{a0})$ являются начальными значениями координат и импульсов задачи трех (а не двух) тел, которую будем считать в принципе решенной[1]).

Для записи и преобразования дальнейших формул целесообразно ввести оператор $\widehat{S}_{123}$, действие которого на функцию переменных τ_1, τ_2, τ_3 (относящихся к трем частицам в задаче трех тел) заключается в замене этих переменных согласно

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_a \to \widetilde{\mathbf{r}}_a &= \mathbf{r}_{a0} + \frac{\mathbf{p}_{a0}}{m}(t-t_0), \\ \mathbf{p}_a \to \widetilde{\mathbf{p}}_a &= \mathbf{p}_{a0}. \end{aligned} \tag{17.3}$$

Аналогичным образом, оператор $\widehat{S}_{12}$ будет производить такую же замену в функциях переменных τ_1, τ_2, относящихся к двум частицам в задаче двух тел. Важное свойство преобразования (17.3) состоит в том, что при временах $t-t_0 \gg d/\overline{v}$ оно перестает зависеть от времени. Действительно, при таких $t-t_0$ частицы находятся далеко друг от друга и движутся свободно с постоянными скоростями $\mathbf{v}_{a0} = \mathbf{p}_{a0}/m$; при этом значения $\mathbf{r}_{a0}$ зависят от времени как const $- \mathbf{v}_{a0}(t-t_0)$ и временная зависимость в (17.3) выпадает. Заметим также, что если частицы вообще не взаимодействовали бы, то преобразование (17.3) сводилось бы к тождеству: при свободном (в течение всего времени) движении правые части преобразований (17.3) тождественно совпадают с левыми. По той же причине, если одна из частиц, скажем, частица *1*, не взаимодействует с частицами *2* и *3*, то $\widehat{S}_{123} \equiv \widehat{S}_{23}$; операторы же $\widehat{S}_{12}$ и $\widehat{S}_{13}$ в этих условиях сводятся к единице. В силу этих свойств очевидно, что оператор

$$\widehat{G}_{123} = \widehat{S}_{123} - \widehat{S}_{12} - \widehat{S}_{13} - \widehat{S}_{23} + 2 \tag{17.4}$$

обращается в нуль, если хотя бы одна из трех частиц не взаимодействует с двумя другими. Другими словами, этот оператор вы-

[1]) Фактически, конечно, аналитическое решение задачи трех тел может быть осуществлено лишь в редких случаях (например, для твердых шариков).

деляет из функций ту часть, которая связана со взаимодействием всех трех частиц (между тем как в задачу трех тел входят, как частные случаи, также и парные столкновения при свободно движущейся третьей частице).

С помощью оператора $\widehat{S}_{123}$ формула (17.2) запишется в виде

$$f^{(3)}(t,\tau_1,\tau_2,\tau_3) = \widehat{S}_{123}\widetilde{f}^{(1)}(t,t_0,\tau_1)\widetilde{f}^{(1)}(t,t_0,\tau_2)\widetilde{f}^{(1)}(t,t_0,\tau_3), \tag{17.5}$$

где

$$\widetilde{f}^{(1)}(t,t_0,\tau) = f^{(1)}\left(t_0, \mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}}{m}(t-t_0), \mathbf{p}\right) \tag{17.6}$$

(сдвиг аргумента $\mathbf{r}$ в $f^{(1)}$ введен для компенсации сдвига, производимого оператором $\widehat{S}_{123}$).

Двухчастичное распределение $f^{(2)}$ получим, проинтегрировав функцию $f^{(3)}$ по переменным τ_3, а интегрирование по τ_2 и τ_3 дает функцию распределения $f^{(1)}$:

$$f^{(2)}(t,\tau_1,\tau_2) = \int f^{(3)}(t,\tau_1,\tau_2,\tau_3)\,d\tau_3, \tag{17.7}$$

$$f^{(1)}(t,\tau_1) = \int f^{(3)}(t,\tau_1,\tau_2,\tau_3)\,d\tau_2\,d\tau_3. \tag{17.8}$$

Цель дальнейшего вычисления состоит в том, чтобы из этих двух равенств (с $f^{(3)}$ из (17.5)) путем исключения $\widetilde{f}^{(1)}$ с нужной точностью выразить $f^{(2)}$ через $f^{(1)}$. Подставив затем это выражение в уравнение (16.7) (само по себе точное), мы получим искомое кинетическое уравнение.

Для осуществления этой программы, прежде всего, преобразуем интеграл (17.8), выразив в (17.5) оператор $\widehat{S}_{123}$ через $\widehat{G}_{123}$ согласно (17.4). Имея в виду очевидные (в силу сохранения полного числа молекул) равенства

$$\int \widetilde{f}^{(1)}(t,t_0,\tau)\,d\tau = \int f^{(1)}(t_0,\tau)\,d\tau = 1,$$

$$\int \widehat{S}_{12}\widetilde{f}^{(1)}(t,t_0,\tau_1)\widetilde{f}^{(1)}(t,t_0,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2 = 1,$$

получим

$$\begin{aligned} f^{(1)}(t,\tau_1) &= \\ &= \widetilde{f}^{(1)}(t,t_0,\tau_1) + 2\int \{(\widehat{S}_{12}-1)\widetilde{f}^{(1)}(t,t_0,\tau_1)\widetilde{f}^{(1)}(t,t_0,\tau_2)\}\,d\tau_2 + \\ &+ \int \{\widehat{G}_{123}\widetilde{f}^{(1)}(t,t_0,\tau_1)\widetilde{f}^{(1)}(t,t_0,\tau_2)\widetilde{f}^{(1)}(t,t_0,\tau_3)\}\,d\tau_2\,d\tau_3. \end{aligned} \tag{17.9}$$

Это уравнение можно решать относительно $\widetilde{f}^{(1)}$ последовательными приближениями, имея в виду, что $(\widehat{S}_{12}-1)$ первого, а $\widehat{G}_{123}$ второго порядка малости (ср. оценку правой части (16.9)). В нулевом приближении: $\widetilde{f}^{(1)}(t,t_0,\tau_1)=f^{(1)}(t,\tau_1)$. В следующих двух приближениях получим

$$\begin{aligned}\widetilde{f}^{(1)}(t,t_0,\tau_1) &=\\ &= f^{(1)}(t,\tau_1)-2\int\{\widehat{S}_{12}-1)f^{(1)}(t,\tau_1)f^{(1)}(t,\tau_2)\}\,d\tau_2-\\ &-\int\{\widehat{G}_{123}-4(\widehat{S}_{12}-1)(\widehat{S}_{13}+\widehat{S}_{23}-2)f^{(1)}(t,\tau_1)f^{(1)}(t,\tau_2)\times\\ &\qquad\times f^{(1)}(t,\tau_3)\}\,d\tau_2\,d\tau_3.\end{aligned}$$

Теперь остается подставить это выражение в (17.5) и затем в (17.7), сохранив при этом лишь члены не более чем второго порядка малости (члены $\sim(\widehat{S}_{12}-1)^2$ и $\sim\widehat{G}_{123}$). В результате получим окончательно

$$\begin{aligned}f^{(2)}(t,\tau_1,\tau_2) &= \widehat{S}_{12}f^{(1)}(t,\tau_1)f^{(1)}(t,\tau_2)+\\ &+\int\{\widehat{R}_{123}f^{(1)}(t,\tau_1)f^{(1)}(t,\tau_2)f^{(1)}(t,\tau_3)\}\,d\tau_3,\end{aligned}\tag{17.10}$$

где

$$\widehat{R}_{123}=\widehat{S}_{123}-\widehat{S}_{12}\widehat{S}_{13}-\widehat{S}_{12}\widehat{S}_{23}+\widehat{S}_{12}.\tag{17.11}$$

Подчеркнем, что порядок следования S-операторов в их произведениях существен. Оператор $\widehat{S}_{12}\widehat{S}_{23}$, например, сначала заменяет переменные $\tau_1,\ \tau_2,\ \tau_3\ \to\ \tau_1,\ \widetilde{\tau}_2(\tau_2,\tau_3),\ \widetilde{\tau}_3(\tau_2,\tau_3)$, причем функции $\widetilde{\tau}_{2,3}(\tau_2,\tau_3)$ определяются по уравнениям движения взаимодействующих частиц *2* и *3*, а затем переменные $\tau_1,\ \tau_2,\ \tau_3$ подвергаются преобразованию $\tau_1,\ \tau_2,\ \tau_3\ \to\ \widetilde{\tau}_1(\tau_1,\tau_2),\ \widetilde{\tau}_2(\tau_1,\tau_2),\ \tau_3$, где теперь функции $\widetilde{\tau}_{1,2}(\tau_1,\tau_2)$ определяются задачей о движении пары взаимодействующих частиц *1* и *2*.

Подставив теперь (17.10) в (16.7) и перейдя везде от функций $f^{(1)}$ к функциям $f=\mathcal{N}f^{(1)}$, найдем кинетическое уравнение в виде [1])

$$\frac{\partial f(t,\tau_1)}{\partial t}+\mathbf{v}_1\frac{\partial f(t,\tau_1)}{\partial \mathbf{r}_1}=\mathrm{St}^{(2)}f+\mathrm{St}^{(3)}f,\tag{17.12}$$

[1]) Путь для вывода поправочных членов к уравнению Больцмана был намечен уже *Н.Н. Боголюбовым* (1946). Приведение этих членов к окончательному виду осуществлено впервые *Грином* (*M.S. Green*, 1956).

где

$$\mathrm{St}^{(2)} f(t,\tau_1) = \int \frac{\partial U_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} \{\widehat{S}_{12} f(t,\tau_1) f(t,\tau_2)\}\, d\tau_2, \tag{17.13}$$

$$\mathrm{St}^{(3)} f(t,\tau_1) = \\ = \frac{1}{\mathcal{N}} \int \frac{\partial U_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} \{\widehat{R}_{123} f(t,\tau_1) f(t,\tau_2) f(t,\tau_3)\}\, d\tau_2\, d\tau_3. \tag{17.14}$$

Первый из этих интегралов есть интеграл двойных, а второй — тройных столкновений. Рассмотрим их структуру детальнее.

В обоих интегралах в подынтегральных выражениях фигурируют функции f, взятые в различных точках пространства. В интеграле двойных столкновений эффект этой «нелокальности» надо выделить в виде поправки к обычному (больцмановскому) интегралу. Для этого разложим в нем медленно меняющиеся (на расстояниях $\sim d$) функции f по степеням разности $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$.

Поскольку эти функции стоят в подынтегральном выражении под знаком оператора $\widehat{S}_{12}$, рассмотрим сначала величины $\widehat{S}_{12}\mathbf{r}_1$ и $\widehat{S}_{12}\mathbf{r}_2$, в которые этот оператор преобразует переменные $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$. Центр инерции двух частиц $(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$ движется (в задаче двух тел) равномерно; поэтому оператор $\widehat{S}_{12}$ эту сумму не меняет. С учетом этого обстоятельства пишем

$$\widehat{S}_{12}\mathbf{r}_1 = \widehat{S}_{12}\left(\frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2}{2} + \frac{\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2}{2}\right) = \mathbf{r}_1 + \frac{\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1}{2} - \frac{1}{2}\widehat{S}_{12}(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1),$$

$$\widehat{S}_{12}\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \frac{\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1}{2} + \frac{1}{2}\widehat{S}_{12}(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1).$$

Разложив теперь функции

$$\widehat{S}_{12} f(t,\mathbf{r}_1,\mathbf{p}_1) = f(t,\widehat{S}_{12}\mathbf{r}_1,\mathbf{p}_{10}),$$

$$\widehat{S}_{12} f(t,\mathbf{r}_2,\mathbf{p}_2) = f(t,\widehat{S}_{12}\mathbf{r}_2,\mathbf{p}_{20})$$

по $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ с точностью до членов первого порядка, получим

$$\mathrm{St}^{(2)} f = \mathrm{St}_0^{(2)} f + \mathrm{St}_1^{(2)} f, \tag{17.15}$$

где

$$\mathrm{St}_0^{(2)} f(t,\mathbf{r}_1,\mathbf{p}_1) = \int \frac{\partial U_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} \{f(t,\mathbf{r}_1,\mathbf{p}_{10}) f(t,\mathbf{r}_2,\mathbf{p}_{20})\}\, d\tau_2, \tag{17.16}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{St}_1^{(2)} f(t,\mathbf{r}_1,\mathbf{p}_1) = \\ = \frac{1}{2}\int \frac{\partial U_{12}}{\partial \mathbf{r}_1}\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1}\Big\{(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} f(t,\mathbf{r}_1,\mathbf{p}_{10}) f(t,\mathbf{r}_2,\mathbf{p}_{20}) + \\ + \Big[f(t,\mathbf{r}_1,\mathbf{p}_{10})\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} f(t,\mathbf{r}_1,\mathbf{p}_{20}) - f(t,\mathbf{r}_1,\mathbf{p}_{20})\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} f(t,\mathbf{r}_1,\mathbf{p}_{10})\Big] \times \\ \times \widehat{S}_{12}(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\Big\} d\tau_2 \end{aligned} \quad (17.17)$$

(дифференцирования по $\mathbf{r}_1$ производятся при постоянном $\mathbf{p}_{10}$ или $\mathbf{p}_{20}$).

Интеграл (17.16) совпадает с (16.12) [1]; в § 16 было показано, каким образом (путем выполнения одного из трех интегрирований по пространственным координатам) этот интеграл приводится к обычному больцмановскому виду.

Обратимся к интегралу тройных столкновений (17.14). Учет «нелокальности» в этом интеграле был бы превышением над принятой здесь точностью, так как сам этот интеграл уже является малой поправкой. Поэтому в аргументах трех функций f в нем надо положить все радиус-векторы $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ одинаковыми (совпадающими с $\mathbf{r}_1$) и, сверх того, считать, что оператор $\widehat{R}_{123}$ на эти переменные вообще не действует [2]:

$$\begin{aligned}\operatorname{St}^{(3)} f(t,\mathbf{r}_1,\mathbf{p}_1) = \\ = \frac{1}{\mathcal{N}}\int \frac{\partial U_{12}}{\partial \mathbf{r}_1}\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1}\left\{\widehat{R}_{123} f(t,\mathbf{r}_1,\mathbf{p}_1) f(t,\mathbf{r}_1,\mathbf{p}_2) f(t,\mathbf{r}_1,\mathbf{p}_3)\right\} d\tau_2\, d\tau_3. \end{aligned} \quad (17.18)$$

Рассмотрим несколько более детально структуру оператора $\widehat{R}_{123}$ с целью уяснения характера процессов столкновений, учитываемых интегралом (17.18).

Прежде всего, оператор $\widehat{R}_{123}$ (как и оператор $\widehat{G}_{123}$ (17.4)) обращается в нуль, если хотя бы одна из трех частиц не взаимодействует с остальными. В число процессов, для которых $\widehat{R}_{123} \neq 0$, входят, однако, не только тройные (в буквальном смысле этого слова) столкновения, но и совокупности нескольких двойных.

---

[1]) Выражение (17.16) отличается от (16.12) заменой t_0 на t в аргументах функций f. После такой замены, однако, правое равенство (16.13) все равно имеет место, поскольку зависимости от $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ входят только через $\mathbf{p}_{10}$, $\mathbf{p}_{20}$, являющиеся интегралами движения.

[2]) Подчеркнем, во избежание недоразумений, что эти упрощения отнюдь не означают, что подынтегральное выражение вообще перестает зависеть от $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$; зависимость от этих переменных остается через посредство S-операторов, которые превращают импульсы $\mathbf{p}_a$ в функции $\widetilde{\mathbf{p}}_a(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_3,\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3)$.

В истинных тройных столкновениях три частицы одновременно вступают в «сферу взаимодействия», как это схематически изображено на рис. 5 *а*. Но оператор $\widehat{R}_{123}$ отличен от нуля также и для таких процессов «тройных взаимодействий», которые сводятся к трем последовательным двойным столкновениям, причем одна из пар частиц сталкивается между собой дважды; пример такого процесса схематически изображен на рис. 5 *б* (для этого процесса $\widehat{S}_{13} = 1$, так что оператор $\widehat{R}_{123}$ сводится к $\widehat{S}_{123} - \widehat{S}_{12}\widehat{S}_{23}$) [1]. Более того, оператором $\widehat{R}_{123}$ учитываются также и случаи, когда одно (или более) из трех столкновений является «воображаемым», т. е. возникающим, лишь если не учитывать влияния на траекторию частиц какого-либо из реальных столкновений. Пример такого процесса изображен на рис. 5 *в*: столкновение *1–3* имело бы место лишь в отсутствие искажения траектории частицы *3* ее столкновением с частицей *2* [2] (для этого процесса $\widehat{S}_{123} = \widehat{S}_{12}\widehat{S}_{23}$, но $\widehat{S}_{13} \neq 1$, так что $\widehat{R}_{123}$ сводится к $-\widehat{S}_{12}\widehat{S}_{13} + \widehat{S}_{12}$).

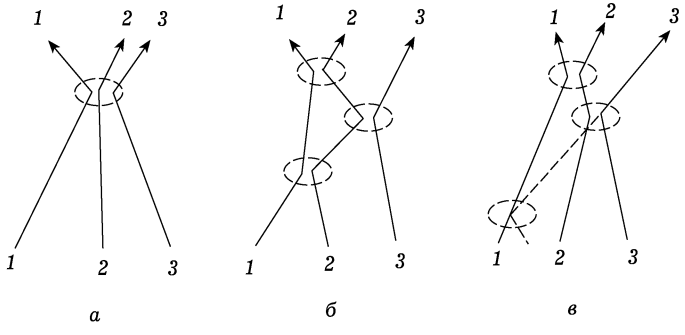


Рис. 5

Подобно тому, как преобразовывался в § 16 интеграл $\mathrm{St}_0^{(2)}$, может быть выполнено одно из шести интегрирований по координатам в интеграле тройных столкновений; при этом потенциал взаимодействия U_{12} в явном виде исчезает из формул [3].

[1]) В то же время оператор $\widehat{R}_{123}$ (в противоположность оператору $\widehat{G}_{123}$!) обращается в нуль для последовательности всего двух столкновений. Так, для процесса, составленного из столкновений *2–3* и *1–2*, было бы $\widehat{S}_{123} = \widehat{S}_{12}\widehat{S}_{23}$, $\widehat{S}_{13} = 1$, так что $\widehat{R}_{123} = 0$.

[2]) Напомним, что по смыслу действия S-операторов надо следить за траекториями частиц по направлению назад во времени!

[3]) Проведение этого преобразования — см. *Green M.S.* — Phys. Rev. 1964. V. 136A. P. 905.

§ 18. Вириальное разложение кинетических коэффициентов

В § 7, 8 было уже указано, что независимость коэффициентов теплопроводности и вязкости от плотности (или давления) газа является следствием учета одних только парных столкновений молекул. Именно для таких столкновений их частота (т. е. число столкновений, испытываемых в 1 с заданной молекулой) пропорциональна плотности N, длина пробега $l \backsim 1/N$, а поскольку η и $\varkappa$ пропорциональны Nl, они оказываются независящими от N. Получающиеся таким образом значения (обозначим их через η_0 и $\varkappa_0$) являются, конечно, лишь первыми членами разложения этих величин по степеням плотности (эти разложения называют *вириальными*). Уже в следующем приближении появляется зависимость от плотности вида

$$\varkappa = \varkappa_0(1 + \alpha N d^3), \quad \eta = \eta_0(1 + \beta N d^3), \tag{18.1}$$

где d — параметр порядка величины молекулярных размеров, а α, β — безразмерные постоянные. Эти первые поправки имеют двоякое происхождение, отраженное в поправочных членах $\mathrm{St}^{(3)}$ и $\mathrm{St}_1^{(2)}$ в кинетическом уравнении. Тройные столкновения (частота которых пропорциональна N^2) приводят к уменьшению длины пробега. Нелокальность же парных столкновений приводит к возможности передачи импульса и энергии через некоторую поверхность без ее фактического пересечения сталкивающимися частицами: частицы сближаются на расстояние $\sim d$ и затем расходятся, оставаясь по разные стороны от поверхности; этот эффект приводит к увеличению потоков импульса и энергии.

Решение задачи о теплопроводности или вязкости с уточненным кинетическим уравнением (17.12) должно строиться по той же схеме, которая была описана в § 6–8. Ищем функцию распределения в виде $f = f_0(1 + \chi/T)$, где f_0 — локально-равновесная функция, а $\chi/T \sim l/L$ — малая добавка. Интеграл тройных столкновений $\mathrm{St}^{(3)}$, как и $\mathrm{St}_0^{(2)}$, обращается в нуль функцией f_0. Поэтому в нем надо удержать член с χ, в результате чего интеграл $\mathrm{St}^{(3)}$ оказывается по отношению к больцмановскому интегралу $\mathrm{St}^{(2)}$ поправкой относительного порядка $\sim (d/\overline{r})^3$. В интеграле же $\mathrm{St}_1^{(2)}$, содержащем пространственные производные функции распределения, достаточно положить $f = f_0$; в этом смысле член $\mathrm{St}_1^{(2)}$ должен быть отнесен к левой части уравнения, в которой он дает поправку того же относительного порядка $\sim (d/\overline{r})^3$. Таким образом, оба дополнительных члена в ки-

нетическом уравнении, $\mathrm{St}^{(3)}$ и $\mathrm{St}_1^{(2)}$, дают вклады одинакового порядка [1]).

Приведем здесь, для справок, результаты решения уточненного кинетического уравнения для теплопроводности и вязкости газа в модели твердых шаров (диаметра d):

$$\varkappa = \varkappa_0(1 + 1,2Nd^3), \quad \eta = \eta_0(1 + 0,35Nd^3), \tag{18.2}$$

где $\varkappa_0$ и η_0 — значения, полученные в задаче 3 § 10 (*J. V. Sengers*, 1966) [2]).

Вводя дальнейшие поправки в кинетическое уравнение (связанное с четверными и т. д. столкновениями), можно было бы в принципе определить и следующие члены вириального разложения кинетических коэффициентов. Существенно, однако, что эти члены уже не будут просто целыми степенями N; функции $\varkappa(N)$ и $\eta(N)$ оказываются неаналитическими в точке $N = 0$. Для выяснения происхождения этой неаналитичности проанализируем вопрос о сходимости интегралов, фигурирующих в излагаемой теории (*E.C. Cohen*, *J.R. Dorfman*, *J. Weinstock*, 1963).

Рассмотрим интеграл в (17.10), определяющий вклад тройных столкновений в двухчастичную функцию распределения. Характер сходимости интеграла оказывается различным для различных типов процессов столкновений, учитываемых оператором $\widehat{R}_{123}$. Рассмотрим для примера процесс типа рис. 5 *б*.

Интегрирование производится по фазовому объему $d\tau_3$ при заданных фазовых точках τ_1 и τ_2. В качестве переменной, по которой интегрирование производится последним, оставим расстояние r_3 частицы *3* (в момент времени t) от точки, где произошло столкновение *2–3*. Перед этим последним интегрированием подынтегральное выражение будет содержать следующие множители: 1) элемент объема по переменной r_3: $r_3^2dr_3$; 2) если следить за движением частицы *3* назад по времени, то будет ясно, что направление ее импульса $\mathbf{p}_3$ должно лежать в определенном элементе телесных углов для того, чтобы могло произойти столкновение *3–2* — угол, под которым область соударения видна с расстояния r_3; отсюда возникает множитель d^2/r_3^2; 3) еще один такой множитель возникает в результате дальней-

---

[1]) Эти соображения разъясняют недоумение, которое могло бы возникнуть в связи с тем, что интеграл $\mathrm{St}_1^{(2)}$ содержит производные $\partial f/\partial \mathbf{r} \sim f/L$, которых нет в интеграле $\mathrm{St}^{(3)}$, и потому, казалось бы, эти два члена представляют собой поправки различного порядка величины.

[2]) Изложение хода соответствующих, весьма трудоемких вычислений можно найти в статье *Зенгерса* в книге: Lectures in theoretical physics, V. IX C, Kinetic Theory (edited by W. Brittin) — N.Y.: Gordon a. Breech, 1967.

шего ограничения возможных направлений импульса $\mathbf{p}_3$, требуемого условием, что «отскочившая» частица *2* должна попасть в сферу соударения с частицей *1*. Таким образом, получается интеграл вида $\int dr_3/r_3^2$, который должен быть взят от расстояния $r_3 \sim d$ до ∞; мы видим, что этот интеграл сходится. Аналогичным образом можно показать, что для процессов столкновения других типов сходимость интеграла оказывается даже более быстрой.

Вклад четверных столкновений выразился бы в (17.10) интегралом аналогичного вида, взятым по фазовому пространству частиц *3* и *4* (снова при заданных τ_1 и τ_2).

Рассмотрим четверное соударение изображенного на рис. 6 типа. Мы снова оставим расстояние r_3 в качестве переменной последнего интегрирования. Отличие от предыдущей оценки связано с наличием интегрирования по $d\tau_4$ в подынтегральном выражении. Очевидно, что это интегрирование дает вклад, пропорциональный сечению рассеяния *1–4*, т. е. $\sim d^2$. (Второе столкновение *1–2*, как и прежде, может быть обеспечено ограничением области интегрирования по направлениям $\mathbf{p}_3$.) Из соображений размерности очевидно тогда, что интегрирование по $d\tau_4$ вносит дополнительный вклад порядка $\overline{p}^3 r_3 d^2$. Интеграл по dr_3 оказывается вида $\int dr_3/r_3$, т. е. логарифмически расходится на верхнем пределе. Обрезая интеграл на некотором расстоянии Λ, получим вклад в функцию $f^{(2)}$, содержащий большой логарифм $\ln(\Lambda/d)$. Этот логарифм войдет соответственно и в поправку к кинетическим коэффициентам, которая окажется пропорциональной не $(Nd^3)^2$, а $(Nd^3)^2 \ln(\Lambda/d)$.

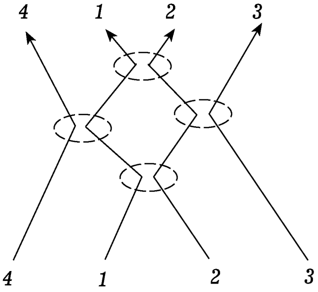


Рис. 6

Появление расходящихся членов означает, что четверные столкновения нельзя рассматривать отдельно от столкновений всех более высоких порядков (пятерных и т. д.). Действительно, расходимость показывает, что существенны большие r_4. Но уже при $r_4 \sim l$ частица *4* может столкнуться с какой-либо частицей *5*, и т. д. Отсюда становится ясным путь устранения расходимости: в выражении для функции $f^{(2)}(t, \tau_1, \tau_2)$ надо учесть члены со столкновениями всех порядков, оставив в каждом порядке наиболее быстро расходящиеся интегралы. Такое суммирование может быть произведено и приводит к результату, который можно было ожидать: произвольный большой параметр Λ

под знаком логарифма заменяется на величину порядка длины пробега $l \sim 1/(Nd^2)$ [1]).

Таким образом, разложение кинетических коэффициентов имеет вид

$$\varkappa = \varkappa_0 \left[1 + \alpha_1 N d^3 + \alpha_2 (N d^3)^2 \ln \frac{1}{N d^3} + \ldots\right] \tag{18.3}$$

(и аналогично для η).

§ 19. Флуктуации функции распределения в равновесном газе

Определяемая кинетическим уравнением функция распределения (которую мы будем обозначать в этом и следующем параграфах как $\overline{f}$) дает средние числа молекул, находящихся в элементах фазового объема $d^3x\, d\Gamma$; для статистически равновесного газа функция $\overline{f}(\Gamma)$ есть независящая от времени и (если нет внешнего поля) от координат $\mathbf{r}$ больцмановская функция распределения f_0 (6.7). Естественно возникает вопрос о флуктуациях, испытываемых точной, микроскопической функцией распределения $f(t, \mathbf{r}, \Gamma)$ в ходе ее изменения со временем при движении частиц газа по их точным уравнениям движения [2]).

Введем *корреляционную функцию флуктуаций* (или, как говорят короче, *коррелятор*)

$$\langle \delta f(t_1, \mathbf{r}_1, \Gamma_1) \delta f(t_2, \mathbf{r}_2, \Gamma_2) \rangle, \tag{19.1}$$

где $\delta f = f - \overline{f}$. В равновесном газе эта функция зависит только от разности времен $t = t_1 - t_2$; усреднение производится по одному из моментов t_1, t_2 при заданном значении их разности. Ввиду однородности газа, в виде разности $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ входят в коррелятор также и координаты точек $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$. Поэтому можно, условно положив t_2 и $\mathbf{r}_2$ равными нулю, представить коррелятор в виде

$$\langle \delta f(t, \mathbf{r}, \Gamma_1) \delta f(0, 0, \Gamma_2) \rangle. \tag{19.2}$$

Ввиду изотропии газа, зависимость этой функции от $\mathbf{r}$ фактически сводится к зависимости от абсолютной величины r.

Если функция (19.2) известна, то ее интегрированием можно найти также и коррелятор плотности числа частиц:

$$\langle \delta N(t, \mathbf{r}) \delta N(0, 0) \rangle = \int \langle \delta f(t, \mathbf{r}, \Gamma_1) \delta f(0, 0, \Gamma_2) \rangle \, d\Gamma_1 \, d\Gamma_2. \tag{19.3}$$

---

[1]) См. *Kawasaki K.*, *Oppenheim I.* — Phys. Rev. 1965. V. 139A. P. 1763.

[2]) Этот вопрос впервые рассматривался *Б.Б. Кадомцевым* (1957).

Для расстояний r, больших по сравнению с длиной пробега l, коррелятор плотности можно вычислить с помощью гидродинамической теории флуктуаций (см. IX, § 88). На расстояниях же $\lesssim l$ требуется кинетическое рассмотрение.

Непосредственно из определения (19.1) очевидно, что

$$\langle \delta f(t,\mathbf{r},\Gamma_1)\delta f(0,0,\Gamma_2)\rangle = \langle \delta f(-t,-\mathbf{r},\Gamma_2)\delta f(0,0,\Gamma_1)\rangle. \qquad (19.4)$$

Корреляционная функция обладает также и более глубокой симметрией, выражающей симметрию равновесного состояния системы по отношению к обращению времени. Обращение времени заменяет более поздний момент времени t на более ранний $-t$, а также меняет значения величин Γ на обращенные Γ^T. Указанная симметрия выражается поэтому равенством

$$\langle \delta f(t,\mathbf{r},\Gamma_1)\delta f(0,0,\Gamma_2)\rangle = \langle \delta f(-t,\mathbf{r},\Gamma_1^T)\delta f(0,0,\Gamma_2^T)\rangle. \qquad (19.5)$$

При $t=0$ функция (19.2) связывает флуктуации в различных точках фазового пространства в один и тот же момент времени. Но корреляции между одновременными флуктуациями распространяются лишь на расстоянии порядка величины радиуса действия молекулярных сил. Между тем в рассматриваемой теории такие расстояния рассматриваются как равные нулю и, таким образом, одновременный коррелятор обращается в нуль. Подчеркнем, что это обстоятельство связано именно с равновесностью состояния, относительно которого рассматриваются флуктуации. В неравновесном случае, как мы увидим в следующем параграфе, одновременные флуктуации тоже коррелированы.

В отсутствие корреляции на отличных от нуля расстояниях одновременный коррелятор сводится к δ-функциям, причем коэффициент при этих функциях определяет средний квадрат флуктуации в одной точке фазового пространства (ср. IX, § 88). В идеальном равновесном газе средний квадрат флуктуации функции распределения совпадает со средним значением самой этой функции (см. V, § 113) и, таким образом,

$$\langle \delta f(0,\mathbf{r},\Gamma_1)\delta f(0,0,\Gamma_2)\rangle = \overline{f}(\Gamma_1)\delta(\mathbf{r})\delta(\Gamma_1-\Gamma_2). \qquad (19.6)$$

Неодновременная же корреляция между флуктуациями в различных точках существует уже и в теории, пренебрегающей молекулярными размерами. Необходимость возникновения этой корреляции очевидна уже из того, что частицы, участвующие в определенный момент во флуктуации в некотором месте фазового пространства, в следующие моменты будут уже находиться в других местах.

Задача о вычислении коррелятора при $t \neq 0$ не может быть решена в общем виде, но может быть сведена к решению опре-

деленных уравнений. Для этого надо вспомнить следующее положение общей теории квазистационарных флуктуаций (см. V, § 118, 119).

Пусть $x_a(t)$ — флуктуирующие величины (с равными нулю средними значениями). Предполагается, что если система находится в неравновесном состоянии со значениями x_a, выходящими за пределы их средних флуктуаций (но все же малыми), то процесс релаксации системы к равновесию описывается линейными «уравнениями движения» вида

$$\dot{x}_a = -\sum_b \lambda_{ab} x_b \tag{19.7}$$

с постоянными коэффициентами λ_{ab}. Тогда можно утверждать, что корреляторы величин x_a удовлетворяют таким же уравнениям

$$\frac{d}{dt}\langle x_a(t)x_c(0)\rangle = -\sum_b \lambda_{ab}\langle x_b(t)x_c(0)\rangle, \qquad t>0 \tag{19.8}$$

(индекс c в этой системе уравнений свободный). Решив эти уравнения при $t > 0$, найдем затем значения функций при $t < 0$ согласно свойству симметрии

$$\langle x_a(t)x_b(0)\rangle = \langle x_b(-t)x_a(0)\rangle, \tag{19.9}$$

являющемуся следствием определения корреляторов.

В данном случае роль уравнений движения (19.7) играет линеаризованное уравнение Больцмана для малой добавки δf к равновесной функции распределения $\overline{f}$. Таким образом, коррелятор функции распределения должен удовлетворять интегро-дифференциальному уравнению

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_1\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \widehat{I}_1\right)\langle \delta f(t,\mathbf{r},\Gamma_1)\delta f(0,0,\Gamma_2)\rangle = 0 \text{ при } t>0, \tag{19.10}$$

где $\widehat{I}_1$ — линейный интегральный оператор, действующий на переменные Γ_1 в следующей за ним функции согласно определению:

$$\widehat{I}_1 g(\Gamma_1) = \int w(\Gamma_1,\Gamma;\Gamma_1',\Gamma')[\overline{f}_1'g_1' + \overline{f}'g' - \overline{f}_1 g_1 - \overline{f}g]\,d\Gamma\,d\Gamma_1'\,d\Gamma'. \tag{19.11}$$

Переменные же Γ_2 в уравнении (19.10) — свободные. Начальным условием для уравнения служит значение (19.6) коррелятора при $t = 0$, а коррелятор при $t < 0$ определяется затем равенством (19.4) (условие же (19.5) удовлетворяется в результате автоматически). Формулы (19.10), (19.11), (19.4) и дают ту совокупность уравнений, которые в принципе достаточны для полного определения коррелятора.

Обычно представляет интерес не сам коррелятор, а его фурье-образ по координатам и времени, который мы обозначим символом $(\delta f_1 \delta f_2)_{\omega\mathbf{k}}$, где индексы 1 и 2 обозначают аргументы Γ_1 и Γ_2:

$$(\delta f_1 \delta f_2)_{\omega\mathbf{k}} = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int \langle \delta f(t, \mathbf{r}, \Gamma_1) \delta f(0, 0, \Gamma_2) \rangle e^{-i(\mathbf{kr} - \omega t)}\, d^3x \tag{19.12}$$

(*спектральная функция флуктуаций*, или *спектральный коррелятор*). Если флуктуирующую функцию разложить в интеграл Фурье по времени и координатам, то среднее значение произведений ее фурье-компонент связано со спектральным коррелятором формулой

$$\langle \delta f_{\omega\mathbf{k}}(\Gamma_1) \delta f_{\omega'\mathbf{k}'}(\Gamma_2) \rangle = (2\pi)^4 \delta(\omega + \omega') \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}')(\delta f_1 \delta f_2)_{\omega\mathbf{k}} \tag{19.13}$$

(ср. V, § 122).

Легко написать уравнение, которое позволяет в принципе определить спектральную функцию флуктуаций без предварительного вычисления пространственно-временного коррелятора.

Разбив область интегрирования по t в (19.12) на две части (от $-\infty$ до 0 и от 0 до ∞) и используя (19.4), получим

$$(\delta f_1 \delta f_2)_{\omega\mathbf{k}} = (\delta f_1 \delta f_2)^{(+)}_{\omega\mathbf{k}} + (\delta f_2 \delta f_1)^{(+)}_{-\omega -\mathbf{k}}, \tag{19.14}$$

где

$$(\delta f_1 \delta f_2)^{(+)}_{\omega\mathbf{k}} = \int_0^{\infty} dt \int \langle \delta f(t, \mathbf{r}, \Gamma_1) \delta f(0, 0, \Gamma_2) \rangle e^{-i(\mathbf{kr} - \omega t)}\, d^3x. \tag{19.15}$$

Совершим над уравнением (19.10) одностороннее преобразование Фурье (19.15). При этом члены с производными по t и по $\mathbf{r}$ интегрируем по частям, учитывая, что коррелятор должен стремиться к нулю при $\mathbf{r} \to \infty$ и при $t \to \infty$, а при $t = 0$ должен даваться формулой (19.6). В результате получим искомое уравнение в виде

$$[i(\mathbf{kv}_1 - \omega) - \widehat{I}_1](\delta f_1 \delta f_2)^{(+)}_{\omega\mathbf{k}} = \overline{f}(\Gamma_1) \delta(\Gamma_1 - \Gamma_2). \tag{19.16}$$

Если интересоваться не флуктуациями самой функции распределения, а лишь флуктуациями плотности газа, целесообразно проинтегрировать уравнение (19.16) по $d\Gamma_2$:

$$[i(\mathbf{kv} - \omega) - \widehat{I}](\delta f(\Gamma) \delta N)^{(+)}_{\omega\mathbf{k}} = \overline{f}(\Gamma). \tag{19.17}$$

Искомая же спектральная функция $(\delta N^2)_{\omega\mathbf{k}}$ получается из решения этого уравнения однократным (а не двукратным, как в (19.3)) интегрированием.

Другой способ нахождения $(\delta N^2)_{\omega\mathbf{k}}$ основан на связи коррелятора плотности с обобщенной восприимчивостью по отношению к слабому внешнему полю вида

$$U(t,\mathbf{r}) = U_{\omega\mathbf{k}}e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)} \tag{19.18}$$

(см. IX, § 86) [1]). Если под влиянием этого поля возникает изменение плотности

$$\delta N_{\omega\mathbf{k}} = \alpha(\omega,\mathbf{k})U_{\omega\mathbf{k}}, \tag{19.19}$$

то (согласно IX, (86.20)) в классическом пределе спектральный коррелятор плотности

$$(\delta N^2)_{\omega\mathbf{k}} = \frac{2T}{\omega}\operatorname{Im}\alpha(\omega,\mathbf{k}). \tag{19.20}$$

Пусть $\delta f(t,\mathbf{r})$ — изменение функции распределения под влиянием этого же поля. Оно удовлетворяет кинетическому уравнению

$$\frac{\partial\delta f}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial\delta f}{\partial\mathbf{r}} - \frac{\partial U}{\partial\mathbf{r}}\frac{\partial\overline{f}}{\partial\mathbf{v}} = \widehat{I}\delta f.$$

Фурье-компоненты функции $\delta f(t,\mathbf{r},\Gamma)$ запишем в виде

$$f_{\omega\mathbf{k}}(\Gamma) = \chi_{\omega\mathbf{k}}(\Gamma)U_{\omega\mathbf{k}},$$

выделив в них внешнее поле. Тогда для $\chi_{\omega\mathbf{k}}$ имеем уравнение

$$[i(\mathbf{kv}-\omega) - \widehat{I}]\chi_{\omega\mathbf{k}}(\Gamma) = i\mathbf{k}\frac{\partial\overline{f}}{\partial\mathbf{v}}. \tag{19.21}$$

По решению этого уравнения искомый спектральный коррелятор определяется однократным интегрированием:

$$(\delta N^2)_{\omega\mathbf{k}} = \frac{2T}{\omega}\operatorname{Im}\int\chi_{\omega\mathbf{k}}(\Gamma)\,d\Gamma. \tag{19.22}$$

Задачи

1. Определить коррелятор плотности в равновесном одноатомном газе в пренебрежении столкновениями.

Решение. Для одноатомного газа величинами Γ являются три компоненты импульса $\mathbf{p}$. Решение уравнения (19.10) при $\widehat{I}_1 = 0$:

$$\langle\delta f(t,\mathbf{r},\mathbf{p}_1)\delta f(0,0,\mathbf{p}_2)\rangle = \overline{f}(\mathbf{p}_1)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{v}_1t)\delta(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2).$$

Его фурье-компонента:

$$(\delta f_1\delta f_2)_{\omega\mathbf{k}} = 2\pi\overline{f}(\mathbf{p}_1)\delta(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)\delta(\omega-\mathbf{kv}_1).$$

Интегрирование этих выражений (с максвелловской функцией $\overline{f}$) дает для коррелятора плотности:

$$\langle\delta N(t,\mathbf{r})\delta N(0,0)\rangle = \overline{N}\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2}\frac{1}{t^3}\exp\left(-\frac{mr^2}{2Tt^2}\right), \tag{1}$$

$$(\delta N^2)_{\omega\mathbf{k}} = \frac{\overline{N}}{k}\left(\frac{2\pi m}{T}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{m\omega^2}{2Tk^2}\right). \tag{2}$$

---

[1]) Подчеркнем, что эта связь существует только в равновесном случае.

2. То же для интеграла столкновений вида $\widehat{I}_1 g = -g/\tau$ с постоянным временем τ.

Решение. Уравнение (19.16) сводится к алгебраическому. Определив из него $(\delta f_1 \delta f_2)^{(+)}_{\omega\mathbf{k}}$, найдем затем по (19.14):

$$(\delta f_1 \delta f_2)_{\omega\mathbf{k}} = \frac{2\tau \overline{f}(\mathbf{p}_1)}{1 + \tau^2(\mathbf{k}\mathbf{v}_1 - \omega)^2}\,\delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2). \tag{3}$$

Отметим, что наличие даже малого числа столкновений меняет асимптотическое поведение спектрального коррелятора плотности при больших частотах, $\omega \gg k\overline{v}$, т. е. для флуктуаций с фазовой скоростью, много большей тепловой скорости молекул. Действительно, в этом пределе

$$(\delta N^2)_{\omega\mathbf{k}} = \frac{2\overline{N}}{\tau\omega^2}, \tag{4}$$

т. е. коррелятор убывает с увеличением частоты по степенному закону вместо экспоненциального в (2).

§ 20. Флуктуации функции распределения в неравновесном газе

Пусть газ находится в стационарном, но неравновесном состоянии с некоторой функцией распределения $\overline{f}(\mathbf{r}, \Gamma)$, удовлетворяющей кинетическому уравнению

$$\mathbf{v}\frac{\partial \overline{f}}{\partial \mathbf{r}} = \mathrm{St}\,\overline{f}. \tag{20.1}$$

Функция $\overline{f}$ может сильно отличаться от равновесной функции распределения f_0, так что интеграл столкновений $\mathrm{St}\,\overline{f}$ не предполагается линеаризованным по разности $\overline{f} - f_0$. Стационарное неравновесное состояние должно поддерживаться в газе внешними воздействиями: в газе может иметься поддерживаемый внешними источниками градиент температуры, газ может совершать стационарное движение (не сводящееся к движению как целого) и т. п.

Поставим задачу о вычислении флуктуаций функции распределения $f(t, \mathbf{r}, \Gamma)$ относительно $\overline{f}(\mathbf{r}, \Gamma)$. Эти флуктуации будут снова характеризоваться коррелятором (19.1), в котором усреднение производится обычным образом по времени при заданной разности $t = t_1 - t_2$, и коррелятор зависит только от t. Ввиду неоднородности распределения $\overline{f}(\mathbf{r}, \Gamma)$, однако, коррелятор будет зависеть теперь от координат $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ по отдельности, а не только от их разности. Свойство (19.4) запишется теперь в виде

$$\langle \delta f_1(t) \delta f_2(0) \rangle = \langle \delta f_2(-t) \delta f_1(0) \rangle, \tag{20.2}$$

где

$$f_1(t) \equiv f(t, \mathbf{r}_1, \Gamma_1), \quad f_2(0) \equiv f(0, \mathbf{r}_2, \Gamma_2).$$

Соотношение же (19.5), связанное с обращением времени, в неравновесном случае, вообще говоря, отсутствует.

Коррелятор функции распределения по-прежнему удовлетворяет тому же уравнению (19.10):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} - \widehat{I}_1\right) \langle \delta f_1(t) \delta f_2(0) \rangle = 0, \tag{20.3}$$

где $\widehat{I}_1$ — линейный интегральный оператор (19.11), действующий на переменные Γ_1 [1]). Вопрос же о начальном условии к этому уравнению, т. е. о виде одновременного коррелятора, значительно более сложен, чем в равновесном случае, где он давался просто выражением (19.6). В неравновесном газе одновременный коррелятор сам определяется из некоторого кинетического уравнения, вид которого можно установить, воспользовавшись связью корреляционной функции с двухчастичной функцией распределения $\overline{f}^{(2)}$, введенной в § 16. В стационарном состоянии функция $\overline{f}^{(2)}(\mathbf{r}_1, \Gamma_1; \mathbf{r}_2, \Gamma_2)$, как и $\overline{f}(\mathbf{r}, \Gamma)$, не зависит явно от времени.

Для вывода этой связи замечаем, что ввиду бесконечной малости фазового объема $d\tau = d^3x\, d\Gamma$ в нем может находиться одновременно не более одной частицы [2]). Поэтому среднее число $\overline{f}\, d\tau$ есть в то же время вероятность частице находиться в элементе $d\tau$ (вероятность же нахождения в нем сразу двух частиц есть величина более высокого порядка малости). Отсюда же следует, что среднее значение произведения чисел частиц в двух элементах $d\tau_1$ и $d\tau_2$ совпадает с вероятностью одновременного нахождения в каждом из них по одной частице. Для заданной пары частиц это есть, по определению двухчастичной функции распределения, произведение $\overline{f}^{(2)}_{12}\, d\tau_1\, d\tau_2$. Но поскольку пара частиц может быть выбрана из (очень большого) полного числа частиц $\mathcal{N}(\mathcal{N}-1) \approx \mathcal{N}^2$ способами, то

$$\langle f_1\, d\tau_1 \cdot f_2\, d\tau_2 \rangle = \mathcal{N}^2 \overline{f}^{(2)}_{12}\, d\tau_1\, d\tau_2.$$

Получающееся таким образом равенство $\langle f_1 f_2 \rangle = \mathcal{N}^2 \overline{f}^{(2)}_{12}$ относится, однако, лишь к различным точкам фазового пространства. Переход же к пределу $\mathbf{r}_1$, $\Gamma_1 \to \mathbf{r}_2$, Γ_2 требует учета того, что если $d\tau_1$ и $d\tau_2$ совпадают, то атом, находящийся в $d\tau_1$, тем самым находится и в $d\tau_2$. Соотношение, учитывающее это обстоятельство, имеет вид

$$\langle f_1 f_2 \rangle = \mathcal{N}^2 \overline{f}^{(2)}_{12} + \overline{f}_1 \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \delta(\Gamma_1 - \Gamma_2). \tag{20.4}$$

[1]) Использование этого уравнения в неравновесном случае введено *Лаксом* (*M. Lax*, 1966).

[2]) Следующий ниже вывод — перефразировка рассуждений из V, § 116.

Действительно, умножим это равенство на $d\tau_1\, d\tau_2$ и проинтегрируем по некоторому малому объему $\Delta\tau$. Первый член справа дает при этом малую величину второго порядка ($\sim (\Delta\tau)^2$); член же с δ-функциями дает $\overline{f}\Delta\tau$, т. е. величину первого порядка. Мы получим, следовательно,

$$\left\langle \left(\int\limits_{\Delta\tau} f\, d\tau\right)^2 \right\rangle = \overline{f}\Delta\tau,$$

как и должно быть, принимая во внимание, что с точностью до величин первого порядка в малом объеме $\Delta\tau$ может находиться лишь 0 или 1 частица.

Подставив (20.4) в определение одновременного коррелятора

$$\langle \delta f_1(0)\delta f_2(0)\rangle = \langle f_1(0) f_2(0)\rangle - \overline{f}_1\overline{f}_2,$$

получим искомую связь между ним и двухчастичной функцией распределения:

$$\langle \delta f_1(0)\delta f_2(0)\rangle = \mathcal{N}^2\overline{f}^{(2)}_{12} - \overline{f}_1\overline{f}_2 + \overline{f}_1\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\delta(\Gamma_1 - \Gamma_2). \tag{20.5}$$

В равновесном идеальном газе двухчастичная функция распределения сводится к произведению $\overline{f}^{(2)}_{12} = \overline{f}_1\overline{f}_2/\mathcal{N}^2$, и тогда (20.5) сводится к (19.6). В любом случае $\overline{f}^{(2)}_{12}$ стремится к указанному произведению при увеличении расстояния между точками *1* и *2*, так что

$$\langle \delta f_1(0)\delta f_2(0)\rangle \to 0 \ \text{ при } \ |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \to \infty. \tag{20.6}$$

Двухчастичная функция распределения удовлетворяет кинетическому уравнению, аналогичному уравнению Больцмана. Это уравнение можно было бы вывести из уравнения (16.9) для $\overline{f}^{(2)}$, подобно тому, как уравнение для одночастичной функции было выведено из (16.7) [1]). Мы, однако, дадим здесь вывод уравнения для $\overline{f}^{(2)}$, аналогичный основанному на наглядных физических соображениях выводу уравнения Больцмана в § 3.

Будем рассматривать в качестве неизвестной не самую функцию $\overline{f}^{(2)}$, а разность

$$\varphi(\mathbf{r}_1, \Gamma_1; \mathbf{r}_2, \Gamma_2) = \mathcal{N}^2\overline{f}^{(2)}_{12} - \overline{f}_1\overline{f}_2, \tag{20.7}$$

обращающуюся в нуль при $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \to \infty$ (коррелятор (20.5) без последнего члена). Эта величина является малой в обычном

---

[1]) В § 17 уравнение (16.9) использовалось лишь для специфической цели — для исключения $\overline{f}^{(2)}$ из уравнения для $\overline{f}$.

в теории флуктуаций смысле — порядка $1/\mathcal{N}$ по сравнению с $\overline{f}_1\overline{f}_2$.

В отсутствие столкновений функция φ удовлетворяет уравнению, выражающему собой просто теорему Лиувилля — постоянство $\overline{f}^{(2)}$ вдоль фазовой траектории пары частиц:

$$\frac{d\overline{f}^{(2)}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} = \mathbf{v}_1\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{r}_1} + \mathbf{v}_2\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{r}_2} = 0. \tag{20.8}$$

Изменение же φ за счет столкновений связано с процессами двоякого рода.

Столкновения частиц *1* и *2* со всеми остальными частицами, но не друг с другом, приводят к появлению в правой части уравнения (20.8) членов $\widehat{I}_1\varphi + \widehat{I}_2\varphi$, где $\widehat{I}_1$ и $\widehat{I}_2$ — линейные интегральные операторы (19.11), действующие соответственно на переменные Γ_1 и Γ_2.

Столкновения же частиц *1* и *2* друг с другом играют особую роль; они приводят к одновременному «перескоку» обеих частиц *1* и *2* из одной пары точек фазового пространства в другую. В точности те же соображения, что и при выводе (3.7), дают в правой части (20.8) член вида $\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\,\mathrm{St}_{12}\overline{f}$, где

$$\mathrm{St}_{12}\overline{f} = \int w(\Gamma_1, \Gamma_2; \Gamma_1'\Gamma_2')(\overline{f}_1'\overline{f}_2' - \overline{f}_1\overline{f}_2)\,d\Gamma_1'\,d\Gamma_2' \tag{20.9}$$

(в этом интеграле флуктуациями можно пренебречь); множитель $\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ выражает тот факт, что столкновения испытывают частицы, находящиеся в одной точке пространства[1]).

Окончательно приходим к следующему уравнению:

$$\mathbf{v}_1\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{r}_1} + \mathbf{v}_2\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{r}_2} - \widehat{I}_1\varphi - \widehat{I}_2\varphi = \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\,\mathrm{St}_{12}\overline{f}. \tag{20.10}$$

Решив это уравнение, мы получим согласно (20.5) функцию, играющую роль начального условия к уравнению (20.3) при $t = 0$[2]). Без правой части однородное уравнение (20.10) имеет решение

$$\varphi = f_{01}\Delta f_{02} + f_{02}\Delta f_{01}, \quad \Delta f_0 = \frac{\partial f_0}{\partial\mathcal{N}}\Delta\mathcal{N} + \frac{\partial f_0}{\partial T}\Delta T + \frac{\partial f_0}{\partial\mathbf{v}}\Delta\mathbf{V}, \tag{20.11}$$

отвечающее произвольным малым изменениям числа частиц, температуры и макроскопической скорости в равновесном распределении f_0.

---

[1]) Если проинтегрировать интеграл (20.9) еще и по $d\Gamma_2$, то получится обычный интеграл столкновений Больцмана.

[2]) Этот результат принадлежит *С.В. Ганцевичу*, *В.Л. Гуревичу* и *Р. Катилюсу* (1969) и *Ш.М. Когану* и *А.Я. Шульману* (1969).

Это «паразитное» решение, однако, исключается условием $\varphi \to 0$ при $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \to \infty$. Поэтому в равновесном случае, когда интеграл St_{12} тождественно обращается в нуль, из уравнения (20.10) следует $\varphi = 0$ и мы возвращаемся к начальному условию (19.6).

Правая часть уравнения (20.10), т. е. парные столкновения между частицами в заданных состояниях Γ_1 и Γ_2, является, таким образом, источником одновременной корреляции флуктуаций в неравновесном газе. Приводя к одновременному изменению чисел заполнения двух состояний, парные столкновения порождают корреляцию между этими числами. В равновесном состоянии, ввиду точной компенсации прямых и обратных парных столкновений, этот механизм неэффективен и одновременные корреляции отсутствуют.

Если распределение $\overline{f}$ не зависит от координат $\mathbf{r}$ (как это может быть при поддержании неравновесности внешним полем), то можно поставить вопрос о флуктуациях функции распределения, усредненной по всему объему газа, т. е. о флуктуациях функции

$$f(t,\Gamma) = \frac{1}{\mathcal{V}} \int f(t,\mathbf{r},\Gamma)\, d^3x \qquad (20.12)$$

(которую мы обозначим той же буквой f, но без аргумента $\mathbf{r}$). Соответствующая корреляционная функция удовлетворяет уравнению, отличающемуся от (20.3) отсутствием члена с производной по координатам:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{F}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} - \widehat{I}_1\right) \langle \delta f(t,\Gamma_1)\delta f(0,\Gamma_2)\rangle = 0 \quad \text{при} \quad t > 0; \qquad (20.13)$$

в левой части добавлен член, связанный с силой $\mathbf{F}$, действующей на частицы во внешнем поле. Одновременный же коррелятор

$$\begin{aligned}\langle \delta f(0,\Gamma_1)\delta f(0,\Gamma_2)\rangle &= \\ &= \mathcal{N}^2 \overline{f}^{(2)}(\Gamma_1,\Gamma_2) - \overline{f}(\Gamma_1)\overline{f}(\Gamma_2) + \frac{\overline{f}(\Gamma_1)}{\mathcal{V}}\delta(\Gamma_1 - \Gamma_2) \equiv \\ &\equiv \varphi(\Gamma_1,\Gamma_2) + \frac{\overline{f}(\Gamma_1)}{\mathcal{V}}\delta(\Gamma_1 - \Gamma_2) \qquad (20.14)\end{aligned}$$

удовлетворяет уравнению

$$\left[\mathbf{F}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} + \mathbf{F}_2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_2} - (\widehat{I}_1 + \widehat{I}_2)\right] \varphi(\Gamma_1,\Gamma_2) = \mathrm{St}_{12}\, \varphi(\Gamma_1,\Gamma_2). \qquad (20.15)$$

Если газ находится в замкнутом сосуде, то это уравнение должно решаться при дополнительном условии, выражающем собой

заданность (т. е. отсутствие флуктуаций) полного числа частиц в газе:

$$\int \langle \delta f(0,\Gamma_1)\delta f(0,\Gamma_2)\rangle \, d\Gamma_1 = \int \langle \delta f(0,\Gamma_1)\delta f(0,\Gamma_2)\rangle \, d\Gamma_2 = 0. \quad (20.16)$$

Это условие должно выполняться и в равновесном случае. Между тем выражение $\overline{f}(\Gamma_1)\delta(\Gamma_1 - \Gamma_2)/\mathcal{V}$, соответствующее коррелятору (19.6), ему не удовлетворяет. Правильное выражение можно получить за счет произвола (20.11); подобрав должным образом параметр $\Delta\mathcal{N}$, получим

$$\langle \delta f(0,\Gamma_1)\delta f(0,\Gamma_2)\rangle = \frac{1}{\mathcal{V}}\overline{f}(\Gamma_1)\delta(\Gamma_1 - \Gamma_2) - \frac{1}{\mathcal{N}}\overline{f}(\Gamma_1)\overline{f}(\Gamma_2). \quad (20.17)$$

Отметим, что этот коррелятор содержит также и не δ-функционный член.

ГЛАВА II

ДИФФУЗИОННОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

§ 21. Уравнение Фоккера–Планка

Значительную категорию кинетических явлений составляют процессы, в которых средние изменения величин (от которых зависит функция распределения) в каждом элементарном акте малы по сравнению с их характерными значениями. Времена релаксации таких процессов велики по сравнению с временами элементарных актов, составляющих их микроскопический механизм; в этом смысле такие процессы можно назвать медленными.

Типичный пример такого рода дает задача о релаксации по импульсам небольшой примеси тяжелого газа в легком (который сам по себе предполагается находящимся в равновесии). Ввиду малой концентрации тяжелых частиц, их столкновениями друг с другом можно пренебречь и рассматривать их столкновения лишь с частицами основного (легкого) газа. Но при столкновении тяжелой частицы с легкими ее импульс испытывает лишь относительно малое изменение.

Будем для определенности говорить именно об этом примере и выведем кинетическое уравнение, которому удовлетворяет в таком случае функция распределения частиц примеси по импульсам, $f(t, \mathbf{p})$.

Обозначим через $w(\mathbf{p}, \mathbf{q})\, d^3q$ отнесенную к единице времени вероятность изменения импульса $\mathbf{p} \to \mathbf{p} - \mathbf{q}$ тяжелой частицы при элементарном акте — ее столкновении с легкой частицей. Тогда кинетическое уравнение для функции $f(t, \mathbf{p})$ запишется в виде

$$\frac{\partial f(t, \mathbf{p})}{\partial t} = \int \{w(\mathbf{p} + \mathbf{q}, \mathbf{q}) f(t, \mathbf{p} + \mathbf{q}) - w(\mathbf{p}, \mathbf{q}) f(t, \mathbf{p})\}\, d^3q, \qquad (21.1)$$

где справа стоит разность между числом частиц, поступающих (в 1 с) в заданный элемент импульсного пространства d^3p и покидающих его за то же время. Согласно сделанным предположениям, функция $w(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ быстро убывает с увеличением $\mathbf{q}$, так что основную роль в интеграле играют значения $\mathbf{q}$, малые по сравнению со средним импульсом частиц. Это обстоятельство позво-

ляет произвести в подынтегральном выражении разложение

$$w(\mathbf{p}+\mathbf{q},\mathbf{q})f(t,\mathbf{p}+\mathbf{q}) \approx w(\mathbf{p},\mathbf{q})f(t,\mathbf{p}) + \\ + \mathbf{q}\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} w(\mathbf{p},\mathbf{q})f(t,\mathbf{p}) + \frac{1}{2} q_\alpha q_\beta \frac{\partial^2}{\partial p_\alpha\, \partial p_\beta} w(\mathbf{p},\mathbf{q})f(t,\mathbf{p}).$$

В результате кинетическое уравнение примет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial p_\alpha}\left\{ \widetilde{A}_\alpha f + \frac{\partial}{\partial p_\beta}(B_{\alpha\beta} f)\right\}, \tag{21.2}$$

где

$$\widetilde{A}_\alpha = \int q_\alpha w(\mathbf{p},\mathbf{q})\, d^3q, \quad B_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\int q_\alpha q_\beta w(\mathbf{p},\mathbf{q})\, d^3q. \tag{21.3}$$

Таким образом, кинетическое уравнение из интегро-дифференциального становится дифференциальным. Величины $\widetilde{A}_\alpha$ и $B_{\alpha\beta}$ можно записать в символическом виде, более ясно выражающем их смысл:

$$\widetilde{A}_\alpha = \frac{\sum q_\alpha}{\delta t}, \quad B_{\alpha\beta} = \frac{\sum q_\alpha q_\beta}{2\delta t}, \tag{21.4}$$

где знак $\sum$ означает суммирование по (большому) числу столкновений, происходящих за время δt.

Выражение в правой части (21.2) имеет вид дивергенции в импульсном пространстве, $-\partial s_\alpha/\partial p_\alpha$, от вектора

$$s_\alpha = -\widetilde{A}_\alpha f - \frac{\partial}{\partial p_\beta}(B_{\alpha\beta} f) = -A_\alpha f - B_{\alpha\beta}\frac{\partial f}{\partial p_\beta}, \quad A_\alpha = \widetilde{A}_\alpha + \frac{\partial B_{\alpha\beta}}{\partial p_\beta}. \tag{21.5}$$

Другими словами, (21.2) имеет, как и следовало, вид уравнения непрерывности в импульсном пространстве; тем самым автоматически соблюдается сохранение числа частиц при процессе. Вектор же $\mathbf{s}$ является плотностью потока частиц в импульсном пространстве.

Согласно формулам (21.4) коэффициенты в кинетическом уравнении выражаются через средние характеристики столкновений, и в этом смысле их вычисление представляет собой механическую задачу. Фактически, однако, нет необходимости в раздельном вычислении коэффициентов A_α и $B_{\alpha\beta}$; они могут быть выражены друг через друга из условия обращения потока в нуль в статистическом равновесии. В данном случае равновесная функция распределения есть

$$f = \mathrm{const}\cdot \exp\left(-\frac{\mathbf{p}^2}{2MT}\right),$$

где M — масса частиц тяжелого газа, а T — температура основного (легкого) газа. Подстановка этого выражения в уравнение

$\mathbf{s} = 0$ дает

$$MTA_\alpha = B_{\alpha\beta} p_\beta. \tag{21.6}$$

Таким образом, кинетическое уравнение принимает вид

$$\frac{\partial f(t, \mathbf{p})}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \left[B_{\alpha\beta} \left(\frac{p_\beta}{MT} f + \frac{\partial f}{\partial p_\beta} \right) \right]. \tag{21.7}$$

Отметим, что коэффициенты в двух первых членах разложения интеграла столкновений оказываются одинакового порядка величины; это связано с тем, что усреднение первых степеней знакопеременных величин q_α в (21.4) связано с бóльшим погашением, чем при усреднении квадратичных выражений. Дальнейшие же члены разложения будут уже все малы по сравнению с двумя первыми.

Единственный вектор, от которого могут зависеть коэффициенты $B_{\alpha\beta}$, — импульс тяжелых частиц $\mathbf{p}$. Но если скорости этих частиц, $\mathbf{p}/M$, в среднем малы по сравнению со скоростями легких частиц, то при столкновениях их можно считать неподвижными; в этом приближении величины $B_{\alpha\beta}$ не будут зависеть от $\mathbf{p}$. Другими словами, тензор $B_{\alpha\beta}$ сведется к постоянному скаляру B:

$$B_{\alpha\beta} = B\delta_{\alpha\beta}, \qquad B = \frac{1}{6} \int q^2 w(0, \mathbf{q})\, d^3q, \tag{21.8}$$

а уравнение (21.7) примет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = B \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \left(\frac{\mathbf{p}}{MT} f + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \right). \tag{21.9}$$

Обратим внимание на формальное сходство уравнения (21.7) с уравнением диффузии во внешнем поле, в особенности наглядное в записи (21.9). Напомним, что уравнение диффузии имеет вид

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \operatorname{div} (D \nabla c - bc\mathbf{F}),$$

где c — концентрация примеси, $\mathbf{F}$ — сила, действующая на частицу примеси со стороны внешнего поля, D — коэффициент диффузии, b — подвижность. Описываемые уравнением (21.9) процессы можно назвать диффузией в импульсном пространстве, причем B играет роль коэффициента диффузии; связь между коэффициентами при обоих членах в правой части (21.9) аналогична известному соотношению Эйнштейна между коэффициентом диффузии и подвижностью: $D = bT$ (см. VI, § 59).

Кинетическое уравнение вида (21.2), в котором коэффициенты определены через усредненные характеристики элементарных актов, согласно (21.4), называют *уравнением Фоккера–Планка* (*A.D. Fokker*, 1914; *M. Planck*, 1917). Специфические свойства

переменных p_α как импульсов частиц в изложенном выводе не играли роли.

Ясно поэтому, что уравнение такого же типа будет справедливо и для функций распределения f по другим переменным, если только выполнены условия, лежащие в основе вывода: относительная малость изменения величин в элементарных актах и линейность по f интегрального оператора, выражающего изменение функции благодаря этим актам.

Упомянем, для примера, еще случай, когда легкий газ составляет небольшую примесь к тяжелому газу. При столкновениях с тяжелыми частицами импульс легкой частицы сильно меняется по направлению, но лишь незначительно по абсолютной величине.

Хотя для функции распределения частиц примесного газа по вектору импульса $\mathbf{p}$ уравнение (21.7) в этих условиях будет уже неприменимо, аналогичное уравнение можно установить для распределения по одной лишь абсолютной величине p. Если функция распределения по-прежнему отнесена к элементу импульсного пространства d^3p (так что число частиц с величиной p в интервале dp есть $f(t,p)\cdot 4\pi p^2\,dp$), то уравнение Фоккера–Планка будет иметь место для функции $4\pi p^2 f$, отнесенной к элементу dp:

$$\frac{\partial f p^2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial p}\left\{ f p^2 A + B\frac{\partial}{\partial p} f p^2 \right\},$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{p^2}\frac{\partial}{\partial p} p^2 \left\{ fA + \frac{B}{p^2}\frac{\partial}{\partial p} f p^2 \right\}, \tag{21.10}$$

где

$$B = \frac{1}{2}\frac{\sum(\delta p)^2}{\delta t}. \tag{21.11}$$

Выражение в фигурных скобках представляет собой радиальный поток s в импульсном пространстве. Он должен обращаться в нуль равновесным распределением

$$f = \mathrm{const}\cdot\exp\left(-\frac{p^2}{2mT}\right)$$

(где m — масса легкой частицы, а T — температура основного, тяжелого газа). Это условие связывает величины A и B, и в результате кинетическое уравнение (21.10) принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{p^2}\frac{\partial p^2 s}{\partial p}, \qquad s = -B\left(\frac{p}{mT} f + \frac{\partial f}{\partial p}\right). \tag{21.12}$$

Задачи

1. Определить коэффициент диффузии в импульсном пространстве (B в уравнении (21.9)) для примеси тяжелого газа в легком, предполагая скорости тяжелых частиц малыми по сравнению со скоростями легких.

Решение. Как указано в тексте, в данных условиях при вычислении передачи импульса можно считать тяжелую частицу неподвижной и пренебречь изменением ее энергии при столкновении. Изменение импульса тяжелой частицы вычисляется тогда как (совпадающее с ним) изменение импульса легкой частицы: $(\Delta\mathbf{p})^2 = 2p'^2(1-\cos\alpha)$, где p' — величина импульса легкой частицы, а α — угол его поворота при рассеянии. Отсюда

$$\sum(\Delta\mathbf{p})^2 = \delta t \int 2p'^2(1-\cos\alpha)Nv'\,d\sigma$$

(где N — плотность числа частиц легкого газа) и окончательно

$$B = \frac{N}{3m}\langle p'^3\sigma_t\rangle,$$

где $\sigma_t = \int(1-\cos\alpha)\,d\sigma$ — транспортное сечение, а усреднение производится по распределению частиц легкого газа.

2. С помощью уравнения Фоккера–Планка определить подвижность тяжелой частицы в легком газе.

Решение. При наличии внешнего поля в левой части уравнения (21.9) добавляется член $\mathbf{F}\partial f/\partial\mathbf{p}$, где $\mathbf{F}$ — сила, действующая на частицу. Предполагая эту силу малой, ищем стационарное решение уравнения в виде $f = f_0 + \delta f$, где f_0 — максвелловское распределение, а $\delta f \ll f_0$. Для δf находим уравнение

$$B\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\left(\frac{\partial\delta f}{\partial\mathbf{p}} + \frac{\mathbf{p}}{MT}\delta f\right) = \mathbf{F}\frac{\partial f_0}{\partial\mathbf{p}}.$$

Отсюда

$$B\left(\frac{\partial\delta f}{\partial\mathbf{p}} + \frac{\mathbf{p}}{MT}\delta f\right) = \mathbf{F}f_0$$

и затем $\delta f = f_0\mathbf{F}\mathbf{p}/B$. Подвижность b есть коэффициент в равенстве

$$\overline{\mathbf{v}} = \int \delta f\cdot\mathbf{v}\,d^3p = b\mathbf{F}.$$

Вычисление интеграла дает

$$b = \frac{T}{B} = \frac{3mT}{N\langle\sigma_t p'^3\rangle}$$

в согласии с (12.4).

§ 22. Слабо ионизованный газ в электрическом поле

Рассмотрим ионизованный газ, находящийся в однородном электрическом поле $\mathbf{E}$. Поле нарушает равновесное распределение свободных электронов в газе и создает в нем электрический ток. Выведем кинетическое уравнение, определяющее электронное распределение[1]).

---

[1]) Изложенная в этом параграфе теория принадлежит *Б.И. Давыдову* (1936). Предельная формула (22.18) была еще раньше получена *Друйвестейном* (*M.J. Druyvesteyn*, 1930).

Слабость ионизации означает, что концентрация электронов (и ионов) в газе мала. Поэтому основную роль играют столкновения электронов лишь с нейтральными молекулами; столкновениями же электронов друг с другом (и с ионами) можно пренебречь. Будем предполагать также, что средняя энергия, приобретаемая электронами в электрическом поле (даже если поле сильное; см. ниже), недостаточна для возбуждения или ионизации молекул; тогда столкновения электронов с молекулами можно считать упругими.

Ввиду большой разницы в массах электронов m и молекул M, средняя скорость электронов велика по сравнению со средней скоростью молекул. По той же причине импульс электрона при столкновении меняется сильно по направлению, но лишь слабо по абсолютной величине. В этих условиях интеграл столкновений в кинетическом уравнении разбивается в сумму двух частей, представляющих изменения числа частиц в заданном элементе импульсного пространства соответственно от изменения величины и от изменения направления импульса; первая из этих частей может быть представлена в фоккер-планковском дифференциальном виде.

Ввиду симметрии вокруг направления поля, функция распределения зависит (помимо времени) только от двух переменных: от абсолютной величины импульса p и от угла θ между $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ и направлением $\mathbf{E}$ (которое выберем в качестве оси z). Кинетическое уравнение для функции $f(t, p, \theta)$ имеет вид [1])

$$\frac{\partial f}{\partial t} - e\mathbf{E}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = -\frac{1}{p^2}\frac{\partial}{\partial p}p^2 s + Nv\int [f(t,p,\theta') - f(t,p,\theta)]\, d\sigma, \qquad (22.1)$$

где

$$s = -B\left(\frac{v}{T}f + \frac{\partial f}{\partial p}\right), \qquad B = \frac{\sum(\Delta p)^2}{2\delta t}.$$

Первый член в правой части (22.1) отвечает правой части уравнения Фоккера–Планка (21.12). Второй же член есть интеграл столкновений по отношению к изменению направления импульса. В этом интеграле молекулы можно считать неподвижными (N — плотность их числа); тогда число столкновений, испытываемых электроном в единицу времени и меняющих направление импульса от θ и θ' (или от θ' и θ), есть $Nv\, d\sigma$, где $d\sigma$ — сечение рассеяния электрона на неподвижной молекуле, зависящее от p и от угла α между $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$ (предполагается, что сечение уже усреднено по ориентациям молекулы).

---

[1]) В этой книге e обозначает везде положительную величину — абсолютное значение элементарного заряда. Заряд электрона есть поэтому $-e$.

Ниже будет рассматриваться стационарное состояние с независящей от времени функцией распределения, соответственно чему член $\partial f/\partial t$ в уравнении (22.1) будет опущен.

Для вычисления величины B воспользуемся равенством

$$(\mathbf{v} - \mathbf{V})^2 = (\mathbf{v}' - \mathbf{V}')^2,$$

выражающим неизменность величины относительной скорости двух частиц при упругом столкновении ($\mathbf{v}$, $\mathbf{V}$ и $\mathbf{v}'$, $\mathbf{V}'$ — начальные и конечные скорости электрона и молекулы). Изменение скорости молекулы мало по сравнению с изменением скорости электрона: $\Delta\mathbf{V} = -m\Delta\mathbf{v}/M$; поэтому после раскрытия написанного равенства можно положить в нем $\mathbf{V} = \mathbf{V}'$. Тогда

$$2\mathbf{V}(\mathbf{v} - \mathbf{v}') = v^2 - v'^2 \approx 2v\Delta v,$$

где $\Delta v = v - v'$ — малая величина. Таким образом,

$$(\Delta p)^2 = m^2(\Delta v)^2 = \frac{m^2}{v^2}[(\mathbf{V}\mathbf{v})^2 + (\mathbf{V}\mathbf{v}')^2 - 2(\mathbf{V}\mathbf{v})(\mathbf{V}\mathbf{v}')].$$

Усреднение этого выражения осуществляется в два этапа. Прежде всего, усредняем по распределению (максвелловскому) скоростей молекул $\mathbf{V}$. Ввиду изотропии этого распределения имеем $\langle V_\alpha V_\beta\rangle = \delta_{\alpha\beta}\langle V^2\rangle/3$, а средний квадрат $\langle V^2\rangle = 3T/M$. Поэтому получаем

$$(\Delta p)^2 = \frac{m^2T}{Mv^2}(v^2 + v'^2 - 2\mathbf{v}\mathbf{v}') \approx \frac{2m^2T}{M}(1 - \cos\alpha). \tag{22.2}$$

Теперь надо усреднить по столкновениям, испытываемым электроном в единицу времени; это осуществляется интегрированием по $Nv\,d\sigma$. В результате получим

$$B = \frac{Nm^2v\sigma_tT}{M} = \frac{pmT}{Ml}, \tag{22.3}$$

где $\sigma_t = \int(1 - \cos\alpha)\,d\sigma$ — транспортное сечение, а l — длина свободного пробега, определенная как

$$l = (N\sigma_t)^{-1} \tag{22.4}$$

(в общем случае l — функция p). Таким образом, фигурирующий в (22.1) поток

$$s = -\frac{mp}{Ml}\left(vf + T\frac{\partial f}{\partial p}\right). \tag{22.5}$$

Обратим внимание на то, что согласно (22.2) изменение энергии электрона при столкновении $\Delta\varepsilon \sim \overline{v}\Delta p \sim T(m/M)^{1/2} \sim \sim \overline{\varepsilon}(m/M)^{1/2}$. Поэтому заметное изменение этой энергии происходит лишь в результате $\sim M/m$ столкновений, между тем как направление импульса электрона существенно меняется уже

в одном столкновении. Другими словами, время релаксации по энергиям электронов $\tau_\varepsilon \sim \tau_p M/m$, где $\tau_p \sim l/\overline{v}$ — время релаксации по направлениям импульса.

Левую часть уравнения (22.1) тоже надо преобразовать к переменным p и θ:

$$e\mathbf{E}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = eE\frac{\partial f}{\partial p_z} = eE\left[\cos\theta\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\sin^2\theta}{p}\frac{\partial f}{\partial\cos\theta}\right]. \qquad (22.6)$$

Решение составленного таким образом кинетического уравнения можно искать в виде разложения по полиномам Лежандра:

$$f(p,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(p) P_n(\cos\theta). \qquad (22.7)$$

Мы увидим ниже, что последовательные члены этого разложения быстро убывают по порядку величины. Поэтому фактически достаточно ограничиться двумя первыми членами разложения:

$$f(p,\theta) = f_0(p) + f_1(p)\cos\theta. \qquad (22.8)$$

Интеграл в (22.1) при подстановке (22.8) дает

$$\int [f(p,\theta') - f(p,\theta)]\,d\sigma = -f_1\sigma_t\cos\theta$$

(ср. преобразование такого же интеграла в (11.1)), после чего кинетическое уравнение принимает вид

$$-eE\left[f_0'\cos\theta + f_1'\cos^2\theta + \frac{f_1}{p}\sin^2\theta\right] + \frac{1}{p^2}(s_0p^2)' + \frac{v}{l}f_1\cos\theta = 0,$$

где штрих означает дифференцирование по p; здесь опущен член $p^{-2}(s_1p^2)'\cos\theta$, заведомо малый (в отношении $\sim m/M$) по сравнению с членом $(vf_1/l)\cos\theta$ (s_0 и s_1 — выражения (22.5) с f_0 или f_1 вместо f). Умножив это уравнение на $P_0 = 1$ или на $P_1 = \cos\theta$ и проинтегрировав его по $d\cos\theta$, получим два уравнения:

$$\frac{1}{p^2}(p^2S)' = 0, \qquad S = -\frac{1}{lM}(p^2f_0 + mpTf_0') - \frac{eE}{3}f_1, \qquad (22.9)$$

$$f_1 = \frac{eEl}{v}f_0'. \qquad (22.10)$$

Выражение S представляет собой плотность потока частиц в импульсном пространстве, измененного электрическим полем. Из (22.9) следует, что $S = \mathrm{const}/p^2$. Но поток S должен быть конечен при всех значениях p; поэтому $\mathrm{const} = 0$. Подставив теперь f_1 из (22.10) в уравнение $S = 0$, найдем уравнение, определяющее функцию $f_0(p)$:

$$\left[pT + \frac{(eEl)^2M}{3p}\right]f_0' + \frac{p^2}{m}f_0 = 0. \qquad (22.11)$$

До сих пор мы не делали никаких предположений о виде функции $l(p)$, а интеграл уравнения первого порядка (22.11) может быть написан с произвольной функцией $l(p)$. С целью получения более конкретных результатов предположим $l = \text{const}$, что эквивалентно предположению о независимости сечения σ_t от импульса [1]. Тогда интегрирование уравнения (22.11) дает

$$f_0(p) = \text{const} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{T} + \frac{\gamma^2}{6}\right)^{\gamma^2/6} e^{-\varepsilon/T}, \tag{22.12}$$

где

$$\gamma = \frac{eEl}{T}\sqrt{\frac{M}{m}}. \tag{22.13}$$

Для функции же $f_1(p)$ из (22.10) и (22.12) имеем

$$f_1 = -f_0\sqrt{\frac{m}{M}}\frac{\gamma\varepsilon/T}{\varepsilon/T + \gamma^2/6}. \tag{22.14}$$

Величина γ является тем параметром, который характеризует степень воздействия поля на распределение электронов. Предельный случай слабых полей отвечает неравенству $\gamma \ll 1$. В первом приближении $f_0(p)$ сводится тогда к невозмущенному максвелловскому распределению ($f_0 \propto e^{-\varepsilon/T}$, $\overline{\varepsilon} = 3T/2$), а

$$f_1 = -\frac{eEl}{T}f_0, \quad \gamma \ll 1. \tag{22.15}$$

Возникающий в газе электрический ток определяется подвижностью электронов

$$b = \frac{\overline{v}_z}{-eE} = \frac{1}{-eEN_e}\int v\cos\theta \cdot f\, d^3p = -\frac{1}{3eEN_e}\int v f_1\, d^3p \tag{22.16}$$

(N_e — плотность числа электронов) [2]. Простое вычисление с f_1 из (22.15) дает для подвижности в слабом поле

$$b_0 = \frac{2^{3/2} l}{3\pi^{1/2}(mT)^{1/2}}. \tag{22.17}$$

Как и следовало, это выражение удовлетворяет соотношению Эйнштейна $D = bT$, где D — коэффициент диффузии (11.10).

---

[1] Это во всяком случае выполняется при достаточно низких температурах электронов, поскольку для медленных частиц сечение стремится к независящему от энергии пределу (см. III, § 132).

[2] Отметим, что, ввиду ортогональности различных полиномов Лежандра, из всех членов разложения (22.7) вклад в нормировочный интеграл дает только член f_0, а вклад в $\overline{v}_z$ — только член $f_1 \cos\theta$.

Смысл неравенства $\gamma \ll 1$ как критерия слабости поля можно понять из следующих простых соображений. Очевидно, что влияние поля на распределение электронов будет слабым до тех пор, пока энергия, набираемая электроном за время его свободного пробега, будет мала по сравнению с энергией, отдаваемой им атому при столкновении. Первая из них есть eEl, а вторая —

$$\delta\varepsilon \sim V\delta P \sim Vp \sim \sqrt{\frac{T}{M}}\sqrt{Tm}$$

(P и V — импульс и скорость атома; изменение δP порядка величины импульса электрона). Сравнение обоих выражений и приводит к требуемому критерию.

В обратном случае сильных полей ($\gamma \gg 1$) находим [1])

$$f_0(p) = A\exp\left(-\frac{3\varepsilon^2}{\gamma^2T^2}\right), \qquad A = \frac{3^{3/4}N_e}{2^{3/2}\pi\Gamma(3/4)(m\gamma T)^{3/2}}, \tag{22.18}$$

$$f_1 = -6\sqrt{\frac{m}{M}}\frac{\varepsilon}{T\gamma}f_0. \tag{22.19}$$

Средняя энергия электронов:

$$\overline{\varepsilon} = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{2M}{3m}}\Gamma^2\left(\frac{5}{4}\right)eEl = 0{,}43eEl\sqrt{\frac{M}{m}}, \tag{22.20}$$

а их подвижность

$$b = \frac{4\Gamma(5/4)l^{1/2}}{3^{3/4}\pi^{1/2}(mM)^{1/4}(eE)^{1/2}}. \tag{22.21}$$

Остается выяснить критерий сходимости разложения (22.7). Для этого замечаем, что его последовательные члены связаны, по порядку величины, соотношением

$$\frac{eE}{mv}f_{n-1} \sim \frac{v}{l}f_n \tag{22.22}$$

(после подстановки (22.7), умножения на $P_n(\cos\theta)$ и интегрирования по $d\cos\theta$ в левой части кинетического уравнения остается член с f_{n-1}, а в интеграле столкновений — лишь с f_n). При $\gamma \ll 1$ средняя энергия электрона $\overline{\varepsilon} \sim T$, и из (22.22) имеем

$$\frac{f_n}{f_{n-1}} \sim \frac{eEl}{T} \ll \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2} \ll 1.$$

[1]) Формулу (22.18) проще получить, решая заново уравнение (22.11) (положив в нем $T = 0$), чем путем предельного перехода в (22.12).

В случае же больших полей, когда $\gamma \gg 1$, средняя энергия $\overline{\varepsilon} \sim eEl(M/m)^{1/2}$, так что снова

$$f_n/f_{n-1} \sim (m/M)^{1/2} \ll 1.$$

Таким образом, сходимость разложения обеспечивается малостью отношения m/M [1]).

§ 23. Флуктуации в слабо ионизованном неравновесном газе

В этом параграфе мы рассмотрим флуктуации функции распределения электронов в стационарном неравновесном состоянии слабо ионизованного газа; газ пространственно-однороден и находится в постоянном однородном электрическом поле $\mathbf{E}$.

Мы будем интересоваться лишь временной, но не пространственной корреляцией флуктуаций. Тогда имеет смысл ввести вместо зависящей от координат точной (флуктуирующей) функции распределения $f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ усредненную по всему объему газа функцию

$$f(t, \mathbf{p}) = \frac{1}{\mathcal{V}} \int f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})\, d^3x \qquad (23.1)$$

(которую мы будем в этом параграфе обозначать той же буквой f, без аргумента $\mathbf{r}$); эта функция флуктуирует только со временем. Функция же $\overline{f}(\mathbf{p})$, по отношению к которой флуктуирует f, есть найденное в предыдущем параграфе распределение (22.8).

Для рассматриваемой системы представляют особый интерес не столько флуктуации функции распределения самой по себе, сколько связанные с ними флуктуации плотности электрического тока $\mathbf{j}$. Корреляторы этих величин связаны друг с другом очевидной формулой

$$\langle \delta j_\alpha(t) \delta j_\beta(0) \rangle = e^2 \int \langle \delta f(t, \mathbf{p}) \delta f(0, \mathbf{p}') \rangle v_\alpha v'_\beta\, d^3p\, d^3p', \qquad (23.2)$$

причем, разумеется, $\delta\mathbf{j}$ есть флуктуация плотности тока, усредненная по объему газа [2]).

---

[1]) Отметим, однако, что поправки $f_2, f_3, \ldots$ нельзя было бы определять с помощью уравнения (22.1), так как в этом уравнении использовано фоккер-планковское приближение, в котором величинами высших степеней по m/M уже пренебрежено.

[2]) Такое усреднение соответствует постановке опыта, в котором измеряются флуктуации полного тока в газе: флуктуация полного тока равна флуктуации усредненной плотности тока в данном направлении, умноженной на сечение образца.

Решение задачи для неравновесного газа основано на указанном в § 20 общем методе [1]).

Согласно этому методу, коррелятор $\langle\delta f(t,\mathbf{p})\delta f(0,\mathbf{p}')\rangle$ удовлетворяет (по переменным t и $\mathbf{p}$) кинетическому уравнению (22.1), которое играет в данном случае роль уравнения (20.13) общего метода. Вместе с этим коррелятором такому же уравнению удовлетворяет и функция

$$\mathbf{g}(t,\mathbf{p}) = \int\langle\delta f(t,\mathbf{p})\delta f(0,\mathbf{p}')\rangle\mathbf{v}'\,d^3p', \tag{23.3}$$

через которую в свою очередь выражается искомый коррелятор тока:

$$\langle\delta j_\alpha(t)\delta j_\beta(0)\rangle = e^2\int g_\beta(t,\mathbf{p})v_\alpha\,d^3p. \tag{23.4}$$

Таким образом, имеем уравнение

$$\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial t} - e\left(\mathbf{E}\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\right)\mathbf{g} = \frac{1}{p^2}\frac{\partial}{\partial p}\left[p^2B\left(\frac{v}{T}\mathbf{g} + \frac{\partial\mathbf{g}}{\partial p}\right)\right] - \\ - Nv\int[\mathbf{g}(t,p,\theta) - \mathbf{g}(t,p,\theta')]\,d\sigma \tag{23.5}$$

с B из (22.3).

Кинетическое уравнение (22.1) учитывает столкновения электронов только с молекулами, но не друг с другом. Поэтому здесь нет механизма, устанавливающего одновременную корреляцию между электронами с различными импульсами и «начальное» условие для функции $\mathbf{g}(t,\mathbf{p})$ будет таким же, как и в равновесном состоянии. Поскольку речь идет о флуктуации функции распределения, усредненной по всему объему газа, то должно быть учтено постоянство числа частиц (электронов) [2]). Согласно (20.17), при таком условии имеем

$$\langle\delta f(0,\mathbf{p})\delta f(0,\mathbf{p}')\rangle = \frac{1}{\mathcal{V}}\left[\overline{f}(\mathbf{p})\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}') - \frac{1}{N_e}\overline{f}(\mathbf{p})\overline{f}(\mathbf{p}')\right]$$

---

[1]) Исследование этой задачи *Прайсом* (*P.J. Price*, 1959) явилось первым примером вычисления флуктуаций в неравновесной системе. Мы следуем здесь изложению *В.Л. Гуревича* и *Р. Катилюса* (1965).

[2]) Интересуясь только влиянием на флуктуации неравновесности, связанной с наличием поля, мы пренебрегаем флуктуациями полного числа электронов, связанными с процессами ионизации и рекомбинации. Строго эти флуктуации могут отсутствовать в случае, когда все электроны образованы примесями с малым потенциалом ионизации; полное число электронов совпадает тогда просто с полным числом примесных атомов. Пренебрегается также флуктуациями концентрации нейтральных молекул. Относительная флуктуация этой концентрации заведомо мала по сравнению с такой же для электронов, поскольку концентрация электронов много меньше концентрации молекул.

(N_e — плотность электронов), откуда для начальной функции

$$\mathbf{g}(0,\mathbf{p}) = \frac{1}{\nu}\overline{f}(\mathbf{p})(\mathbf{v}-\mathbf{V}), \qquad (23.6)$$

где $\mathbf{V}$ — средняя скорость электронов в состоянии с распределением $\overline{f}(\mathbf{p})$. Скорость $\mathbf{V}$ направлена, разумеется, вдоль поля $\mathbf{E}$; напишем ее в виде

$$\mathbf{V} = -eb\mathbf{E}, \qquad (23.7)$$

где b — подвижность. Постоянство полного числа электронов означает также, что $\int \delta f\, d^3p = 0$ и потому

$$\int \mathbf{g}(t,\mathbf{p})\, d^3p = 0. \qquad (23.8)$$

Следуя описанному в § 19 методу, совершаем над уравнением (23.5) одностороннее преобразование Фурье: умножаем его на $e^{i\omega t}$ и интегрируем по t в пределах от 0 до ∞. При этом член $e^{i\omega t}\partial\mathbf{g}/\partial t$ преобразуется по частям с учетом начального условия (23.6) и условия $\mathbf{g}(\infty,\mathbf{p}) = 0$. В результате получим уравнение

$$-i\omega\mathbf{g}^{(+)} - e\left(\mathbf{E}\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\right)\mathbf{g}^{(+)} - \frac{1}{p^2}\frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{mTp^3}{Ml}\left(\frac{v}{T}\mathbf{g}^{(+)} + \frac{\partial\mathbf{g}^{(+)}}{\partial p}\right)\right] +$$
$$+ N_e v\int[\mathbf{g}^{(+)}(\mathbf{p}) - \mathbf{g}^{(+)}(\mathbf{p}')]\, d\sigma = \frac{1}{\nu}\overline{f}(\mathbf{p})(\mathbf{v}-\mathbf{V}), \qquad (23.9)$$

где

$$\mathbf{g}^{(+)}(\omega,\mathbf{p}) = \int_0^\infty e^{i\omega t}\mathbf{g}(t,\mathbf{p})\, d^3p. \qquad (23.10)$$

В силу (23.8), это уравнение должно решаться при дополнительном условии

$$\int \mathbf{g}^{(+)}(\omega,\mathbf{p})\, d^3p = 0. \qquad (23.11)$$

Если решение уравнения (23.9) найдено, то искомое спектральное разложение коррелятора токов можно найти простым интегрированием. Действительно, пишем

$$(j_\alpha j_\beta)_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int e^{i\omega t}\langle\delta f(t,\mathbf{p})\delta f(0,\mathbf{p}')\rangle v_\alpha v'_\beta\, d^3p\, d^3p'$$

и, поступив затем в точности аналогично выводу (19.14), получим

$$(j_\alpha j_\beta)_\omega = e^2\int\{g_\beta^{(+)}(\omega,\mathbf{p})v_\alpha + g_\alpha^{(+)}(-\omega,\mathbf{p})v_\beta\}\, d^3p. \qquad (23.12)$$

Ниже будем считать для конкретности, что длина пробега $l = \text{const}$. В равновесном состоянии, в отсутствие электрического поля, функция $\overline{f}$ есть равновесное максвелловское распределение $f_0(p)$. Решение уравнения (23.9) есть тогда

$$\mathbf{g}^{(+)} = \frac{\mathbf{p}}{p}\frac{f_0(p)}{\mathcal{V}}\frac{l}{1 - i\omega l/v}, \tag{23.13}$$

в чем легко убедиться, заметив, что

$$\int(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\, d\sigma = \sigma_t \mathbf{p}. \tag{23.14}$$

Если $\omega\tau_p \ll 1$ (где $\tau_p \sim l/v_T$ — время релаксации по направлениям импульса), то в (23.13) можно пренебречь членом $-i\omega l/v$ в знаменателе. Вычисление интеграла (23.12) приводит тогда к результату

$$(j_\alpha j_\beta)_\omega = \frac{2T\sigma}{\mathcal{V}}\delta_{\alpha\beta}, \tag{23.15}$$

где $\sigma = e^2 N_e b_0$ — проводимость газа в слабом поле; b_0 — подвижность в слабом поле, даваемая формулой (22.17). Результат (23.15) соответствует, конечно, общей формуле Найквиста для равновесных флуктуаций тока (см. IX, § 78). Действительно, рассмотрим цилиндрический вдоль оси x объем газа. Поскольку плотность тока уже усреднена по объему, то полный ток $J = j_x S$, где S — площадь сечения цилиндра. Из (23.15) имеем тогда

$$(J^2)_\omega = \frac{2T\sigma S^2}{\mathcal{V}} = \frac{2T\sigma S}{L} = \frac{2T}{R}, \tag{23.16}$$

где $L = \mathcal{V}/S$ — длина образца, а $R = L/\sigma S$ — его сопротивление[1]).

При $\mathbf{E} \neq 0$ уравнение (23.9) решается последовательными приближениями, подобно тому, как решалось уравнение (22.6). Но в то время, как уравнение (22.6) определяло скалярную функцию, уравнение (23.9) написано для векторной функции. Первые члены разложения такой функции (зависящей от двух векторов — постоянного $\mathbf{E}$ и переменного $\mathbf{p}$) напишем в виде

$$\mathbf{g}^{(+)}(\omega, \mathbf{p}) = h(\omega, p)\mathbf{n} + \mathbf{e}\{g_0(\omega, p) + \mathbf{ne} g_1(\omega, p)\}, \tag{23.17}$$

причем $g_1 \ll g_0$ (здесь $\mathbf{n} = \mathbf{p}/p$, $\mathbf{e} = \mathbf{E}/E$). Функция же $\overline{f}(\mathbf{p})$ есть

$$\overline{f}(\mathbf{p}) = f_0(p) + \mathbf{ne} f_1(p) \tag{23.18}$$

с вычисленными в предыдущем параграфе f_0 и $f_1 = eElf_0'/v$.

[1]) При сравнении с IX (78.1), надо учесть, что $\hbar\omega \ll T$ и что в силу условия $\omega\tau_p \ll 1$ дисперсия проводимости отсутствует, так что $Z = R$.

Подставим (23.17), (23.18) в уравнение (23.9) и отделим в нем члены, нечетные и четные по $\mathbf{p}$. Снова полагая $\omega\tau_p \ll 1$, получим, собрав нечетные члены:

$$\frac{v}{l}\{h\mathbf{n} + g_1\mathbf{e}(\mathbf{ne})\} - \mathbf{e}\left(\mathbf{e}\frac{\partial g_0}{\partial \mathbf{p}}\right)eE = \frac{f_0\mathbf{v}}{\mathcal{V}};$$

здесь опущены члены, заведомо малые (в отношении m/M) по сравнению с написанными. Отсюда

$$h(p) = \frac{l}{\mathcal{V}}f_0(p), \quad g_1(\omega, p) = \frac{eElm}{p}\frac{\partial g_0(\omega, p)}{\partial p}. \tag{23.19}$$

Что касается четных по $\mathbf{p}$ членов, то они должны удовлетворять уравнению (23.9) лишь после усреднения по направлениям $\mathbf{p}$ — в соответствии с тем, что выражение (23.17) дает лишь первые члены разложения искомой функции. После несложного вычисления (с использованием выражений (23.19)) получается следующее уравнение для функции $g_0(\omega, p)$:

$$-i\omega g_0 + \frac{1}{p^2}\frac{\partial}{\partial p}(p^2 S) = \frac{1}{\mathcal{V}}\left\{eEbf_0 + \frac{2eEl}{3p}\frac{\partial}{\partial p}pf_0\right\}, \tag{23.20}$$

где

$$S = -\frac{\mathbf{1}}{lM}\left(p^2 g_0 + mpT\frac{\partial g_0}{\partial p}\right) - \frac{e^2E^2lm}{3p}\frac{\partial g_0}{\partial \mathbf{p}}.$$

Это уравнение надо решать при дополнительном условии

$$\int g_0(\omega, p)\, d^3p = 0, \tag{23.21}$$

к которому сводится (23.11) при подстановке в него (23.17).

По известной функции $\mathbf{g}^{(+)}$ искомый коррелятор тока определяется формулой (23.12). При подстановке в нее разложения (23.17) и простого преобразования с использованием (23.19) получается

$$(j_\alpha j_\beta)_\omega = \delta_{\alpha\beta}\frac{2e^2 l}{3\mathcal{V}}\int v f_0\, d^3p - \\ - E_\alpha E_\beta \frac{2le^3}{3E}\int [g_0(\omega, p) + g_0(-\omega, p)]\frac{d^3p}{p}. \tag{23.22}$$

Член $-i\omega g_0$ в уравнении (23.20) становится существенным при $\omega \sim mv/Ml$, т. е. при $\omega\tau_\varepsilon \sim 1$, где τ_ε — время релаксации по энергиям электронов. С таких частот начинается, следовательно, дисперсия флуктуаций тока.

В общем случае уравнение (23.20) очень сложно. Ограничимся, для иллюстрации, случаем малых частот, $\omega\tau_\varepsilon \ll 1$, и сильных полей, удовлетворяющих условию $\gamma \gg 1$, где γ — параметр

(22.13). В силу последнего условия, функция $f_0(p)$ дается выражением (22.18). Вычисление интеграла в первом члене в (23.22) дает

$$\delta_{\alpha\beta}\frac{2^{3/2}}{3^{5/4}\Gamma(3/4)}\frac{N_e e^2 l}{\mathcal{V}}\left(\frac{eEl}{m}\right)^{1/2}\left(\frac{M}{m}\right)^{1/4}.$$

Во втором члене в (23.22) ограничимся буквенной оценкой. Из уравнения (23.20) (без члена $-i\omega g_0$) находим оценку

$$g_0 \sim \frac{eEl^2M}{\mathcal{V}p^2}f_0.$$

Интеграл оценивается затем как

$$e^3lE\frac{g_0}{p}p^3.$$

В результате находим для коррелятора тока выражение

$$(j_\alpha j_\beta)_\omega = \frac{N_e e^2 l}{\mathcal{V}}\left(\frac{eEl}{m}\right)^{1/2}\left(\frac{M}{m}\right)^{1/4}\left[0,6\delta_{\alpha\beta} - \beta\frac{E_\alpha E_\beta}{E^2}\right], \qquad (23.23)$$

где $\beta \sim 1$ — численная постоянная.

§ 24. Рекомбинация и ионизация

Установление равновесной степени ионизации в частично ионизованном газе осуществляется путем различных элементарных актов столкновительной ионизации и обратной рекомбинации сталкивающихся заряженных частиц. В простейшем случае, когда в газе имеется (помимо электронов) лишь один сорт ионов, процесс установления ионизационного равновесия описывается уравнением вида

$$\frac{dN_e}{dt} = \beta - \alpha N_e N_i. \qquad (24.1)$$

Здесь β — число электронов, образующихся в 1 с в 1 см^3 (при столкновениях нейтральных атомов или путем ионизации атомов фотонами); это число не зависит от наличных плотностей электронов N_e и ионов N_i. Второй же член дает убыль числа электронов благодаря их рекомбинации с ионами; величину α называют *коэффициентом рекомбинации*.

Процесс рекомбинации обычно весьма медлен по сравнению с остальными процессами установления равновесия в плазме. Дело в том, что образование нейтрального атома при столкновении иона с электроном требует уноса освобождающейся энергии (энергии связи электрона в атоме). Эта энергия может излучиться в виде фотона (радиационная рекомбинация); в таком случае

медленность процесса связана с малостью квантовоэлектродинамической вероятности излучения. Освобождающаяся энергия может быть также передана третьей частице — нейтральному атому; в этом случае медленность процесса связана с малой вероятностью тройных столкновений. Все это приводит к тому, что рекомбинацию часто имеет смысл изучать в условиях, когда распределение всех частиц можно считать максвелловским.

В равновесии производная dN_e/dt обращается в нуль. Отсюда следует, что величины α и β в (24.1) связаны друг с другом соотношением

$$\beta = \alpha N_{0e} N_{0i}, \tag{24.2}$$

где N_{0e} и N_{0i} — равновесные плотности электронов и ионов, определяющиеся соответствующими термодинамическими формулами (см. V, § 104) [1].

Коэффициент радиационной рекомбинации вычисляется непосредственно по сечению рекомбинации $\sigma_{\text{рек}}$ при столкновении электрона с неподвижным ионом (скоростью иона можно пренебречь по сравнению со скоростью электрона):

$$\alpha = \langle v_e \sigma_{\text{рек}} \rangle, \tag{24.3}$$

где усреднение производится по максвелловскому распределению скоростей электрона v_e (см. задачу 1).

Радиационная рекомбинация существенна, однако, лишь в достаточно разреженном газе, когда тройными столкновениями частиц можно вовсе пренебречь. В менее разреженном газе основным механизмом является рекомбинация с участием третьей частицы — нейтрального атома. Именно этот механизм мы и рассмотрим теперь подробнее.

При столкновении с атомами энергия электрона изменяется малыми порциями. Поэтому процесс рекомбинации начинается с образования сильно возбужденного атома, а при дальнейших столкновениях этого атома происходит постепенное «опускание» электрона на все более низкие уровни. Такой характер процесса позволяет рассматривать его как «диффузию по энергии» захваченного электрона и соответственно применить к нему уравнение Фоккера–Планка (*Л.П. Питаевский*, 1962).

Введем функцию распределения захваченных электронов по их (отрицательным) энергиям ε. Основную роль будет, естественно, играть «диффузия» по области энергий $|\varepsilon| \sim T$. Напомним в этой связи, что температуру надо во всяком случае считать здесь малой по сравнению с ионизационным потенциалом атомов I; при $T \sim I$ газ был бы уже практически полностью ионизованным (ср. V, § 104).

[1] В случае радиационной рекомбинации равновесность состояния предполагает также и равновесность излучения в плазме.

Уравнение Фоккера–Планка:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial s}{\partial \varepsilon}, \qquad s = -B\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} - Af. \tag{24.4}$$

Как обычно, коэффициент A можно выразить через B из условия $s = 0$ при $f = f_0$, где f_0 – равновесное распределение. После этого поток s примет вид

$$s = -Bf_0 \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\frac{f}{f_0}. \tag{24.5}$$

«Коэффициент диффузии» $B(\varepsilon)$ определяется по общему правилу как

$$B(\varepsilon) = \frac{\sum(\Delta\varepsilon)^2}{2\delta t}, \tag{24.6}$$

где $\Delta\varepsilon$ — изменение энергии возбуждения атома при его столкновении с невозбужденным атомом; вычисление $B(\varepsilon)$ по этой формуле сводится к решению механической задачи о столкновении и последующему усреднению по скорости невозбужденного атома (см. задачу 2).

Для нахождения функции $f_0(\varepsilon)$ замечаем, что равновесное распределение по импульсам и координатам для электрона в кулоновском поле заряда ze (заряд иона) дается формулой Больцмана

$$f_0(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = (2\pi mT)^{-3/2}e^{-\varepsilon/T}, \quad \varepsilon = \frac{p^2}{2m} - \frac{ze^2}{r} \tag{24.7}$$

(о ее нормировке см. ниже); движение электрона при $|\varepsilon| \sim T \ll I$ квазиклассично, что и позволяет использовать для энергии ε ее классическое выражение. Функция же распределения по ε есть, следовательно,

$$f_0(\varepsilon)\, d\varepsilon = (2\pi mT)^{-3/2}e^{|\varepsilon|/T}\tau(\varepsilon)\, d\varepsilon, \tag{24.8}$$

где $\tau(\varepsilon)$ — объем фазового пространства, отвечающий интервалу $d\varepsilon$:

$$\tau(\varepsilon) = \int \delta\left(|\varepsilon| + \frac{p^2}{2m} - \frac{ze^2}{r}\right) d^3x\, d^3p. \tag{24.9}$$

Заменив $d^3x\, d^3p = 4\pi r^2\, dr \cdot 4\pi p^2\, dp$ и произведя интегрирование, получим

$$\tau(\varepsilon) = \frac{\sqrt{2}\,\pi^3(ze^2)^3 m^{3/2}}{|\varepsilon|^{5/2}}. \tag{24.10}$$

Для формулировки условий, определяющих нужное нам решение уравнений (24.4), (24.5), удобно считать, что наличная плотность электронов в газе $N_e \gg N_{0e}$; тогда в (24.1) можно пренебречь скоростью ионизации β, так что убыль N_e будет определяться одной лишь рекомбинацией. В этих условиях постоянное значение потока s в стационарном решении уравнения (24.4)

прямо дает значение коэффициента рекомбинации ($s = \text{const} = -\alpha$), если только функция $f(\varepsilon)$ должным образом нормирована. Именно, на самых верхних уровнях ($|\varepsilon| \ll T$) электроны находятся в равновесии со свободными электронами; это значит, что должно быть

$$f(\varepsilon)/f_0(\varepsilon) \to 1 \quad \text{при} \quad |\varepsilon| \to 0, \tag{24.11}$$

причем нормировка $f_0(\varepsilon)$ должна отвечать одному свободному электрону в единице объема (что и выполнено в (24.7)).

Для нахождения второго граничного условия (при $\varepsilon \to -\infty$) замечаем, что распределение на глубоких уровнях возбужденного атома не возмущено наличием свободных электронов и не зависит от их числа: оно пропорционально равновесному числу N_{0e}, а не фактическому N_e. При условии $N_e \gg N_{0e}$ эта ситуация выражается граничным условием

$$f(\varepsilon)/f_0(\varepsilon) \to 0 \quad \text{при} \quad |\varepsilon| \to \infty. \tag{24.12}$$

Интегрируя уравнение $s = \text{const}$ с граничным условием (24.11), имеем

$$\frac{f}{f_0} = \text{const} \int\limits_0^{|\varepsilon|} \frac{d|\varepsilon|}{Bf_0} + 1.$$

Константа будет совпадать с $-\alpha$, если определить ее так, чтобы удовлетворилось условие (24.12). Таким образом, находим окончательно

$$\frac{1}{\alpha} = \int\limits_0^{\infty} \frac{d|\varepsilon|}{Bf_0} = \frac{2T^{3/2}}{\pi^{3/2}(ze^2)^3} \int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-|\varepsilon|/T}|\varepsilon|^{5/2}}{B(-|\varepsilon|)}\, d|\varepsilon|. \tag{24.13}$$

Эта формула относится к процессу, в котором роль «третьего тела» играет невозбужденный атом. Если газ уже сильно ионизован (что, однако, еще совместимо с условием $T \ll I$) и достаточно плотен, основная роль может перейти к рекомбинации с участием второго электрона в качестве третьего тела. Скорость рекомбинации становится тогда пропорциональной $N_e^2 N_i$, так что коэффициент рекомбинации, определенный по-прежнему согласно (24.1), будет сам пропорционален N_e. Поскольку релаксация по энергии при электронных соударениях происходит быстро, изложенный метод вычисления коэффициента рекомбинации в этом случае неприменим.

Задачи

1. Найти коэффициент радиационной рекомбинации с захватом электрона на основное состояние атома водорода при температурах $T \ll I$ ($I = e^4 m/(2\hbar^2)$ — потенциал ионизации атома водорода).

Р е ш е н и е. Сечение рекомбинации медленного электрона с неподвижным протоном на основной уровень водородного атома есть

$$\sigma_{\text{рек}} = \frac{2^{10}\pi^2(e^2/\hbar c)a_B^2 I^2}{3(2,71\ldots)^4 m^2c^2v_e^2},$$

где v_e — скорость электрона, $a_B = \dfrac{\hbar^2}{me^2}$ — боровский радиус (см. IV, § 56, формулы (56.13), (56.14)). Среднее значение $\langle v_e^{-1}\rangle = \left(\dfrac{2m}{\pi T}\right)^{1/2}$. В результате получим согласно (24.3):

$$\alpha = \frac{2^{10}\pi^{3/2}}{3(2,71)^4}\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^3\frac{a_B^3 I}{\hbar}\left(\frac{I}{T}\right)^{1/2} = 35\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^3\frac{a_B^3 I}{\hbar}\left(\frac{I}{T}\right)^{1/2}.$$

2. Определить коэффициент рекомбинации согласно (24.13), пренебрегая влиянием связи электрона в возбужденном атоме на процесс его столкновения с невозбужденным атомом и полагая транспортное сечение этих столкновений независящим от скорости.

Р е ш е н и е. «Коэффициент диффузии» $B(\varepsilon)$ вычисляется аналогично тому, как это делалось в § 22, и равен

$$B(\varepsilon) = \frac{N}{3m}\langle v_{\text{ат}}^2\rangle\langle\sigma_t p^3\rangle. \quad (1)$$

Здесь N — плотность атомов в газе, m — масса электрона, $v_{\text{ат}}$ — относительная скорость возбужденного и невозбужденного атомов. Скорости $v_{\text{ат}}$ распределены по Максвеллу с приведенной массой ($M/2$, где M — масса атома) в качестве массы частицы; поэтому $\langle v_{\text{ат}}^2\rangle = 6T/M$. Далее, p в (1) есть импульс электрона в поле иона; усреднение $\sigma_t p^3$ производится по области фазового пространства электрона $\tau(\varepsilon)$, отвечающей заданному значению $|\varepsilon|$. При $\sigma_t = \text{const}$ находим

$$\langle\sigma_t p^3\rangle = \frac{\sigma_t}{\tau(\varepsilon)}\int p^3\delta\left(|\varepsilon| + \frac{p^2}{2m} - \frac{ze^2}{r}\right)d^3x\,d^3p = \frac{32\sqrt{2}}{3\pi}\sigma_t m|\varepsilon|^{3/2}.$$

Таким образом,

$$B = \frac{64\sqrt{2}\,T\sigma_t N|\varepsilon|^{3/2}}{3\pi M},$$

и затем вычисление по (24.13) дает окончательно

$$\alpha = \frac{32\sqrt{2\pi}m^{1/2}(ze^2)^3\sigma_t N}{3MT^{5/2}}. \quad (2)$$

Пренебрежение связью электрона в атоме законно, если частота возмущения, создаваемого атомом вблизи электрона ($\sim d/\overline{v}_{\text{ат}}$, d — атомные размеры), велика по сравнению с частотой обращения электрона с энергией $|\varepsilon| \sim T$. Отсюда получается условие $T \ll (e^2/d)(m/M)^{1/2}$.

§ 25. Амбиполярная диффузия

Рассмотрим диффузию заряженных частиц в слабо ионизованном газе. Как и в § 22, степень ионизации предполагается настолько малой, что столкновениями заряженных частиц друг с другом можно пренебречь по сравнению с их столкновениями

с нейтральными атомами. Даже в этих условиях диффузия двух родов заряженных частиц — электронов и ионов — происходит не независимо ввиду возникновения, в процессе диффузии, электрического поля (*W. Schottky*, 1924).

Уравнения диффузии имеют вид уравнений непрерывности для электронов (e) и ионов (i):

$$\frac{\partial N_e}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{i}_e = 0, \qquad \frac{\partial N_i}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{i}_i = 0, \tag{25.1}$$

причем плотности потоков выражаются через плотности числа частиц и их градиенты согласно

$$\mathbf{i}_e = -N_e b_e e\mathbf{E} - D_e \nabla N_e, \qquad \mathbf{i}_i = N_i b_i e\mathbf{E} - D_i \nabla N_i, \tag{25.2}$$

где D_e, D_i — коэффициенты диффузии, а b_e, b_i — подвижности электронов и ионов [1]). Те и другие связаны друг с другом соотношениями Эйнштейна

$$D_e = Tb_e, \quad D_i = Tb_i, \tag{25.3}$$

выражающими собой условие исчезновения потоков (25.2) в равновесии. С учетом этих соотношений и выразив напряженность поля через его потенциал ($\mathbf{E} = -\nabla\varphi$), перепишем уравнения (25.1) в виде

$$\frac{\partial N_e}{\partial t} = D_e \operatorname{div}\left[\nabla N_e - \frac{eN_e}{T}\nabla\varphi\right], \tag{25.4}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} = D_i \operatorname{div}\left[\nabla N_i + \frac{eN_i}{T}\nabla\varphi\right]. \tag{25.5}$$

К ним надо добавить уравнение Пуассона для потенциала:

$$\Delta\varphi = -4\pi e(N_i - N_e). \tag{25.6}$$

Система уравнений (25.4)–(24.6) существенно упрощается, если распределения концентраций N_e, N_i почти однородны. Тогда в коэффициентах при $\nabla\varphi$ в (25.4), (25.5) можно положить $N_e \approx N_i \approx \text{const} \equiv N_0$ и исключить φ с помощью (25.6). В результате получим

$$\frac{\partial N_e}{\partial t} = D_e\left[\Delta N_e - \frac{N_e - N_i}{a^2}\right], \tag{25.7}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} = D_i\left[\Delta N_i + \frac{N_e - N_i}{a^2}\right], \tag{25.8}$$

---

[1]) Кратность заряда ионов полагаем $z_i = 1$, как это обычно и имеет место при малой степени ионизации газа.

где $a^{-2} = 4\pi e^2 N_0/T$ (a — дебаевский радиус электронов или ионов; см. ниже § 31).

Хотя сечения рассеяния электронов и ионов, вообще говоря, одинакового порядка величины, их коэффициенты диффузии существенно различны из-за разницы в средних тепловых скоростях (v_T) тех и других:

$$\frac{D_e}{D_i} \sim \frac{v_{Te}}{v_{Ti}} \sim \sqrt{\frac{M}{m}}, \tag{25.9}$$

так что $D_e \gg D_i$. Это обстоятельство придает процессу диффузии своеобразные черты.

Рассмотрим эволюцию слабого возмущения электронной и ионной плотностей, характерные размеры которого $L \gg a$. В начальной стадии процесса, пока переменные части плотностей

$$|\delta N_e| \sim |\delta N_i| \sim |\delta N_e - \delta N_i|,$$

первые члены в правых частях уравнений (25.7), (25.8) малы по сравнению со вторыми:

$$\Delta N_e \sim \frac{\delta N_e}{L^2} \ll \frac{\delta N_e - \delta N_i}{a^2}. \tag{25.10}$$

Замечая также, что ввиду (25.9) $|\partial N_i/\partial t| \ll |\partial N_e/\partial t|$, имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}(\delta N_e - \delta N_i) = -\frac{D_e}{a^2}(\delta N_e - \delta N_i),$$

откуда

$$\delta N_e - \delta N_i = (\delta N_e - \delta N_i)_0 \exp\left(-\frac{D_e}{a^2}t\right). \tag{25.11}$$

Отсюда видно, что за время $\tau_{e1} \sim a^2/D_e$ разность $|\delta N_e - \delta N_i|$ станет малой по сравнению с самими δN_e и δN_i, т. е. газ станет квазинейтральным.

Следующая стадия процесса состоит в эволюции распределения электронов к равновесному (при заданном распределении ионов), определяемому условием обращения в нуль правой части (25.7):

$$\delta N_e - \delta N_i = a^2 \Delta N_e \approx a^2 \Delta N_i \sim \frac{a^2}{L^2}\delta N_i. \tag{25.12}$$

Эта стадия протекает по диффузионному уравнению (25.7) с характерным временем $\tau_{e2} \sim L^2/D_e$. Это время мало по сравнению с характерным временем диффузии ионов $\tau_i \sim L^2/D_i$, распределение которых можно поэтому все еще считать неизменным.

Окончательная релаксация возмущения электронной и ионной плотностей происходит согласно уравнению (25.8), которое после подстановки (25.12) принимает вид

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} = 2D_i \Delta N_i. \tag{25.13}$$

Таким образом, в течение времени $\sim \tau_i$ электроны и ионы диффундируют вместе ($\delta N_e \approx \delta N_i$) с удвоенным коэффициентом диффузии ионов (так называемая *амбиполярная диффузия*). Половина этого коэффициента связана с собственной диффузией ионов, а половина — с электрическим полем, создаваемым разбегающимися электронами.

Отметим, наконец, что уравнение (25.13) имеет более широкую область применимости, чем это следует из приведенного вывода. Даже если возмущение не является слабым, движение электронов быстро приводит к установлению их больцмановского распределения в поле и к выравниванию концентрации электронов и ионов, т. е. квазинейтральности. При этом

$$N_e = N_i = N_0 e^{e\varphi/T}, \quad e\varphi = T \ln \frac{N_i}{N_0}. \tag{25.14}$$

Подставив (25.14) в (25.5), приходим снова к уравнению (25.13), но уже без предположения о малости возмущения.

§ 26. Подвижность ионов в растворах сильных электролитов

Выписанные в предыдущем параграфе уравнения легко обобщаются на случай наличия ионов разных сортов. Они применимы также и к движению ионов в растворах *сильных электролитов* [1]). В пределе «бесконечного» разбавления раствора (т. е. при стремящейся к нулю его концентрации) подвижность каждого (a-го) сорта ионов стремится к постоянному пределу $b_a^{(0)}$, а его коэффициент диффузии — соответственно к значению

$$D_a^{(0)} = T b_a^{(0)}. \tag{26.1}$$

Настоящий параграф посвящен вычислению первых, по малой концентрации, поправочных членов для подвижностей ионов в слабом растворе [2]). Тем самым определятся также и поправочные члены в проводимости раствора. В электрическом поле **E**

---

[1]) Напомним, что сильными электролитами называют вещества, которые при растворении полностью диссоциируют на ионы.

[2]) Излагаемая ниже теория была развита *Дебаем* и *Хюккелем* (*P. Debye, E. Hückel*, 1923) и *Онсагером* (*L. Onsager*, 1927).

на каждый ион действует сила $ez_a\mathbf{E}$, под действием которой он приобретает направленную скорость $b_a ez_a\mathbf{E}$. Поэтому плотность тока в растворе

$$\mathbf{j} = \mathbf{E}\sum_a ez_a N_a \cdot b_a ez_a,$$

где N_a — концентрация (число ионов сорта a в единице объема), так что проводимость

$$\sigma = e^2 \sum_a N_a z_a^2 b_a. \tag{26.2}$$

Излагаемая ниже теория основана на тех же представлениях, что и теория термодинамических свойств плазмы и сильных электролитов. Они состоят в том, что вокруг каждого иона создается неоднородное распределение зарядов (ионное облако), экранирующее поле иона. Соответствующие формулы были получены в V, § 78, 79, для плазмы; аналогичные формулы для раствора сильного электролита отличаются лишь наличием в них отличной от единицы диэлектрической проницаемости растворителя ε и будут выписаны ниже.

Экранирующее облако меняет подвижность иона в силу двух различных эффектов. Во-первых, движение иона во внешнем электрическом поле искажает распределение зарядов в облаке, в результате чего возникает дополнительное поле, действующее на ион. Во-вторых, движение облака приводит в движение жидкость, что вызывает «снос» иона. Поправку первого рода называют *релаксационной*, а поправку второго рода — *электрофоретической.*

Релаксационная поправка. Начнем с вычисления поправки первого рода. Поскольку экранирующее облако выражает собой существование корреляции между положениями различных ионов, то речь идет о влиянии внешнего поля $\mathbf{E}$ на корреляционные функции.

Определим функцию парной корреляции w_{ab} так, что $N_a w_{ab}(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b)\, dV_a$ есть число ионов сорта a, находящихся в объеме dV_a вблизи точки $\mathbf{r}_a$ при условии, что один ион сорта b находится в точке $\mathbf{r}_b$; сорта a и b могут быть как различными, так и одинаковыми. Очевидно, что

$$w_{ab}(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) = w_{ba}(\mathbf{r}_b, \mathbf{r}_a), \tag{26.3}$$

а при $|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b| \to \infty$ функции $w_{ab} \to 1$. В равновесии функции w_{ab} зависят только от расстояний $|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|$; во внешнем поле это уже не так [1]).

[1]) Метод корреляционных функций в применении к равновесному состоянию плазмы (или электролита) изложен в V, § 79.

Корреляционные функции, как и всякие функции распределения, удовлетворяют уравнениям, имеющим вид уравнения непрерывности в соответствующем пространстве — в данном случае в конфигурационном пространстве двух частиц:

$$\frac{\partial w_{ab}}{\partial t} + \operatorname{div}_a \mathbf{j}_a + \operatorname{div}_b \mathbf{j}_b = 0, \tag{26.4}$$

где $\mathbf{j}_a$, $\mathbf{j}_b$ — плотности потоков вероятности для частиц a и b, а индексы у знака div указывают, по каким переменным ($\mathbf{r}_a$ или $\mathbf{r}_b$) производится дифференцирование.

Поток $\mathbf{j}_a$ имеет вид

$$\mathbf{j}_a = -Tb_a^{(0)} \nabla_a w_{ab} + b_a^{(0)} z_a e w_{ab} (\mathbf{E} - \nabla_a \varphi_b), \tag{26.5}$$

а $\mathbf{j}_b$ — такой же вид с переставленными индексами a и b. Первый член в (26.5) описывает диффузионное перемещение ионов a, происходящее уже и в отсутствие внешнего поля. Второй член — плотность потока ионов под действием сил со стороны внешнего поля $\mathbf{E}$ и поля $-\nabla_a \varphi_b$, создаваемого в точке $\mathbf{r}_a$ искаженным облаком при условии, что в точке $\mathbf{r}_b$ находится ион b. Потенциал $\varphi_a = \varphi_b(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b)$ последнего поля удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta_a \varphi_b(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) = -\frac{4\pi}{\varepsilon} \left[\sum_c e z_c N_c w_{cb}(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) + e z_b \delta(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b) \right]. \tag{26.6}$$

Первый член в квадратных скобках — средняя плотность зарядов всех сортов ионов в облаке, а второй член — плотность заряда, локализованного (согласно условию) в точке $\mathbf{r}_b$. Множитель $1/\varepsilon$ выражает ослабление поля в диэлектрической среде (растворителе).

Предполагая раствор достаточно разбавленным, мы пренебрегаем тройными корреляциями между положениями ионов. В этом же приближении функции парной корреляции w_{ab} близки к 1; введем малые величины

$$\omega_{ab} = w_{ab} - 1. \tag{26.7}$$

Этот же порядок малости имеют потенциалы φ_a. Пренебрегая членами второго порядка малости, перепишем (26.5) в виде

$$\mathbf{j}_a = b_a^{(0)} [-T \nabla_a \omega_{ab} + e z_a (1 + \omega_{ab}) \mathbf{E} - e z_a \nabla_a \varphi_b]. \tag{26.8}$$

В уравнении же (26.6) в силу электронейтральности раствора в среднем ($\sum e z_c N_c = 0$) можно просто написать ω_{ab} вместо w_{ab}:

$$\Delta_a \varphi_b(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) = -\frac{4\pi}{\varepsilon} \left[\sum_c e z_c N_c \omega_{cb}(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) + e z_b \delta(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b) \right]. \tag{26.9}$$

В постоянном однородном поле $\mathbf{E}$ функции w_{ab} не зависят от времени, а координаты двух точек входят в них лишь в виде разности $\mathbf{r} = \mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b$; при этом $\nabla_a w_{ab} = -\nabla_b w_{ab}$. Подстановка $\mathbf{j}_a$ из (26.8) (и аналогичного выражения для $\mathbf{j}_b$) в (26.4) приводит теперь к уравнению

$$T(b_a^{(0)} + b_b^{(0)})\Delta\omega_{ab}(\mathbf{r}) + ez_a b_a^{(0)}\Delta\varphi_b(\mathbf{r}) + ez_b b_b^{(0)}\Delta\varphi_a(-\mathbf{r}) = \\ = (z_a b_a^{(0)} - z_b b_b^{(0)})e\mathbf{E}\nabla\omega_{ab}(\mathbf{r}), \quad (26.10)$$

где все производные берутся по $\mathbf{r}$.

Предполагая внешнее поле слабым, можно решать задачу последовательными приближениями по $\mathbf{E}$. В нулевом приближении, при $\mathbf{E} = 0$, потенциалы $\varphi_a^{(0)}(\mathbf{r})$ — четные функции $\mathbf{r}$. Имея в виду, что все функции ω_{ab} и φ_a должны обращаться в нуль при $r \to \infty$, находим тогда из (26.10):

$$T(b_a^{(0)} + b_b^{(0)})\omega_{ab}^{(0)} + e(b_a^{(0)} z_a \varphi_b^{(0)} + b_b^{(0)} z_b \varphi_a^{(0)}) = 0. \quad (26.11)$$

Ищем решение в виде

$$\omega_{ab}^{(0)}(\mathbf{r}) = z_a z_b \omega^{(0)}(\mathbf{r}), \quad e\varphi_a^{(0)}(\mathbf{r}) = -Tz_a\omega^{(0)}(\mathbf{r}). \quad (26.12)$$

При этом (26.11) удовлетворяется тождественно, а из (26.9) находим уравнение для функции $\omega^{(0)}(\mathbf{r})$:

$$\Delta\omega^{(0)}(\mathbf{r}) - \frac{1}{a^2}\omega^{(0)}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi e^2}{\varepsilon T}\delta(\mathbf{r}), \quad (26.13)$$

где

$$a^{-2} = \frac{4\pi e^2}{\varepsilon T}\sum_c N_c z_c^2. \quad (26.14)$$

Решение этого уравнения:

$$\omega^{(0)}(\mathbf{r}) = -\frac{e^2}{\varepsilon T}\frac{e^{-r/a}}{r}. \quad (26.15)$$

Величина a есть дебаевский радиус экранирования в растворе электролита.

В следующем приближении полагаем

$$\varphi_a = \varphi_a^{(0)} + \varphi_a^{(1)}, \quad \omega_{ab} = \omega_{ab}^{(0)} + \omega_{ab}^{(1)}, \quad (26.16)$$

где индексом (1) отмечены малые добавки к нулевым значениям. Будучи скалярами, все эти поправочные функции имеют вид $\mathbf{E}\mathbf{r}f(r)$, где $f(r)$ — функции только от абсолютной величины r;

поэтому все $\omega_{ab}^{(1)}$ и $\varphi_a^{(1)}$ — нечетные функции $\mathbf{r}$. Поскольку согласно (26.3) имеем

$$\omega_{ab}^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \equiv \omega_{ab}^{(1)}(\mathbf{r}) = \omega_{ba}^{(1)}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) \equiv \omega_{ba}^{(1)}(-\mathbf{r}),$$

то отсюда следует также, что

$$\omega_{ab}^{(1)}(\mathbf{r}) = -\omega_{ba}^{(1)}(\mathbf{r}) \tag{26.17}$$

(напомним, что везде $\mathbf{r} = \mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b$). Если ионы a и b относятся к одному сорту, то перестановка индексов не может изменить функцию $\omega_{ab}^{(1)}(\mathbf{r})$ и потому из (26.17) следует, что такие $\omega_{aa}^{(1)} = 0$. Это значит, что поправки $\omega_{ab}^{(1)}$ существуют лишь для корреляционных функций пар различных ионов.

Для упрощения дальнейших вычислений ограничимся случаем электролита всего с двумя сортами ионов. В этом случае отлична от нуля лишь одна функция $\omega_{12}^{(1)}(\mathbf{r}) = -\omega_{21}^{(1)}(\mathbf{r})$ и подстановка (26.16) в уравнение Пуассона (26.9) дает

$$\Delta\varphi_2^{(1)}(\mathbf{r}) = -\frac{4\pi e}{\varepsilon} z_1 N_1 \omega_{12}^{(1)}(\mathbf{r}), \tag{26.18}$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. С учетом условия электронейтральности раствора и указанных выше свойств симметрии функций легко убедиться, что потенциал $\varphi_1^{(1)}(\mathbf{r})$ удовлетворяет такому же уравнению, а потому $\varphi_1^{(1)}(\mathbf{r}) = \varphi_2^{(1)}(\mathbf{r})$.

При подстановке (26.16) в уравнение (26.10) сохраняем в его правой части лишь член с $\omega_{12}^{(0)}$ и находим

$$T(b_1^{(0)} + b_2^{(0)})\Delta\omega_{12}^{(1)}(\mathbf{r}) + e(b_1^{(0)} z_1 - b_2^{(0)} z_2)\Delta\varphi_2^{(1)}(\mathbf{r}) =$$
$$= (b_1^{(0)} z_1 - b_2^{(0)} z_2) e z_1 z_2 \mathbf{E}\nabla\omega^{(0)}(\mathbf{r}). \tag{26.19}$$

Система уравнений (26.18), (26.19) решается методом Фурье. Для фурье-компонент $\omega_{12\mathbf{k}}^{(1)}$ и $\varphi_{2\mathbf{k}}^{(1)}$ получается система алгебраических уравнений, отличающаяся от (26.18), (26.19) заменой операторов $\nabla \to i\mathbf{k}$, $\Delta \to -\mathbf{k}^2$. Фурье-компонента функции $\omega^{(0)}(\mathbf{r})$ (26.15), стоящей в правой части (26.19), дается формулой

$$\omega_{\mathbf{k}}^{(0)} = -\frac{e^2}{\varepsilon T} \frac{4\pi}{k^2 + a^{-2}}.$$

Мы приведем сразу окончательный результат для фурье-компоненты потенциала:

$$\varphi_{2\mathbf{k}}^{(1)} = \frac{4\pi e^2 z_1 z_2 q}{\varepsilon T a^2} \frac{i\mathbf{k}\mathbf{E}}{k^2(k^2+a^{-2})(k^2+qa^{-2})}, \tag{26.20}$$

где

$$q = \frac{b_1^{(0)} z_1 - b_2^{(0)} z_2}{(z_1 - z_2)(b_1^{(0)} + b_2^{(0)})}. \tag{26.21}$$

Поскольку z_1 и z_2 имеют противоположные знаки, то очевидно, что $0 < q < 1$.

Вспомним, что $\varphi_2^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ есть дополнительный потенциал, возникающий в точке $\mathbf{r}_1$ при условии, что в точке $\mathbf{r}_2$ находится ион *2*. Напряженность этого поля есть

$$\mathbf{E}_2^{(1)}(\mathbf{r}) = -\nabla_1 \varphi_2^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -\nabla \varphi_2^{(1)}(\mathbf{r}).$$

Его значение при $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$ (т. е. при $\mathbf{r} = 0$) дает интересующее нас поле, действующее на сам ион *2* и тем самым меняющее его подвижность.

Фурье-компонента $\mathbf{E}_{2\mathbf{k}}^{(1)} = -i\mathbf{k}\varphi_{2\mathbf{k}}^{(1)}$. Поэтому

$$\mathbf{E}_2^{(1)}(0) = -\int i\mathbf{k}\varphi_{2\mathbf{k}}^{(1)} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\bigg|_{\mathbf{r}=0} = -\int i\mathbf{k}\varphi_{2\mathbf{k}}^{(1)} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}.$$

При подстановке сюда (26.20) возникает интеграл

$$\mathbf{I} = \int \frac{\mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{E})}{k^2(k^2+a^{-2})(k^2+a^{-2}q)} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}.$$

Усреднение по направлениям $\mathbf{k}$ заменяет $\mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{E})$ на $k^2\mathbf{E}/3$, после чего интеграл по k вычисляется по вычетам подынтегрального выражения в полюсах $k = i/a$ и $k = i\sqrt{q}/a$ и дает

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{E}a}{12\pi\left(1+\sqrt{q}\right)}.$$

Таким образом, действующее на ион *2* суммарное поле есть

$$\mathbf{E} + \mathbf{E}_2^{(1)}(0) = \left[1 - \frac{e^2|z_1 z_2|q}{3\varepsilon T a\left(1+\sqrt{q}\right)}\right]\mathbf{E}. \tag{26.22}$$

Такой же результат получается и для поля, действующего на ион *1*, как это очевидно уже из симметрии выражения (26.22) по индексам 1 и 2. Умножив поле (26.22) на $b^{(0)}ez$, мы получим приобретаемую ионом скорость, а написав эту же скорость в виде $bez\mathbf{E}$, найдем, что выражение в квадратных скобках определяет

также и отношение $b/b^{(0)}$. Таким образом, для искомой релаксационной поправки к подвижности иона находим

$$b_{\text{рел}} = -b\frac{e^2|z_1z_2|q}{3\varepsilon Ta\left(1+\sqrt{q}\right)}. \tag{26.23}$$

Отметим, что этот эффект уменьшает подвижность.

Электрофоретическая поправка. Перейдем к вычислению поправки, связанной с движением растворителя. Вопрос ставится при этом следующим образом.

Рассматриваем некоторый выделенный в растворе ион вместе с окружающим его экранирующим облаком. Это облако электрически заряжено с плотностью

$$\delta\rho = \sum_a ez_a\delta N_a,$$

где δN_a — отличие концентрации ионов a-го сорта в облаке от его среднего значения N_a в растворе. В электрическом поле $\mathbf{E}$ на жидкость, несущую это облако, действуют поэтому силы с объемной плотностью $\mathbf{f} = \mathbf{E}\delta\rho$. Под влиянием этих сил жидкость движется, а это движение в свою очередь увлекает рассматриваемый центральный ион.

Распределение ионов в облаке связано с потенциалом φ поля в нем формулой Больцмана:

$$\delta N_a = N_0\left[e^{-z_ae\varphi/T} - 1\right] \approx -\frac{z_ae\varphi N_a}{T}.$$

Ввиду слабости поля $\mathbf{E}$, деформацией ионного облака в рассматриваемой теперь задаче можно пренебречь. В сферически-симметричном облаке потенциал дается формулой

$$\varphi = ez_b\frac{e^{-r/a}}{r},$$

где ez_b — заряд центрального иона, а a определено формулой (26.14) (ср. V, § 78). Поэтому полная плотность зарядов в облаке

$$\delta\rho = -\frac{e^2\varphi}{T}\sum_a N_az_a^2 = -\frac{ez_b}{4\pi a^2}\frac{e^{-r/a}}{r}. \tag{26.24}$$

Ввиду медленности движения под влиянием поля $\mathbf{E}$, жидкость можно считать несжимаемой, так что

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0. \tag{26.25}$$

По той же причине можно опустить квадратичный по скорости член в уравнении Навье–Стокса, которое сводится тогда (для стационарного движения) к уравнению

$$\eta\Delta\mathbf{v} - \nabla P + \mathbf{f} = 0, \tag{26.26}$$

где P — давление, η — коэффициент вязкости жидкости (растворителя).

Перейдя в уравнениях (26.25), (26.26) к фурье-компонентам, имеем

$$\mathbf{k}\mathbf{v}_\mathbf{k} = 0, \quad -\eta k^2\mathbf{v}_\mathbf{k} - i\mathbf{k}P_\mathbf{k} + \mathbf{E}\delta\rho_\mathbf{k} = 0.$$

Умножив второе уравнение на $i\mathbf{k}$, находим $P_\mathbf{k} = -i\mathbf{k}\mathbf{E}\delta\rho_\mathbf{k}/k^2$ и затем

$$\mathbf{v}_\mathbf{k} = \frac{\delta\rho_\mathbf{k}}{\eta}\frac{k^2\mathbf{E} - \mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{E})}{k^4}. \tag{26.27}$$

Фурье-компонента плотности зарядов (26.24):

$$\delta\rho_\mathbf{k} = -\frac{ez_b}{a^2k^2 + 1}. \tag{26.28}$$

Интересующая нас скорость жидкости в точке $r = 0$ нахождения центрального иона дается интегралом

$$\mathbf{v}(0) = \int \mathbf{v}_\mathbf{k}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}.$$

Подставив сюда $\mathbf{v}_\mathbf{k}$ из (26.27), (26.28), получим после интегрирования по направлениям $\mathbf{k}$:

$$\mathbf{v}(0) = -\mathbf{E}\frac{ez_b}{(2\pi)^3\eta}\frac{8\pi}{3}\int\limits_0^\infty \frac{dk}{k^2a^2 + 1}$$

и окончательно

$$\mathbf{v}(0) = -\frac{ez_b}{6\pi\eta a}\mathbf{E}.$$

Эта скорость складывается со скоростью $ez_bb_b^{(0)}\mathbf{E}$, приобретаемой ионом непосредственно под действием поля. Отсюда ясно, что искомая электрофоретическая поправка к подвижности одинакова для ионов всех сортов и равна

$$b_{\text{эф}} = -\frac{1}{6\pi a\eta}. \tag{26.29}$$

Полная поправка дается суммой обоих выражений (26.23) и (26.29). Обе отрицательны и вместе с $1/a$ пропорциональны корню квадратному из концентрации.

ГЛАВА III

БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНАЯ ПЛАЗМА

§ 27. Самосогласованное поле

Широкую область применения кинетической теории представляет *плазма*, под которой мы будем понимать полностью ионизованный газ [1]). Термодинамическая теория равновесного состояния плазмы рассмотрена в других томах этого курса (см. V, § 78–80, IX, § 85). Главы III–V этой книги посвящены изучению кинетических свойств плазмы. Во избежание непринципиальных усложнений мы будем (где это понадобится) считать плазму двухкомпонентной — содержащей лишь электроны (заряд $-e$) и положительные ионы одного сорта с зарядом ze.

Как и для обычных газов, условие применимости метода кинетического уравнения к плазме требует ее достаточной разреженности; газ должен лишь слабо отклоняться от идеальности. Ввиду медленности убывания кулоновских сил, однако, это условие для плазмы более сильное, чем для газа из нейтральных частиц. Не делая пока различия между частицами с различными зарядами, напишем условие слабой неидеальности плазмы в виде

$$T \gg e^2/\overline{r} \sim e^2 N^{1/3}, \tag{27.1}$$

где T — температура плазмы, N — полное число частиц в единице объема, а $\overline{r} \sim N^{-1/3}$ — среднее расстояние между ними. Это условие выражает собой малость средней энергии взаимодействия двух ионов по сравнению с их средней кинетической энергией. Выразим это условие еще и в другом виде, введя так называемый *дебаевский радиус* плазмы a, определенный согласно

$$a^{-2} = \frac{4\pi}{T} \sum_a N_a (z_a e)^2, \tag{27.2}$$

где суммирование производится по всем родам ионов; напомним (см. V, § 78), что a определяет расстояние, на котором экранируется кулоновское поле заряда в плазме. Введя $a \sim \left(\dfrac{T}{4\pi N e^2}\right)^{1/2}$

---

[1]) Термин введен *Ленгмюром* (*I. Langmuir*, 1923), положившим начало систематическому теоретическому изучению плазмы.

в (27.1), получим

$$e^2N^{1/3}T \sim \frac{\overline{r}^2}{4\pi a^2} \ll 1 \tag{27.3}$$

— в разреженной плазме среднее расстояние между частицами должно быть мало по сравнению с дебаевским радиусом, т. е. «ионное облако» вокруг заряда должно действительно содержать много частиц. Малое отношение (27.3) играет для плазмы роль «газового параметра».

Везде в главах III–V (за исключением лишь § 40) плазма будет предполагаться классической, т. е. подразумевается выполненным лишь очень слабое условие — температура плазмы должна быть высока по сравнению с температурой вырождения ее электронной компоненты:

$$T \gg \hbar^2N^{2/3}/m, \tag{27.4}$$

где m — масса электрона (ср. V, § 80).

Кинетическое уравнение для каждого сорта частиц в плазме (электронов и ионов) имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \dot{\mathbf{p}}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = \mathrm{St}\, f, \tag{27.5}$$

где f — функция распределения данных частиц по координатам и импульсам, St — их интеграл столкновений (с частицами всех сортов). При этом производная $\dot{\mathbf{p}}$ определяется силой, действующей на частицу. Эта сила в свою очередь выражается через напряженности электрического и магнитного полей, создаваемых всеми остальными частицами в точке нахождения данной частицы. Здесь возникает, однако, следующий вопрос.

В случае нейтральных частиц (атомов или молекул), благодаря быстрому убыванию сил взаимодействия, заметные изменения в их движении, интерпретируемые как столкновения, происходят лишь на малых прицельных расстояниях (порядка величины самих атомных размеров). В промежутках же между такими столкновениями частицы движутся как свободные; именно поэтому в левой части кинетического уравнения для обычных газов полагается $\dot{\mathbf{p}} = 0$. В плазме же, ввиду дальнодействующего характера кулоновских сил, заметное изменение движения частиц происходит даже на больших прицельных расстояниях; экранирование кулоновских сил в плазме происходит лишь на расстояниях $\sim a$, которые согласно условию (27.3) велики даже по сравнению с межчастичными расстояниями (см. V, § 78, а также задачу 1 к § 31). Не все эти случаи, однако, должны интерпретироваться в кинетическом уравнении как столкновения. В кинетической теории хаотические столкновения представляют собой тот механизм, который приводит к приближению к

состоянию равновесия с соответствующим возрастанием энтропии системы. Между тем столкновения на больших ($\sim a$) прицельных расстояниях не могут служить таким релаксационным механизмом. Дело в том, что взаимодействие двух заряженных частиц на таких расстояниях представляет собой в действительности коллективный эффект, в котором участвует большое число частиц. Соответственно и то эффективное поле, которым можно описать это взаимодействие, создается большим числом частиц, т. е. имеет макроскопический характер. Тем самым весь процесс приобретает макроскопически достоверный, а не случайный характер; такие процессы не могут приводить к возрастанию энтропии системы. Они должны быть исключены поэтому из понятия столкновений, учитываемых в правой части кинетических уравнений.

Такому выделению отвечает представление точных микроскопических значений электрического ($\mathbf{e}$) и магнитного ($\mathbf{h}$) полей, действующих на некоторую частицу в плазме, в виде

$$\mathbf{e} = \mathbf{E} + \mathbf{e}', \quad \mathbf{h} = \mathbf{B} + \mathbf{h}', \tag{27.6}$$

где $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ — значения полей, усредненные по областям, содержащим много частиц, — областей с размерами, большими по сравнению с расстояниями между частицами (и в то же время малыми по сравнению с дебаевским радиусом). Члены же $\mathbf{e}'$ и $\mathbf{h}'$ описывают тогда случайные флуктуации полей, которые и приводят к случайным изменениям движения частиц, т. е. к столкновениям.

По своему точному смыслу $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ в (27.6) — средние значения полей в месте нахождения заданной частицы. Но в силу предполагаемой разреженности плазмы можно пренебречь корреляцией между одновременными положениями частиц в ней. Тогда точка нахождения каждой заданной частицы ничем не выделена, так что под $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ можно понимать просто поля, усредненные в обычном для макроскопической электродинамики смысле. Эти поля и будут определять лоренцеву силу, которая должна быть подставлена в уравнение (27.5) вместо $\dot{\mathbf{p}}$.

В этой главе мы будем рассматривать явления, в которых несущественны столкновения между частицами плазмы; в таких случаях говорят о *бесстолкновительной* плазме. Точные условия возможности пренебрежения столкновениями зависят, вообще говоря, от конкретной постановки задачи. Но обычно необходимое условие состоит в требовании малости эффективной частоты столкновений ν (величина, обратная среднему времени свободного пробега частицы) по сравнению с частотой ω изменения макроскопических полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ в данном процессе:

$$\nu \ll \omega. \tag{27.7}$$

В силу этого условия интеграл столкновений в кинетическом уравнении оказывается малым по сравнению с производной

$\partial f/\partial t$. Столкновениями можно пренебречь также и в случае, если средняя длина пробега частиц $l \sim \overline{v}/\nu$ велика по сравнению с расстоянием L, на котором меняется поле («длина волны» поля). Если обозначить $1/L \sim k$, то это условие запишется в виде

$$\nu \ll k\overline{v}. \tag{27.8}$$

При этом интеграл столкновений окажется малым по сравнению с членом $\mathbf{v}\nabla f$ в левой части кинетического уравнения.

После пренебрежения интегралом столкновений кинетические уравнения для функций распределения электронов (f_e) и ионов (f_i) принимают вид

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f_e}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{r}} - e\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{vB}]\right)\frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{p}} = 0, \\ &\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{r}} + ze\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{vB}]\right)\frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{p}} = 0. \end{aligned} \tag{27.9}$$

К этим уравнениям надо присоединить систему усредненных уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \qquad && \operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \\ &\operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \qquad && \operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho, \end{aligned} \tag{27.10}$$

где ρ и $\mathbf{j}$ — средние плотность зарядов и плотность тока, выражающиеся через функции распределения очевидными формулами

$$\begin{aligned} \rho &= e\int(zf_i - f_e)\,d^3p, \\ \mathbf{j} &= e\int(zf_i - f_e)\mathbf{v}\,d^3p. \end{aligned} \tag{27.11}$$

Уравнения (27.9)–(27.11) составляют связанную систему уравнений, определяющих одновременно как функции распределения f_e, f_i, так и поля $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$; определяемые таким образом поля называют *самосогласованными*. Самосогласованное поле было введено в кинетические уравнения *А.А. Власовым* (1937); систему уравнений (27.9)–(27.11) называют *уравнениями Власова*.

В соответствии со сказанным выше, эволюция функций распределения в бесстолкновительной плазме с самосогласованным полем не связана с увеличением энтропии и потому сама по себе не может привести к установлению статистического равновесия. Это очевидно и прямо из вида уравнений (27.9), в которых $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ выступают формально лишь как внешние поля, наложенные на плазму.

Каждое из кинетических уравнений (27.9) имеет вид

$$\frac{df}{dt} = 0, \tag{27.12}$$

где полная производная означает дифференцирование вдоль траектории частиц. Общее решение такого уравнения есть произвольная функция от всех интегралов движения частицы в полях **E** и **B**.

§ 28. Пространственная дисперсия в плазме

Перепишем уравнения (27.10) в виде, более обычном для макроскопической электродинамики, введя в них наряду с напряженностью **E** также и электрическую индукцию **D**. При этом мы определим вектор электрической поляризации **P** соотношениями

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \mathbf{j}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{P} = -\rho; \tag{28.1}$$

непротиворечивость этих двух формул обеспечивается уравнением непрерывности $\operatorname{div}\mathbf{j} = -\partial\rho/\partial t$ (мы вернемся еще к этому определению ниже в этом параграфе). Тогда уравнения (27.10) примут вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \\ \operatorname{rot}\mathbf{B} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{D} = 0. \end{aligned} \tag{28.2}$$

В слабых полях связь индукции **D** с напряженностью **E** линейна[1]). Но уже в обычных средах эта связь не имеет мгновенного характера по времени: значение $\mathbf{D}(t, \mathbf{r})$ в некоторый момент времени t зависит, вообще говоря, от значений $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ не только в тот же, но и во все предшествующие моменты времени (см. VIII, § 58). В плазме к этому добавляется еще и нелокальность связи: значение $\mathbf{D}(t, \mathbf{r})$ в некоторой точке пространства $\mathbf{r}$ зависит от значений $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ не только в той же точке, но, вообще говоря, и во всем объеме плазмы. Это свойство связано с тем, что «свободное» (т. е. без столкновений) движение частиц в плазме определяется значениями поля на всей их траектории.

Наиболее общая линейная связь между функциями $\mathbf{D}(t, \mathbf{r})$ и $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ может быть записана в виде

$$D_\alpha(t, \mathbf{r}) = E_\alpha(t, \mathbf{r}) + \int_{-\infty}^{t} \int K_{\alpha\beta}(t - t', \mathbf{r}, \mathbf{r}') E_\beta(t', \mathbf{r}')\, d^3x'\, dt'.$$

Для пространственно-однородной плазмы ядро интегрального оператора $K_{\alpha\beta}$ зависит только от разности пространственных аргументов $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$. Введя обозначения $\mathbf{r}-\mathbf{r}' = \boldsymbol{\rho}$, $t-t' = \tau$, перепишем

---

[1]) Условие слабости поля будет сформулировано в § 29.

эту связь в виде

$$D_\alpha(t,\mathbf{r}) = E_\alpha(t,\mathbf{r}) + \int\limits_0^\infty\!\!\int K_{\alpha\beta}(\tau,\boldsymbol{\rho})E_\beta(t-\tau,\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho})\,d^3\rho\,d\tau. \qquad (28.3)$$

Как обычно, путем разложения в ряд или интеграл Фурье можно представить поле в виде совокупности плоских волн, в которых **E** и **D** пропорциональны $e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}$. Для таких волн связь **D** с **E** принимает вид

$$D_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta}(\omega,\mathbf{k})E_\beta, \qquad (28.4)$$

где тензор диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega,\mathbf{k}) = \delta_{\alpha\beta} + \int\limits_0^\infty\!\!\int K_{\alpha\beta}(\tau,\boldsymbol{\rho})e^{i(\omega\tau-\mathbf{k}\rho)}\,d^3\rho\,d\tau. \qquad (28.5)$$

Из этого определения непосредственно следует, что

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(-\omega,-\mathbf{k}) = \varepsilon^*_{\alpha\beta}(\omega,\mathbf{k}). \qquad (28.6)$$

Таким образом, нелокальность связи между **E** и **D** приводит к тому, что диэлектрическая проницаемость плазмы оказывается функцией не только от частоты, но и от волнового вектора; об этой последней зависимости говорят как о *пространственной дисперсии*, подобно тому, как зависимость от частоты называют *временной* (или *частотной*) *дисперсией*.

Вернувшись к уравнениям (28.1), (28.2), напомним, что при формулировке уравнений Максвелла для переменных полей в обычных средах наряду с диэлектрической поляризацией **P** вводится также и намагниченность **M**, причем средний микроскопический ток разлагается на две части $\partial\mathbf{P}/\partial t$ и $c\,\mathrm{rot}\,\mathbf{M}$; в плоской волне эти выражения сводятся к $-i\omega\mathbf{P}$ и $ic[\mathbf{kM}]$. Но при наличии пространственной дисперсии, когда все величины все равно зависят от **k**, такое разделение нецелесообразно.

Отметим также, что, если ток **j** и плотность зарядов ρ целиком включены в определение поляризации **P** (как это сделано в (28.1)), последняя зависит, вообще говоря, как от электрического поля **E**, так и от магнитного поля **B**. Но поле **B** можно выразить через **E** согласно первой паре уравнений Максвелла (28.2), содержащей только эти две величины, т. е. (для плоской волны) согласно $[\mathbf{kE}] = \omega\mathbf{B}/c$, $\mathbf{kB} = 0$. Тогда и поляризация **P** окажется выраженной только через **E**, что и подразумевается в определении $\varepsilon_{\alpha\beta}$ согласно (28.3)–(28.5).

Зависимость от волнового вектора вносит в функции $\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega,\mathbf{k})$ выделенное направление — направление ее аргумента k. Поэтому при наличии пространственной дисперсии диэлектрическая проницаемость является тензором даже в изотропной среде.

Общий вид такого тензора можно представить в форме

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_t(\omega, k)\left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\right) + \varepsilon_l(\omega, k)\frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}. \tag{28.7}$$

При умножении на E_β первый член в (28.7) дает в индукцию $\mathbf{D}$ вклад, перпендикулярный волновому вектору, а второй член — вклад, параллельный $\mathbf{k}$. Для полей $\mathbf{E}$, перпендикулярных $\mathbf{k}$ или направленных по $\mathbf{k}$, связь между $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ сводится соответственно к $D = \varepsilon_t \mathbf{E}$ или $\mathbf{D} = \varepsilon_l \mathbf{E}$. Скалярные функции ε_t и ε_l называют соответственно *поперечной* и *продольной проницаемостями*. Они зависят от двух независимых переменных — частоты ω и абсолютной величины волнового вектора k. При $\mathbf{k} \to 0$ выделенное направление исчезает, и тогда тензор $\varepsilon_{\alpha\beta}$ должен сводиться к виду $\varepsilon(\omega)\delta_{\alpha\beta}$, где $\varepsilon(\omega)$ — обычная скалярная проницаемость, учитывающая лишь частотную дисперсию. Соответственно предельные значения функций ε_t и ε_l одинаковы и равны

$$\varepsilon_t(\omega, 0) = \varepsilon_l(\omega, 0) = \varepsilon(\omega). \tag{28.8}$$

Согласно (28.6) скалярные функции ε_l и ε_t обладают свойством

$$\varepsilon_l(-\omega, k) = \varepsilon_l^*(\omega, k), \quad \varepsilon_t(-\omega, k) = \varepsilon_t^*(\omega, k). \tag{28.9}$$

Пространственная дисперсия не влияет на свойства ε_l и ε_t как функций комплексной переменной ω. Для этих функций остаются в силе все известные результаты (см. VIII, § 62), относящиеся к проницаемости $\varepsilon(\omega)$ обычных сред без пространственной дисперсии.

В этой главе мы будем рассматривать только изотропную плазму. Подчеркнем, что это предполагает не только отсутствие внешнего магнитного поля, но и изотропию функции распределения частиц по импульсам (в невозмущенной полем плазме). В противном случае появляются новые выделенные направления и тензорная структура $\varepsilon_{\alpha\beta}$ усложняется.

Уже было указано, что происхождение пространственной дисперсии в плазме связано с зависимостью «свободного» движения частиц от значений поля вдоль их траектории. Фактически, конечно, существенное влияние на движение частицы в каждой точке ее траектории оказывают значения поля не на всей траектории, а лишь на некоторых ее отрезках не слишком большой длины. Порядок величины этих длин может определяться двумя механизмами: столкновениями, нарушающими свободное движение по траектории, или усреднением осциллирующего поля за время пролета частицы по траектории. Для первого механизма характерным расстоянием является длина свободного пробега частицы $l \sim \overline{v}/\nu$, а для второго — расстояние $\overline{v}/\omega$, на которое частица, двигаясь со средней скоростью $\overline{v}$, перемещается за время одного периода поля.

В выражении (28.3) дальности корреляции между значениями **D** и **E** в различных точках пространства соответствуют расстояния $r_{\text{кор}}$, на которых существенно убывает функция $K_{\alpha\beta}(\tau, \boldsymbol{\rho})$. Можно утверждать, следовательно, что порядок величины этих расстояний дается меньшей из двух величин, l или $\overline{v}/\omega$ (причем надо брать ее для тех частиц — электронов или ионов, для которых она имеет большее значение). Если $\nu \ll \omega$, то меньшей является величина $\overline{v}/\omega$ и тогда

$$r_{\text{кор}} \sim \overline{v}/\omega. \tag{28.10}$$

Пространственная дисперсия значительна при $kr_{\text{кор}} \gtrsim 1$ и исчезает при $kr_{\text{кор}} \ll 1$; в последнем случае в (28.5) можно заменить $e^{-i\mathbf{k}\rho} \approx 1$ и интеграл перестает зависеть от **k**. С $r_{\text{кор}}$ из (28.10) мы находим, следовательно, что пространственная дисперсия существенна для волн, фазовая скорость которых (ω/k) сравнима или меньше средней скорости частиц в плазме. В обратном предельном случае при

$$\omega \gg k\overline{v} \tag{28.11}$$

пространственная дисперсия несущественна.

Важно, что значения $r_{\text{кор}}$ в плазме могут быть велики по сравнению со средними расстояниями между частицами $(\sim N^{-1/3})$. Именно это условие делает возможным макроскопическое описание пространственной дисперсии в терминах диэлектрической проницаемости даже тогда, когда дисперсия значительна. Напомним (см. VIII, § 83), что в обычных средах роль длины корреляции играют атомные размеры и потому уже условие применимости макроскопической теории требует соблюдения неравенства $kr_{\text{кор}} \ll 1$ (длина волны должна быть велика по сравнению с атомными размерами); именно поэтому в таких средах пространственная дисперсия (проявляющаяся, например, в так называемой естественной оптической активности) всегда оказывается лишь малой поправкой.

§ 29. Диэлектрическая проницаемость бесстолкновительной плазмы

В общем случае произвольных значений **k**, когда существенную роль играет пространственная дисперсия, вычисление проницаемости требует применения кинетического уравнения. Сделаем это, предполагая, что в диэлектрической поляризации плазмы участвуют только электроны, а движение ионов несущественно (в таких случаях говорят об *электронной плазме*); к условию допустимости такого предположения и к обобщению результатов мы вернемся в § 31.

Для слабого поля ищем функцию распределения электронов в виде $f = f_0 + \delta f$, где f_0 — невозмущенная полем стационарная изотропная и пространственно-однородная функция распределения, а δf — ее изменение под влиянием поля. Пренебрегая в кинетическом уравнении членами второго порядка малости, получим

$$\frac{\partial\,\delta f}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial\,\delta f}{\partial \mathbf{r}} = e\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{vB}]\right)\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}}.$$

В изотропной плазме функция распределения зависит только от абсолютной величины импульса. Для такой функции направление вектора $\partial f_0/\partial\mathbf{p}$ совпадает с направлением $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ и его произведение с $[\mathbf{vB}]$ обращается в нуль. Таким образом, в линейном приближении магнитное поле не влияет на функцию распределения. Для δf остается уравнение

$$\frac{\partial\,\delta f}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial\,\delta f}{\partial \mathbf{r}} = e\mathbf{E}\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}}. \tag{29.1}$$

Вместе с полем $\mathbf{E}$ функция δf предполагается пропорциональной $\exp\left[i(\mathbf{kr} - \omega t)\right]$. Тогда из (29.1) находим

$$\delta f = \frac{e\mathbf{E}}{i(\mathbf{kv} - \omega)}\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}}. \tag{29.2}$$

Условие малости поля возникает из требования, чтобы δf было мало по сравнению с f_0. Коэффициент при $\partial f_0/\partial\mathbf{p}$ в (29.2) есть амплитуда импульса, приобретаемого электроном в поле $\mathbf{E}$. Эта амплитуда должна быть мала по сравнению со средним (определенным по распределению f_0) импульсом $m\overline{v}$.

В невозмущенной плазме плотность зарядов электронов компенсируется в каждой точке зарядами ионов, а плотность тока равна нулю тождественно ввиду изотропии плазмы. Плотность же зарядов и плотность тока, возникающие в плазме при ее возмущении полем, равны

$$\rho = -e\int \delta f\, d^3p, \qquad \mathbf{j} = -e\int \mathbf{v}\delta f\, d^3p. \tag{29.3}$$

Вместе с δf эти величины пропорциональны $\exp\left[i(\mathbf{kr} - \omega t)\right]$, и согласно (28.1) их связь с диэлектрической поляризацией дается формулами

$$i\mathbf{kP} = -\rho, \qquad -i\omega\mathbf{P} = \mathbf{j}. \tag{29.4}$$

Способ взятия интегралов в (29.3) требует, однако, уточнения ввиду наличия у функции δf полюса при

$$\omega = \mathbf{kv}. \tag{29.5}$$

Чтобы придать интегралу смысл, будем вместо строго гармонического ($\sim e^{-i\omega t}$) рассматривать поле, которое бесконечно медленно включается от времени $t = -\infty$. Такому описанию поля

соответствует добавление к его частоте бесконечно малой положительной мнимой части, т. е. замена $\omega \to \omega + i\delta$, где $\delta \to +0$. Действительно, при этом будет $E \infty e^{-i\omega t} e^{t\delta} \to 0$ при $t \to -\infty$; вызываемое же множителем $e^{t\delta}$ неограниченное возрастание поля при $t \to \infty$ несущественно, так как в силу принципа причинности не может оказать влияния на явления, рассматриваемые при конечных временах t (между тем как с $\delta < 0$ поле оказалось бы большим в прошлом, что нарушило бы применимость линейного по полю приближения). Таким образом, *правило обхода* полюсов (29.5) определяется заменой

$$\omega \to \omega + i0; \tag{29.6}$$

оно было впервые установлено *Л.Д. Ландау* (1946).

К обоснованию правила (29.6) можно подойти также с другой точки зрения, путем введения в кинетическое уравнение бесконечно малого интеграла столкновений, представленного в виде $\mathrm{St}\, f = -\nu\delta f$. Добавление такого члена в правую часть уравнения (29.1) эквивалентно замене $\omega \to \omega + i\nu$ в члене $\partial\delta f/\partial t = -i\omega\delta f$; устремляя затем $\nu \to 0$, получим снова правило (29.6) [1]).

При интегрированиях с правилом обхода (29.6) мы имеем дело с интегралами вида

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(z)\, dz}{z - i\delta}, \qquad \delta > 0.$$

В таком интеграле путь интегрирования в плоскости комплексной переменной z проходит под точкой $z = i\delta$; при $\delta \to 0$ это эквивалентно интегрированию вдоль вещественной оси с обходом полюса $z = 0$ по бесконечно малой полуокружности снизу. Вклад в интеграл от этого обхода определяется полувычетом подынтегрального выражения, и в результате получим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(z)}{z - i0}\, dz = \fint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(z)}{z}\, dz + i\pi f(0), \tag{29.7}$$

где перечеркнутый знак интеграла означает, что интеграл берется в смысле главного значения. Эту формулу можно записать и в символическом виде

$$\frac{1}{z - i0} = \mathrm{P}\frac{1}{z} + i\pi\delta(z), \tag{29.8}$$

---

[1]) В изложенных рассуждениях содержатся по существу два перехода к пределу: к малым полям (линеаризация уравнений) и к $\nu \to 0$. Обратим внимание на то, что первый производится до второго. Необходимость именно в таком порядке предельных переходов связана с необходимостью соблюдения условия $\delta f \ll f_0$ при линеаризации; при $\nu = 0$ добавка δf обращалась бы в бесконечность при $\mathbf{kv} = \omega$.

где символ P означает взятие (при дальнейших интегрированиях) главного значения.

Вычислим продольную часть диэлектрической проницаемости плазмы. Воспользуемся для этого первым из соотношений (29.4), подставив в него $\delta\rho$ из (29.3) и (29.2):

$$i\mathbf{kP} = -e^2\mathbf{E}\int \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} \frac{d^3p}{i(\mathbf{kv}-\omega-i0)}.$$

Пусть поле $\mathbf{E}$ (а с ним и $\mathbf{P}$) направлено вдоль $\mathbf{k}$; тогда $4\pi\mathbf{P} = (\varepsilon_l - 1)\mathbf{E}$. Мы приходим, таким образом, к следующей формуле для продольной проницаемости плазмы с произвольной стационарной функцией распределения $f(p)$ (индекс 0 у которой ниже опускаем):

$$\varepsilon_l = 1 - \frac{4\pi e^2}{k^2}\int \mathbf{k}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \frac{d^3p}{\mathbf{kv}-\omega-i0}. \tag{29.9}$$

Выберем направление $\mathbf{k}$ в качестве оси x. В подынтегральном выражении в (29.9) от p_y, p_z зависит лишь f. Поэтому формулу (29.9) можно переписать в другом виде, введя функцию распределения только по $p_x = mv_x$:

$$f(p_x) = \int f(p)\, dp_y\, dp_z.$$

Тогда

$$\varepsilon_l = 1 - \frac{4\pi e^2}{k}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{df(p_x)}{dp_x} \frac{dp_x}{kv_x - \omega - i0}. \tag{29.10}$$

В изотропной плазме $f(p_x)$ — четная функция p_x.

Сразу же отметим важный результат: диэлектрическая проницаемость бесстолкновительной плазмы оказывается комплексной величиной; мнимая часть интеграла (29.10) определяется формулой (29.7). К обсуждению этого важного результата мы возвратимся в следующем параграфе, а здесь рассмотрим аналитические свойства функции частоты ω, определяемой интегралом (29.10). Уже из общих свойств диэлектрической проницаемости известно, что эта функция может иметь особые точки только в нижней полуплоскости комплексной переменной ω (см. VIII, § 62); это является следствием уже самого определения (28.5). Полезно, однако, проследить за тем, как это видно непосредственно из формулы (29.10), и выяснить связь между этими особыми точками и свойствами функции распределения $f(p_x)$.

Изменив обозначение переменной интегрирования, напишем интеграл в (29.10) в виде

$$\int\limits_C \frac{df(z)}{dz} \frac{dz}{z - \omega/k}. \tag{29.11}$$

Интегрирование производится в плоскости комплексной переменной z вдоль вещественной оси, с обходом точки $z = \omega/k$ снизу (рис. 7 *а*). Тем самым интеграл (29.11) определяет аналитическую функцию и во всей верхней полуплоскости ω: для всех таких значений ω полюс $z = \omega/k$ обходится, как и следовало, снизу. При аналитическом же продолжении этой функции в нижнюю полуплоскость ω необходимость обхода полюса снизу требует каждый раз соответствующего смещения пути интегрирования (рис. 7 *б*). Но функция $df(z)/dz$, регулярная при вещественных z, имеет, вообще говоря, особые точки при комплексных значениях z (назовем их z_0), в том числе в нижней полуплоскости z. Увод пути интегрирования C от полюса $z = \omega/k$ оказывается невозможным, когда этот полюс сближается с какой-либо из особых точек z_0 и контур C оказывается зажатым между этими двумя точками. Таким образом, функция (29.11) имеет особые точки в нижней полуплоскости ω при значениях ω/k, совпадающих с особыми точками функции $df(z)/dz$.

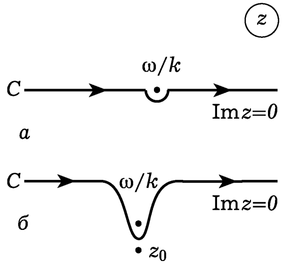


Рис. 7

§ 30. Затухание Ландау

Уже было отмечено, что диэлектрическая проницаемость бесстолкновительной плазмы оказывается комплексной величиной ($\varepsilon_l = \varepsilon_l' + i\varepsilon_l''$). Отделив мнимую часть с помощью формулы (29.8), имеем

$$\varepsilon_l'' = -4\pi^2 e^2 \int \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \frac{\mathbf{k}}{k^2} \delta(\omega - \mathbf{kv})\, d^3p, \tag{30.1}$$

или

$$\varepsilon_l'' = -\frac{4\pi^2 e^2 m}{k^2} \frac{df(p_x)}{dp_x}\bigg|_{v_x = \omega/k}. \tag{30.2}$$

Как известно, комплексность диэлектрической проницаемости означает наличие диссипации энергии электрического поля в среде. Напомним формулы, определяющие среднюю диссипируемую (в единицу времени в единице объема) энергию Q монохроматического электрического поля. Если это поле представлено в комплексном виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\omega\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{kr} - \omega t)},$$

то в общем случае анизотропной среды [1])

$$Q = \frac{i\omega}{8\pi} \cdot \frac{1}{2} \left[\varepsilon^*_{\beta\alpha}(\omega, \mathbf{k}) - \varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k})\right] E^*_\alpha E_\beta; \tag{30.3}$$

диссипация определяется антиэрмитовой частью тензора $\varepsilon_{\alpha\beta}$. Если этот тензор симметричен, то антиэрмитова часть сводится к мнимой части и тогда

$$Q = \frac{\omega}{8\pi} \varepsilon''_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) E_\alpha E^*_\beta. \tag{30.4}$$

В случае продольного поля здесь остается только мнимая часть продольной проницаемости:

$$Q = \frac{\omega}{8\pi} \varepsilon''_l |\mathbf{E}|^2. \tag{30.5}$$

Подставив сюда (30.2), находим в данном случае

$$Q = -|\mathbf{E}|^2 \frac{\pi m e^2 \omega}{2k^2} \left.\frac{df(p_x)}{dp_x}\right|_{v_x=\omega/k}. \tag{30.6}$$

Таким образом, диссипация возникает уже в бесстолкновительной плазме; это явление было предсказано *Л.Д. Ландау* (1946) и о нем говорят как о *затухании Ландау*. Не будучи связано со столкновениями, оно принципиально отличается от диссипации в обычных поглощающих средах: бесстолкновительная диссипация не связана с возрастанием энтропии и потому представляет собой термодинамически обратимый процесс (к этой стороне явления мы вернемся еще в § 35).

Механизм затухания Ландау тесно связан с пространственной дисперсией. Как видно из (30.6), диссипация возникает от электронов, скорость которых в направлении распространения электрической волны совпадает с фазовой скоростью волны ($v_x = \omega/k$); о таких электронах говорят, что они движутся в фазе

[1]) Это выражение получается из общей формулы

$$Q = \langle \mathbf{E}\dot{\mathbf{D}} \rangle / 4\pi,$$

где угловые скобки означают усреднение по времени (см. VIII, § 61). Здесь подразумевается, что $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$ вещественны. Если же $\mathbf{E}$ представлено в комплексном виде, то в формулу надо подставить вместо $\mathbf{E}$ полусумму $(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*)/2$. Соответствующий вектор $\mathbf{D}$ имеет компоненты

$$\frac{1}{2} \left\{\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) E_\beta + \varepsilon_{\alpha\beta}(-\omega, -\mathbf{k}) E^*_\beta\right\},$$

а вектор $\dot{\mathbf{D}}$ —

$$\frac{i\omega}{2} \left\{-\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) E_\beta + \varepsilon_{\alpha\beta}(-\omega, -\mathbf{k}) E^*_\beta\right\}.$$

Усреднив произведение $\mathbf{E}\dot{\mathbf{D}}$ и воспользовавшись свойством (28.6), получим (30.3) (ср. ниже примеч. на с. 159).

с волной[1]). По отношению к этим электронам поле стационарно и поэтому оно может производить над электронами работу, не обращающуюся в нуль при усреднении по времени (как это имеет место для других электронов, по отношению к которым поле осциллирует). Поучительно проследить за этим механизмом более детально, выведя формулу (30.6) прямым образом, не прибегая к кинетическому уравнению.

Пусть электрон движется вдоль оси x в направленном по этой же оси слабом электрическом поле

$$E(t,x) = \operatorname{Re}\{E_0 e^{i(kx-\omega t)} e^{t\delta}\}; \tag{30.7}$$

множитель $e^{t\delta}$ снова описывает медленное включение поля от времени $t=-\infty$. Будем искать скорость $v_x \equiv w$ и координату x движущегося электрона в виде

$$w = w_0 + \delta w, \quad x = x_0 + \delta x,$$

где δw, δx — поправки к невозмущенному движению $x_0 = w_0 t$, происходящему с постоянной скоростью w_0. Линеаризованное по малым величинам уравнение движения электрона:

$$m\frac{d\delta w}{dt} = -eE(t,x_0) = -e\operatorname{Re}\{E_0 e^{ikt(w_0-\omega/k)} e^{t\delta}\}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \delta w &= -\frac{e}{m}\operatorname{Re}\frac{E(t,x_0)}{ik(w_0-\omega/k)+\delta}, \\ \delta x &= -\frac{e}{m}\operatorname{Re}\frac{E(t,x_0)}{[ik(w_0-\omega/k)+\delta]^2}. \end{aligned} \tag{30.8}$$

Средняя работа, производимая полем над электроном в единицу времени, есть

$$q = -e\langle wE(t,x)\rangle = -e\langle (w_0+\delta w)E(t,x_0+\delta x)\rangle \approx$$
$$\approx -ew_0\left\langle \frac{\partial E}{\partial x_0}\delta x\right\rangle - e\langle \delta w\cdot E(t,x_0)\rangle,$$

или, в комплексном виде[2]),

$$q = -\frac{e}{2}\operatorname{Re}\left\{w_0\delta x\frac{\partial E^*}{\partial x_0} + \delta w\cdot E^*\right\}.$$

---

[1]) Отметим в этой связи, что разность $\omega - \mathbf{kv}$ есть частота поля в системе отсчета, движущейся вместе с электроном.

[2]) Если две периодические по времени величины A и B представлены в комплексном виде ($\infty e^{-i\omega t}$), то

$$\langle \operatorname{Re}A\cdot\operatorname{Re}B\rangle = \frac{1}{4}\langle (A+A^*)(B+B^*)\rangle.$$

При усреднении произведения AB и A^*B^*, содержащие $e^{-2i\omega t}$ и $e^{2i\omega t}$, обращаются в нуль и остается

$$\langle \operatorname{Re}A\cdot\operatorname{Re}B\rangle = \frac{1}{4}(AB^*+A^*B) = \frac{1}{2}\operatorname{Re}(AB^*).$$

Подставив сюда E, δx, δw из (30.7), (30.8), после простого приведения получим

$$q = \frac{e^2}{2m}|E|^2 \frac{d}{dw_0} \frac{w_0 \delta}{\delta^2 + k^2(w_0 - \omega/k)^2}.$$

Теперь остается просуммировать q по электронам со всевозможными начальными импульсами $p_x = mw_0$:

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} q f(p_x)\, dp_x = -\frac{e^2|E|^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w_0 \delta}{\delta^2 + k^2(w_0 - \omega/k)^2} \frac{df}{dp_x}\, dp_x$$

(произведено интегрирование по частям). Переход к пределу осуществляется с помощью формулы

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\delta}{\delta^2 + z^2} = \pi \delta(z) \qquad (30.9)$$

и непосредственно приводит к выражению (30.6).

В соответствии с обратимым характером бесстолкновительной диссипации, термодинамические условия не требуют положительности величины Q (как это имеет место для истинной диссипации). Выражение (30.6) всегда положительно при изотропном распределении $f(p)$ (см. задачу). Для анизотропных распределений, однако, Q может оказаться отрицательной величиной — электроны будут в среднем отдавать энергию волне, а не получать ее [1]). Такие случаи тесно связаны с возможной неустойчивостью плазмы (см. § 61), и, таким образом, условие $Q > 0$ (а тем самым и $\varepsilon'' > 0$) является результатом лишь устойчивости состояния плазмы.

С точки зрения описанной выше физической картины затухания Ландау наличие производной df/dp_x в формуле (30.6) можно наглядно интерпретировать следующим образом: в обмене энергией с полем участвуют частицы со скоростями v_x, близкими к ω/k, причем частицы с $v_x < \omega/k$ получают энергию от волны, а с $v_x > \omega/k$ — отдают энергию волне; волна будет терять энергию, если первых несколько больше, чем вторых.

Задача

Показать, что для изотропной плазмы бесстолкновительная диссипация Q всегда положительна.

Решение. В изотропной плазме f — функция только от $p^2 = p_x^2 + p_\perp^2$ (p_x и $p_\perp$ — составляющие $\mathbf{p}$, продольная и поперечная по отношению к $\mathbf{k}$). Пишем

$$\frac{df(p_x)}{dp_x} = \frac{d}{dp_x} \int_0^\infty f(p_x^2 + p_\perp^2) \pi d(p_\perp^2) = 2\pi p_x \int_0^\infty f'(p_x^2 + p_\perp^2)\, d(p_\perp^2),$$

[1]) Произведенный выше наглядный вывод формулы (30.6) не связан с изотропией распределения. Не связано с ней также и выражение (30.2) — см. ниже § 32.

и поскольку $f(p^2) \to 0$ при $p^2 \to \infty$, то

$$\frac{df(p_x)}{dp_x} = -2\pi p_x f(p_x^2),$$

так что $df/dp_x < 0$ при $p_x = \omega/k > 0$.

§ 31. Диэлектрическая проницаемость максвелловской плазмы

Применим формулу (29.10) к электронной плазме с равновесным (максвелловским) распределением электронов

$$f(p_x) = \frac{N_e}{(2\pi m T_e)^{1/2}} \exp\left(-\frac{p_x^2}{2mT_e}\right), \tag{31.1}$$

где T_e — температура электронного газа (имея в виду включить ниже в рассмотрение также и ионную компоненту плазмы, будем сразу же отличать индексом e величины, относящиеся к электронам). Находим

$$\varepsilon_l(\omega, k) = 1 + \frac{1}{(ka_e)^2}\left[1 + F\left(\frac{\omega}{\sqrt{2}\,kv_{Te}}\right)\right], \tag{31.2}$$

где функция $F(x)$ определена интегралом [1])

$$F(x) = \frac{x}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-z^2}\,dz}{z - x - i0} = \frac{x}{\sqrt{\pi}} \fint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-z^2}\,dz}{z - x} + i\sqrt{\pi}\,xe^{-x^2} \tag{31.3}$$

и введены параметры

$$v_{Te} = \sqrt{\frac{T_e}{m}}, \quad a_e = \sqrt{\frac{T_e}{4\pi N_e e^2}}. \tag{31.4}$$

Величина v_{Te} есть некоторая средняя тепловая скорость электронов; a_e — дебаевский радиус, определенный по заряду и плотности электронов.

Предельные выражения функции $F(x)$ для больших и малых значений x легко найти непосредственно из определения (31.3). При $x \gg 1$ пишем

$$\frac{x}{\sqrt{\pi}} \fint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-z^2}\,dz}{z - x} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}\left(1 + \frac{z}{x} + \frac{z^2}{x^2} + \ldots\right) dz.$$

[1]) Различные формы представления функции $F(x)$ и ее подробные численные таблицы даны в книге: *В.Н. Фаддеева, Н.М. Терентьев*. Таблицы значений интеграла вероятностей от комплексного аргумента. — М.: Гостехиздат, 1954. Табулированная в этой книге функция $w(x)$ связана с $F(x)$ согласно $F(x) = i\sqrt{\pi}\,xw(x)$.

Интегралы от нечетных по x членов обращаются в нуль, а остальные дают

$$F(x) + 1 \approx -\frac{1}{2x^2} - \frac{3}{4x^4} + i\sqrt{\pi}\, x e^{-x^2}, \qquad x \gg 1. \tag{31.5}$$

При $x \ll 1$ производим сначала замену переменной интегрирования $z = u + x$, после чего разлагаем по степеням x:

$$\frac{x}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-z^2}\, dz}{z - x} = \frac{x e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2 - 2ux} \frac{du}{u} \approx \frac{x}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} \left(\frac{1}{u} - 2x\right) du.$$

Главное значение интеграла от первого (нечетного по u) члена обращается в нуль, а с учетом второго члена находим

$$F(x) \approx -2x^2 + i\sqrt{\pi}\, x, \qquad x \ll 1. \tag{31.6}$$

С помощью этих формул можно написать предельные выражения диэлектрической проницаемости. При больших частотах имеем

$$\varepsilon_l = 1 - \frac{\Omega_e^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{3k^2 v_{Te}^2}{\omega^2}\right) + \\ + i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega \Omega_e^2}{(k v_{Te})^3} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Te}^2}\right) \quad \text{при} \quad \frac{\omega}{k v_{Te}} \gg 1. \tag{31.7}$$

Здесь введен параметр

$$\Omega_e = \frac{v_{Te}}{a_e} = \sqrt{\frac{4\pi N_e e^2}{m}} \tag{31.8}$$

— так называемая *плазменная* (или *ленгмюровская*) частота для электронов. Как и следовало, в случае $\omega/(k v_{Te}) \gg 1$ пространственная дисперсия приводит лишь к малым поправкам в диэлектрической проницаемости, причем мнимая часть ε_l оказывается экспоненциально малой — результат того, что в максвелловском распределении лишь экспоненциально малая доля электронов имеет скорости $v_x = \omega/k \gg v_{Te}$. Независящее от k предельное значение диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon(\omega) = 1 - (\Omega_e/\omega)^2. \tag{31.9}$$

Это выражение относится как к продольной, так и к поперечной проницаемости (см. (28.8)). Его легко получить с помощью простых рассуждений, без использования кинетического уравнения.

Действительно, при $k \to 0$ поле волны можно считать однородным, и тогда уравнение движения электрона $m\dot{\mathbf{v}} = -e\mathbf{E}$ дает $\mathbf{v} = \dfrac{e\mathbf{E}}{im\omega}$, так что создаваемая электронами плотность тока

$$\mathbf{j} = -\frac{e^2 N_e}{im\omega} \mathbf{E}.$$

С другой стороны, имеем

$$\mathbf{j} = -i\omega\mathbf{P} = -i\omega\frac{\varepsilon(\omega)-1}{4\pi}\mathbf{E}.$$

Сравнение обоих выражений и приводит к формуле (31.9).

В обратном предельном случае малых частот имеем

$$\varepsilon_l = 1 + \left(\frac{\Omega_e}{kv_{Te}}\right)^2\left[1 - \left(\frac{\omega}{kv_{Te}}\right)^2 + i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega}{kv_{Te}}\right] \quad \text{при} \quad \frac{\omega}{kv_{Te}} \ll 1. \tag{31.10}$$

Обратим внимание на то, что пространственная дисперсия устраняет полюс при $\omega = 0$, который имеет диэлектрическая проницаемость обычной проводящей среды. Отметим также, что мнимая часть проницаемости оказывается относительно малой (хотя и неэкспоненциально) и при малых частотах, на этот раз — в результате малости фазового объема электронов, в котором удовлетворяется условие $\mathbf{kv} = \omega$.

В § 29 было показано, что функция $\varepsilon_l(\omega)$, определяемая интегралом (29.10), не имеет особых точек в верхней полуплоскости ω, а ее особые точки в нижней полуплоскости определяются особыми точками $df(p_x)/dp_x$ как функции комплексной переменной p_x. Но для максвелловского распределения функция

$$\frac{df(p_x)}{dp_x} \propto p_x \exp\left(-\frac{p_x^2}{2mT}\right)$$

вообще не имеет особых точек на конечных расстояниях во всей комплексной плоскости p_x (т. е. является целой функцией). Поэтому и диэлектрическая проницаемость максвелловской бесстолкновительной плазмы является целой функцией ω — не имеет вовсе особенностей при конечных ω.

До сих пор мы рассматривали вклад в диэлектрическую проницаемость, происходящий только от электронной компоненты плазмы. Вклад ионной части вычисляется точно тем же способом и оба вклада в $\varepsilon_l - 1$ просто складываются; таким образом, приходим к очевидному обобщению формулы (31.2):

$$\varepsilon_l - 1 = \frac{1}{(ka_e)^2}\left[F\left(\frac{\omega}{\sqrt{2}\,kv_{Te}}\right)+1\right] + \frac{1}{(ka_i)^2}\left[F\left(\frac{\omega}{\sqrt{2}\,kv_{Ti}}\right)+1\right]. \tag{31.11}$$

Индексы e и i отличают величины, относящиеся к электронам и ионам;

$$v_{Ti} = \left(\frac{T_i}{M}\right)^{1/2}, \quad a_i = \frac{v_{Ti}}{\Omega_i} = \left[\frac{T_i}{4\pi N_i(ze)^2}\right]^{1/2}, \quad \Omega_i^2 = \frac{4\pi N_i(ze)^2}{M} \tag{31.12}$$

(M и ze — масса и заряд иона). Выражение (31.11) относится к «двухтемпературной» плазме, в которой каждая из компонент

имеет равновесное распределение, но с различными температурами, так что друг с другом электроны и ионы в равновесии не находятся. Такой случай возникает естественным образом ввиду того, что большая разница в массе затрудняет обмен энергией при столкновениях электронов с ионами.

Обычно приходится иметь дело с ситуацией, когда $T_i \lesssim T_e$; при этом $v_{Ti} \ll v_{Te}$. Учитывая также, что всегда $\Omega_i \ll \Omega_e$, легко заключить, что в случае $\omega \gg kv_{Te} \gg kv_{Ti}$ вклад ионов пренебрежим, так что справедлива формула (31.7). В обратном предельном случае имеем

$$\varepsilon_l - 1 = \frac{1}{(ka_e)^2} + \frac{1}{(ka_i)^2} + i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega}{(ka_i)^2 kv_{Ti}}, \qquad (31.13)$$
$$\omega \ll kv_{Ti} \ll kv_{Te}.$$

Случай же $kv_{Ti} \ll \omega \ll kv_{Te}$ будет рассмотрен в § 32.

Все вычисления в этом и предыдущем параграфах произведены для продольной части диэлектрической проницаемости. Вычисление поперечной проницаемости представляет меньший интерес. Дело в том, что поперечное поле обычно сводится к обычным электромагнитным волнам, для которых частота и волновой вектор связаны соотношением $\omega/k = c/\sqrt{\varepsilon_t}$. При этом $\omega/k > c \gg v_{Te}$, т. е. $\omega \gg kv_{Te}$; поэтому пространственная дисперсия мала и диэлектрическая проницаемость дается формулой (31.9). Для этих волн отсутствует также и затухание Ландау; поскольку фазовая скорость волны превышает скорость света, то в плазме нет частиц, которые могли бы двигаться в фазе с волной (строго говоря, доказательство этого утверждения требует релятивистского рассмотрения — см. задачу 4).

Задачи

1. Найти потенциал электрического поля, создаваемого покоящимся в плазме малым точечным сторонним зарядом e_1.

Решение. С учетом поляризации плазмы, поле определяется уравнением $\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi e_1\delta(\mathbf{r})$. Для постоянного поля компоненты Фурье индукции и потенциала связаны соотношением $\mathbf{D_k} = \varepsilon_l(0,k)\mathbf{E_k} = -i\mathbf{k}\varepsilon_l(0,k)\varphi_\mathbf{k}$. Поэтому для $\varphi_\mathbf{k}$ находим уравнение

$$i\mathbf{k}\mathbf{D_k} = k^2\varepsilon_l(0,k)\varphi_\mathbf{k} = 4\pi e_1.$$

Взяв $\varepsilon_l(0,k)$ из (31.13), имеем

$$\varphi_\mathbf{k} = \frac{4\pi e_1}{k^2 + a^{-2}}, \qquad a^{-2} = a_e^{-2} + a_i^{-2}.$$

Соответствующая координатная функция

$$\varphi = \frac{e_1}{r}e^{-r/a};$$

таким образом, диэлектрическая проницаемость (31.13) описывает экранирование статического заряда в согласии с V, § 78. Условие малости заряда: $e_1 \ll Na^3 e$, $-e_1$ должно быть мало по сравнению с зарядом частиц плазмы в объеме $\sim a^3$.

2. Вычислить поперечную диэлектрическую проницаемость плазмы.

Решение. Вычислив электронную поляризацию $\mathbf{P} = -\mathbf{j}/(i\omega)$ с $\mathbf{j}$ из (29.3), получим для тензора проницаемости [1]):

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - \frac{4\pi e^2}{\omega}\int \frac{v_\alpha}{\mathbf{kv} - \omega - i0}\frac{\partial f}{\partial p_\beta}\, d^3p. \tag{1}$$

Поперечная часть выделяется из $\varepsilon_{\alpha\beta}$ как

$$\varepsilon_t = \frac{1}{2}\left[\varepsilon_{\alpha\alpha} - \varepsilon_{\alpha\beta}\frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\right]$$

и дается интегралом

$$\varepsilon_t = 1 - \frac{2\pi e^2}{\omega}\int \mathbf{v}_\perp \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}_\perp}\frac{d^3p}{\mathbf{kv} - \omega - i0}, \tag{2}$$

где $\mathbf{p}_\perp = m\mathbf{v}_\perp$ — поперечная по отношению к $\mathbf{k}$ компонента импульса. Для максвелловского распределения f после интегрирования по $d^2p_\perp$ находим окончательно

$$\varepsilon_t - 1 = \frac{\Omega_e^2}{\omega^2}F\left(\frac{\omega}{\sqrt{2}\,kv_{Te}}\right) \tag{3}$$

с функцией F из (31.3); ионы вносят в $\varepsilon_t - 1$ аналогичный вклад. В предельных случаях

$$\varepsilon_t - 1 = -\frac{\Omega_e^2}{\omega^2}\left[1 + \left(\frac{kv_{Te}}{\omega}\right)^2\right] + i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\Omega_e}{\omega k a_e}\exp\left(-\frac{\omega^2}{2k^2v_{Te}^2}\right) \tag{4}$$

$$(\omega \gg kv_{Te} \gg kv_{Ti}),$$

$$\varepsilon_t - 1 = -\frac{1}{(ka_e)^2} - \frac{1}{(ka_i)^2} + i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\Omega_e}{\omega k a_e} \tag{5}$$

$$(\omega \ll kv_{Ti} \ll kv_{Te}).$$

3. Определить диэлектрическую проницаемость ультрарелятивистской электронной плазмы; температура $T_e \gg mc^2$ (*В.П. Силин*, 1960).

Решение. Кинетическое уравнение сохраняет свой вид (27.9) и в релятивистском случае. Соответственно сохранятся такие формулы, как (29.9) и (2) из задачи 2. В ультрарелятивистском случае скорость электронов $v \approx c$, их энергия есть cp, а равновесная функция распределения

$$f(p) = \frac{N_e c^3}{8\pi T_e^3}e^{-cp/T_e}.$$

Для продольной проницаемости находим

$$\varepsilon_l - 1 = \frac{4\pi e^2 c}{kT_e}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\infty}\frac{f(p)\cos\theta\cdot 2\pi p^2\, dp\, d\cos\theta}{kc\cos\theta - \omega - i0} \tag{6}$$

(θ — угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{v}$). Интегрирование f по $2\pi p^2\,dp$ дает $N_e/2$, после чего интегрирование по $d\cos\theta$ с обходом полюса $\cos\theta = \omega/(kc)$ снизу приводит к

[1]) В этом выражении плазма еще не предполагается изотропной.

результату

$$\varepsilon_l'(\omega,k)-1=\frac{4\pi N_e e^2}{k^2T_e}\left[1+\frac{\omega}{2kc}\ln\left|\frac{\omega-ck}{\omega+ck}\right|\right],$$

$$\varepsilon_l''(\omega,k)=\begin{cases}\pi\omega/(2kc) & \text{при} \quad \omega/k<c,\\ 0 & \text{при} \quad \omega/k>c.\end{cases} \tag{7}$$

Аналогичным образом, исходя из (2), находим для поперечной проницаемости

$$\varepsilon_t'(\omega,k)-1=\frac{\pi e^2N_e c}{\omega k T_e}\left[\left(1-\frac{\omega^2}{c^2k^2}\right)\ln\left|\frac{\omega-ck}{\omega+ck}\right|-\frac{2\omega}{ck}\right],$$

$$\varepsilon_t''(\omega,k)=\begin{cases}\pi[1-\omega^2/(c^2k^2)] & \text{при} \quad \omega/k<c,\\ 0 & \text{при} \quad \omega/k>c.\end{cases} \tag{8}$$

4. Найти мнимую часть ε_l для нерелятивистской ($T_e\ll mc^2$) электронной плазмы при $\omega/k\sim c\gg v_{Te}$ (*В.П. Силин*, 1960).

Решение. Из формулы (29.9) (справедливой при любых скоростях электронов) после интегрирования по $d\cos\theta$ находим

$$\varepsilon''(\omega,k)=\frac{8\pi^3e^2\omega}{k^3T_e}\int\limits_{p_m}^{\infty}\frac{f(p)p^2}{v}\,dp, \qquad p_m=\frac{mc\omega}{\sqrt{c^2k^2-\omega^2}} \tag{9}$$

(полюс $\cos\theta=\omega/(kv)$ лежит на пути интегрирования по $\cos\theta$ лишь при $\omega/(kv)<1$; поэтому нижний предел интегрирования по dp отвечает значению $v=\omega/k$). Функция распределения при $T_e\ll mc^2$, справедливая для всех скоростей электронов, есть

$$f(p)=\frac{N_e}{(2\pi mT_e)^{3/2}}\exp\left(\frac{mc^2}{T_e}-\frac{\varepsilon(p)}{T_e}\right), \qquad \varepsilon=c(p^2+m^2c^2)^{1/2}$$

(значение нормировочного интеграла определяется областью $\varepsilon-mc^2\approx$ $\approx p^2/(2m)\sim T_e\ll mc^2$). В интеграле (9) при $\omega/k\sim c\gg v_{Te}$ существенна область значений p вблизи нижнего предела. Полагая в экспоненте

$$\varepsilon(p)\approx\varepsilon(p_m)+\left.\frac{d\varepsilon}{dp}\right|_{p=p_m}(p-p_m)=\varepsilon(p_m)+\frac{\omega}{k}(p-p_m)$$

(а в предэкспоненциальном множителе $p\approx p_m$, $v\approx\omega/k$) и интегрируя по $p-p_m$ от 0 до ∞, получим

$$\varepsilon_l''=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega\Omega_e^2}{(kv_{Te})^3}\frac{1}{1-(\omega/kc)^2}\exp\left\{-\frac{mc^2}{T_e}\left[\frac{1}{\sqrt{1-(\omega/kc)^2}}-1\right]\right\}.$$

Этим определяется закон обращения ε_l'' в нуль при $\omega/(ck)\to 1$.

§ 32. Продольные плазменные волны

Пространственная дисперсия приводит к возможности распространения в плазме продольных электрических волн. Зависимость частоты от волнового сектора (или, как говорят, *закон дисперсии*) для этих волн определяется уравнением

$$\varepsilon_l(\omega,k)=0. \tag{32.1}$$

Действительно, при $\varepsilon_l = 0$ для продольного электрического поля $\mathbf{E}$ имеем $\mathbf{D} = 0$. Положив также $\mathbf{B} = 0$, мы тождественно удовлетворим второй паре уравнений Максвелла (28.2). Из первой же пары остается уравнение $\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$, выполнение которого обеспечивается продольностью поля: $\operatorname{rot}\mathbf{E} = i[\mathbf{kE}] = 0$.

Корни уравнения (32.1) оказываются комплексными ($\omega = \omega' + i\omega''$). Если мнимая часть проницаемости $\varepsilon_l'' > 0$, то эти корни лежат в нижней полуплоскости комплексного переменного ω, т. е. $\omega'' < 0$. Величина $\gamma = -\omega''$ представляет собой декремент затухания волны, происходящего по закону $e^{-\gamma t}$. Говорить о распространяющейся волне можно, конечно, лишь если $\gamma \ll \omega'$ — декремент затухания должен быть мал по сравнению с частотой.

Мы получим такой корень уравнения (32.1), предположив, что

$$\omega \gg kv_{Te} \gg kv_{Ti}. \tag{32.2}$$

Тогда в колебаниях участвуют лишь электроны и функция $\varepsilon_l(\omega, k)$ дается формулой (31.7). Решение уравнения $\varepsilon_l = 0$ осуществляется последовательными приближениями. В первом приближении, опустив все зависящие от k члены, найдем, что [1])

$$\omega = \Omega_e, \tag{32.3}$$

т. е. волны имеют постоянную, не зависящую от k частоту. Эти волны называют *плазменными*, или ленгмюровскими (*I. Langmuir*, *L. Tonks*, 1926). Они являются длинноволновыми в том смысле, что

$$ka_e \ll 1, \tag{32.4}$$

как это следует при $\omega = \Omega_e$ из (32.2).

Для определения зависящей от k поправки в вещественной части частоты, достаточно положить $\omega = \Omega_e$ в поправочном члене в ε'; тогда получим

$$\omega = \Omega_e\left(1 + \frac{3}{2}k^2a_e^2\right) \tag{32.5}$$

(*А.А. Власов*, 1938).

Мнимая же часть частоты при этом

$$\omega'' = -\frac{1}{2}\Omega_e\varepsilon_l''(\omega, k) \tag{32.6}$$

и экспоненциально мала вместе с ε_l''. Для ее определения (вместе с предэкспоненциальным множителем) надо подставить в ε_l'' уже подправленное значение (32.5). В результате получим

$$\gamma = \sqrt{\frac{\pi}{8}}\frac{\Omega_e}{(ka_e)^3}\exp\left[-\frac{1}{2(ka_e)^2} - \frac{3}{2}\right] \tag{32.7}$$

---

[1]) Учет колебаний ионов привел бы лишь к малому сдвигу этой частоты: $\omega^2 = \Omega_e^2 + \Omega_i^2$.

(*Л.Д. Ландау*, 1946). В силу условия $ka_e \ll 1$ декремент затухания плазменных волн действительно оказывается экспоненциально малым. Он возрастает с уменьшением длины волны и при $ka_e \sim 1$ (когда формула (32.7) уже неприменима) становится того же порядка величины, что и частота, так что понятие о распространяющихся плазменных волнах теряет смысл.

Проведенное рассмотрение относится, строго говоря, лишь к изотропной плазме, в которой тензор диэлектрической проницаемости сводится, согласно (28.7), к двум скалярным величинам ε_l и ε_t. В анизотропной плазме (т. е. при зависящей от направления $\mathbf{p}$ функции распределения $f(\mathbf{p})$) не существует строго продольных волн. При определенных условиях, однако, в ней могут распространяться «почти продольные» волны, в которых поперечная по отношению к вектору $\mathbf{k}$ составляющая поля, $\mathbf{E}^{(t)}$, мала по сравнению с продольной составляющей $\mathbf{E}^{(l)}$:

$$E^{(t)} \ll E^{(l)}. \tag{32.8}$$

Для выяснения этих условий замечаем прежде всего, что в пренебрежении $\mathbf{E}^{(t)}$ из уравнения $\operatorname{div}\mathbf{D} = 0$ следует, что

$$\mathbf{kD} \approx k_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta} E_\beta^{(l)} = \frac{1}{k} k_\alpha k_\beta \varepsilon_{\alpha\beta} E^{(l)} = 0.$$

Это равенство, определяющее закон дисперсии волн, можно снова записать в виде (32.1), если определить «продольную» проницаемость как

$$\varepsilon_l = \frac{1}{k^2} k_\alpha k_\beta \varepsilon_{\alpha\beta}; \tag{32.9}$$

подчеркнем, что эта величина зависит теперь от направления $\mathbf{k}$. Однако из условия $\varepsilon_l = 0$ уже не следует равенство $\mathbf{D} = 0$; величина

$$D_\alpha \approx \varepsilon_{\alpha\beta} E_\beta^{(l)} = \varepsilon_{\alpha\beta} \frac{k_\beta}{k} E^{(l)} \equiv \varepsilon_\alpha E^{(l)}$$

отлична от нуля (в изотропной же плазме $\varepsilon_\alpha \equiv 0$ при $\varepsilon_l = 0$). Далее, из уравнения Максвелла $\operatorname{rot}\mathbf{B} = c^{-1}\partial\mathbf{D}/\partial t$ находим оценку магнитного поля в волне:

$$B \sim \frac{\omega}{ck} \varepsilon E^{(l)}$$

и затем из уравнения $\operatorname{rot}\mathbf{E} = -c^{-1}\partial\mathbf{B}/\partial t$ — оценку поперечного электрического поля

$$E^{(t)} \sim \frac{\omega}{ck} B \sim \left(\frac{\omega}{ck}\right)^2 \varepsilon E^{(l)}. \tag{32.10}$$

Таким образом, условие «почти продольности» (32.8) удовлетворяется, если волна является «медленной» в том смысле, что

$$\omega/k \ll c/\sqrt{\varepsilon}. \tag{32.11}$$

Отметим, наконец, что формула (29.10) остается справедливой и для определенной согласно (32.9) величины ε_l в случае анизотропной плазмы, как это ясно из ее вывода из выражения

$$\mathbf{kP} = \frac{1}{4\pi}(k_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta} E_\beta - \mathbf{kE})$$

с продольным полем $\mathbf{E}$. При этом существенно, что в кинетическом уравнении можно пренебречь лоренцевой силой $e[\mathbf{vB}]/c$ по сравнению с $e\mathbf{E}$ (хотя ее произведение с $\partial f/\partial \mathbf{p}$ и не обращается теперь — при анизотропной функции $f(\mathbf{p})$ — тождественно в нуль). Действительно, с оценкой (32.10) имеем

$$\frac{|[\mathbf{vB}]|}{cE^{(l)}} \sim \frac{\omega\varepsilon\overline{v}}{kc^2} \ll 1.$$

Это отношение мало как в силу условия «медленности» волны (32.11), так и в силу $\overline{v} \ll c$.

Задачи

1. Определить закон дисперсии поперечных колебаний плазмы.

Решение. Для поперечных волн закон дисперсии дается соотношением $\omega^2 = c^2k^2/\varepsilon_t$. Высокочастотные колебания ($\omega \gg kv_{Te}$) соответствуют обычным электромагнитным волнам. С ε_t из (31.9) (см. также задачу 2 § 31) находим

$$\omega^2 = c^2k^2 + \Omega_e^2.$$

Это выражение справедливо для любых значений k; затухание Ландау отсутствует, как уже было указано в конце § 31.

Для низкочастотных колебаний ($\omega \ll kv_{Te}$) движение ионов тоже оказывается несущественным. Для длинных волн ($ka_e \ll 1$) главный член в законе дисперсии

$$\omega = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{k^3c^2v_{Te}}{\Omega_e^2};$$

чисто мнимое ω означает апериодическое затухание, так что о распространении волн вообще нельзя говорить.

2. Найти закон дисперсии плазменных волн в ультрарелятивистской электронной плазме (*В.П. Силин*, 1960).

Решение. При $\omega \gg ck$ из полученной в задаче 3 § 31 формулы имеем

$$\varepsilon_l(\omega, k) = 1 - \frac{\Omega^2_{e\ \text{рел}}}{\omega^2}\left(1 + \frac{3k^2c^2}{\omega^2}\right),$$

где

$$\Omega^2_{e\ \text{рел}} = \frac{4\pi e^2 N_e c^2}{3T_e}.$$

Приравняв это выражение нулю, получим закон дисперсии

$$\omega^2 = \Omega^2_{e\ \text{рел}} + \frac{3}{5}c^2k^2 \qquad (ck \ll \Omega_{e\ \text{рел}}).$$

При увеличении k эта формула становится неприменимой, но всегда остается $\omega > ck$ (и поэтому затухание Ландау отсутствует). В предельном случае

больших k частота ω стремится к ck по закону

$$\omega = ck\left[1 + 2\exp\left(-\frac{2k^2c^2}{3\Omega_{e\ \text{рел}}^2} - 2\right)\right].$$

3. То же для поперечных волн.

Р е ш е н и е. С помощью выражения $\varepsilon_t(\omega, k)$, полученного в задаче 3 § 31, находим закон дисперсии

$$\omega^2 = \Omega_{e\ \text{рел}}^2 + \frac{6}{5}c^2k^2 \quad \text{при} \quad \omega \gg ck.$$

Предельное выражение при больших k:

$$\omega^2 = \frac{3}{2}\Omega_{e\ \text{рел}}^2 + c^2k^2.$$

И здесь всегда остается $\omega > ck$, и потому затухание отсутствует.

§ 33. Ионно-звуковые волны

Наряду с плазменными волнами, связанными с колебаниями электронов, в плазме могут распространяться также и волны, в которых испытывают существенные колебания как электронная, так и ионная плотности. Эта ветвь спектра колебаний имеет слабое затухание (и потому можно говорить об их волновом распространении) в случае, когда температура газа ионов в плазме мала по сравнению с температурой электронов:

$$T_i \ll T_e. \tag{33.1}$$

Как будет подтверждено результатом вычисления, фазовая скорость этих волн удовлетворяет неравенствам

$$v_{Ti} \ll \omega/k \ll v_{Te}. \tag{33.2}$$

Малость затухания Ландау в этих условиях заранее очевидна: поскольку фазовая скорость лежит вне основных интервалов разброса тепловых скоростей как ионов, так и электронов, лишь малая часть частиц может двигаться в фазе с волной и тем самым участвовать в обмене энергий с ней.

Вклад электронов в диэлектрическую проницаемость в условиях (33.2) дается предельной формулой (31.10), а вклад ионов — формулой (31.7) (с заменой электронных величин ионными). С нужной точностью:

$$\varepsilon_l = 1 - \frac{\Omega_i^2}{\omega^2} + \frac{1}{(ka_e)^2}\left[1 + i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega}{kv_{Te}}\right]. \tag{33.3}$$

Пренебрегая сначала относительно малой мнимой частью, из уравнения $\varepsilon_l = 0$ получим

$$\omega^2 = \Omega_i^2\frac{k^2a_e^2}{1 + k^2a_e^2} = \frac{zT_e}{M}\frac{k^2}{1 + k^2a_e^2} \tag{33.4}$$

(в последнем выражении использовано, что $N_e = zN_i$).

Для самых длинных волн, при условии $ka_e \ll 1$, закон дисперсии (33.4) сводится к соотношению [1])

$$\omega = k\sqrt{\frac{zT_e}{M}}, \quad ka_e \ll 1. \tag{33.5}$$

Частота оказывается пропорциональной волновому вектору — как в обычных звуковых волнах. Волны с этим законом дисперсии называют *ионно-звуковыми*. Фазовая скорость этих волн $\omega/k \sim (T_e/M)^{1/2}$, так что условие (33.2) действительно выполняется. Учитывая в следующем приближении мнимую часть ε_l, легко найти декремент затухания

$$\gamma = \omega\sqrt{\frac{\pi z m}{8M}}. \tag{33.6}$$

Это затухание обусловлено электронами. Вклад же ионов в γ экспоненциально мал: он содержит множитель $\exp\left(-\frac{zT_e}{2T_i}\right)$.

Для меньших длин волн, в области $1/a_e \ll k \ll 1/a_i$ (существующей в силу предположенного неравенства (33.1)), из (33.4) имеем просто

$$\omega \approx \Omega_i. \tag{33.7}$$

Это — ионные волны, аналогичные электронным плазменным. Легко проверить, что и здесь выполняются условия (33.2), а затухание мало. При дальнейшем уменьшении длин волн, однако, затухание возрастает, и при $ka_i \gtrsim 1$ ионный вклад в декремент затухания сравнивается с частотой, так что говорить о распространении волн становится невозможным.

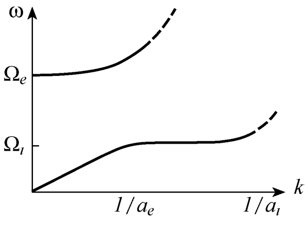


Рис. 8

На рис. 8 схематически изображен спектр (закон дисперсии) для рассмотренных здесь низкочастотных колебаний (нижняя кривая) в сравнении со спектром высокочастотных электронных плазменных волн (верхняя кривая). Штрихами намечены области, в которых затухание становится большим.

§ 34. Релаксация начального возмущения

Рассмотрим задачу о решении кинетического уравнения с самосогласованным полем при заданных начальных условиях

[1]) Закон (33.5) найден *Ленгмюром* и *Тонксом* (1926), а необходимость условия (33.1) указана *Г.В. Гордеевым* (1954).

(*Л.Д. Ландау*, 1946). Мы ограничимся случаем чисто потенциального электрического поля ($\mathbf{E} = -\nabla\varphi$) при равном нулю магнитном поле и предположим, что возмущению подвергается только электронное распределение при неизменном распределении ионов.

Будем также считать, что начальное возмущение мало: начальная функция распределения электронов

$$f(0, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = f_0(p) + g(\mathbf{r}, \mathbf{p}), \tag{34.1}$$

где $f_0(p)$ — равновесное (максвелловское) распределение, а $g \ll f_0$. Возмущение остается, конечно, малым и в дальнейшие моменты времени, так что уравнения можно линеаризовать; ищем функцию распределения в виде

$$f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = f_0(p) + \delta f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}). \tag{34.2}$$

Для малой поправки δf и для потенциала самосогласованного поля $\varphi(t, \mathbf{r})$ (величина того же порядка малости) находим систему уравнений, составленную из кинетического уравнения

$$\frac{\partial\,\delta f}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial\,\delta f}{\partial \mathbf{r}} + e\nabla\varphi\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} = 0 \tag{34.3}$$

и уравнения Пуассона

$$\Delta\varphi = 4\pi e\int \delta f\, d^3p \tag{34.4}$$

(равновесный электронный заряд компенсирован зарядом ионов).

Поскольку эти уравнения линейны и не содержат координат в явном виде, то искомые функции δf и φ можно разложить в интеграл Фурье по координатам и написать уравнения для каждой из их фурье-компонент в отдельности. Другими словами, достаточно рассматривать решения вида

$$\delta f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = f_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{p})e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad \varphi(t, \mathbf{r}) = \varphi_{\mathbf{k}}(t)e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}. \tag{34.5}$$

Для таких решений уравнения (34.3), (34.4) принимают вид

$$\frac{\partial f_{\mathbf{k}}}{\partial t} + i\mathbf{k}\mathbf{v}f_{\mathbf{k}} + ie\varphi_{\mathbf{k}}\mathbf{k}\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} = 0, \tag{34.6}$$

$$k^2\varphi_{\mathbf{k}} = -4\pi e\int f_{\mathbf{k}}\, d^3p. \tag{34.7}$$

Для решения этих уравнений удобно воспользоваться односторонним преобразованием Фурье, определив образ $f_{\omega\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{p})$ функции $f_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{p})$ как

$$f_{\omega\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{p}) = \int\limits_0^\infty e^{i\omega t} f_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{p})\, dt. \tag{34.8}$$

Обратное преобразование дается формулой

$$f_{\mathbf{k}}(t,\mathbf{p}) = \int\limits_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} e^{-i\omega t} f^{(+)}_{\omega\mathbf{k}}(\mathbf{p}) \frac{d\omega}{2\pi}, \tag{34.9}$$

где интеграл берется в комплексной плоскости ω по прямой, параллельной вещественной оси и проходящей над ней ($\sigma > 0$), выше всех особенностей функции $f_{\omega\mathbf{k}}$ [1]).

Умножаем обе части уравнения (34.6) на $e^{-i\omega t}$ и интегрируем по t. Заметив, что

$$\int\limits_0^\infty \frac{\partial f_{\mathbf{k}}}{\partial t} e^{i\omega t}\, dt = f_{\mathbf{k}} e^{i\omega t}\Big|_0^\infty - i\omega \int\limits_0^\infty f_{\mathbf{k}} e^{i\omega t}\, dt = -g_{\mathbf{k}} - i\omega f^{(+)}_{\omega\mathbf{k}}$$

(где $g_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}) \equiv f_{\mathbf{k}}(0,\mathbf{p})$), и разделив обе части уравнения на $i(\mathbf{kv} - \omega)$, находим

$$f^{(+)}_{\omega\mathbf{k}} = \frac{1}{i(\mathbf{kv}-\omega)} \left[g_{\mathbf{k}} - ie\varphi^{(+)}_{\omega\mathbf{k}} \mathbf{k} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} \right]. \tag{34.10}$$

Аналогичным образом, из (34.7) получим

$$k^2 \varphi^{(+)}_{\omega\mathbf{k}} = -4\pi e \int f^{(+)}_{\omega\mathbf{k}}(\mathbf{p})\, d^3p. \tag{34.11}$$

Подставив $f^{(+)}_{\omega\mathbf{k}}$ из (34.10) в (34.11), получим уравнение уже для одного только $\varphi^{(+)}_{\omega\mathbf{k}}$; из него найдем

$$\varphi^{(+)}_{\omega\mathbf{k}} = -\frac{4\pi e}{k^2 \varepsilon_l(\omega,k)} \int \frac{g_{\mathbf{k}}(\mathbf{p})\, d^3p}{i(\mathbf{kv}-\omega)}, \tag{34.12}$$

где введена продольная диэлектрическая проницаемость ε_l согласно (29.9). Снова (как и в § 29) введя составляющую импульса $p_x = mv_x$ вдоль направления $\mathbf{k}$, перепишем эту формулу в виде

$$\varphi^{(+)}_{\omega\mathbf{k}} = -\frac{4\pi e}{k^2 \varepsilon_l(\omega,k)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{g_{\mathbf{k}}(p_x)\, dp_x}{i(kv_x-\omega)}, \tag{34.13}$$

где

$$g_{\mathbf{k}}(p_x) = \int g_{\mathbf{k}}(\mathbf{p})\, dp_y\, dp_z.$$

[1]) Преобразование (34.8), (34.9) есть не что иное, как известное преобразование Лапласа

$$f_p = \int\limits_0^\infty f(t) e^{-pt}\, dt, \qquad f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-i\infty+\sigma}^{i\infty+\sigma} f_p e^{pt}\, dp,$$

в котором переменная p заменена на $-i\omega$ и соответственно изменен путь интегрирования в формуле восстановления функции $f(t)$ по ее образу f_p.

Для дальнейшего определения временной зависимости потенциала по формуле обращения

$$\varphi_{\mathbf{k}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} e^{-i\omega t} \varphi_{\omega\mathbf{k}}^{(+)}\, d\omega \tag{34.14}$$

необходимо предварительно установить аналитические свойства $\varphi_{\omega\mathbf{k}}$ как функции комплексной переменной ω.

Выражение вида

$$\varphi_{\omega\mathbf{k}}^{(+)} = \int\limits_0^\infty \varphi_{\mathbf{k}}(t) e^{i\omega t}\, dt$$

как функция комплексной переменной ω имеет смысл лишь в верхней полуплоскости. То же относится соответственно и к выражению (34.13). Интегрирование в (34.13) производится по пути (вещественная ось p_x), проходящему ниже полюса $p_x = m\omega/k$. Мы видели в § 29, что определяемая таким интегралом функция переменной ω при ее аналитическом продолжении в нижнюю полуплоскость имеет особенности лишь в точках, совпадающих с особыми точками функции $g_{\mathbf{k}}(p_x)$. Будем считать, что $g_{\mathbf{k}}(p_x)$ как функция комплексной переменной p_x есть целая функция (т. е. не имеет никаких особенностей при конечных p_x); тогда и рассматриваемый интеграл определяет целую функцию ω.

В § 31 было отмечено, что проницаемость ε_l максвелловской плазмы — тоже целая функция ω. Таким образом, аналитическая во всей плоскости ω функция $\varphi_{\omega\mathbf{k}}$ есть частное двух целых функций. Отсюда следует, что единственными особенностями (полюсами) функции $\varphi_{\omega\mathbf{k}}$ являются нули ее знаменателя, т. е. нули функции $\varepsilon_l(\omega, k)$.

Эти соображения позволяют установить асимптотический закон убывания потенциала $\varphi_{\mathbf{k}}(t)$ при больших временах t. В формуле обращения (34.14) интегрирование производится по горизонтальной прямой в плоскости ω. Однако, понимая под $\varphi_{\omega\mathbf{k}}$ определенную указанным образом во всей плоскости аналитическую функцию, мы можем сместить путь интегрирования в нижнюю полуплоскость так, чтобы не пересечь при этом ни одного из полюсов функции. Пусть $\omega_k = \omega_k' + i\omega_k''$ — тот из корней уравнения $\varepsilon_l(\omega, k) = 0$, который обладает наименьшей по величине мнимой частью (т. е. ближайший к вещественной оси). Будем производить интегрирование в (34.14) по пути, смещенному достаточно далеко под точку $\omega = \omega_k$ и огибающему эту точку (а также и другие полюсы, лежащие сверху от него) указанным на рис. 9 образом. Тогда в интеграле будет существен (при больших t) только вычет относительно полюса ω_k; остальные части интеграла, в том числе интеграл по горизонтальной части пути, будут экспоненциально малы по сравнению с указанным выче-

том благодаря наличию в подынтегральном выражении множителя $e^{-i\omega t}$, быстро убывающего при увеличении $|\operatorname{Im}\omega|$. Таким образом, асимптотический закон убывания потенциала дается выражением

$$\varphi_{\mathbf{k}}(t) \sim e^{-i\omega_k' t} e^{-|\omega_k''| t}, \tag{34.15}$$

т. е. с течением времени возмущение поля затухает экспоненциально с декрементом $\gamma_k = |\omega_k''|$ [1]).

Для длинноволновых возмущений ($ka_e \ll 1$) частота ω_k' и декремент γ_k совпадают с таковыми для плазменных волн и даются формулами (32.5), (32.6). Декремент затухания таких возмущений экспоненциально мал. В обратном же случае коротковолновых возмущений, когда $ka_e \sim 1$, затухание становится очень сильным; декремент γ_k даже велик по сравнению с ω_k' [2]).

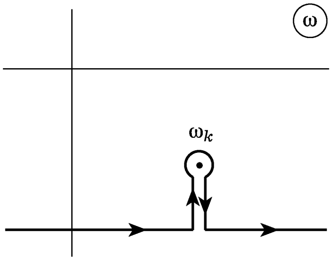


Рис. 9

Наконец, остановимся на свойствах самой функции распределения электронов. Искомая функция $f_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{p})$ получается подстановкой (34.10) в интеграл (34.9). Помимо полюсов в нижней полуплоскости, происходящих от $\varphi_{\omega\mathbf{k}}$, подынтегральное выражение имеет также полюс в точке $\omega = \mathbf{kv}$ на вещественной оси. Именно этот полюс и будет определять асимптотическое поведение интеграла при больших t. По вычету в нем находим

$$f_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{p}) \propto e^{-i\mathbf{kv}t}. \tag{34.16}$$

Таким образом, возмущение функции распределения не затухает с течением времени. Распределение становится, однако, все более быстро осциллирующей функцией скорости (период ос-

[1]) Если начальная функция $g_{\mathbf{k}}(p_x)$ имеет особенность, то в число конкурирующих значений ω входят наряду с нулями функции $\varepsilon_l(\omega, k)$ также и особые точки функции $\varphi_{\omega\mathbf{k}}$, возникающие от особенности интеграла в (34.13). В частности, если $g_{\mathbf{k}}(p_x)$ имеет особенность (например, излом) на вещественной оси, то и $\varphi_{\omega\mathbf{k}}$ будет иметь особенность при вещественном значении $\omega = kv_x$. Такое возмущение (в бесстолкновительной плазме!) вообще не будет затухать.

[2]) Может возникнуть вопрос о том, откуда возникает большое затухание, если «фазовая скорость» ω_k'/k лежит вне основного интервала тепловых скоростей. В действительности, однако, при $\gamma > \omega'$ об отношении ω'/k вообще нельзя говорить как о фазовой скорости. Если снова разложить функцию вида $e^{-i\omega' t} e^{-\gamma t}$ в интеграл Фурье, то в нем будут присутствовать компоненты с частотами во всем интервале от 0 до γ и соответственно с «фазовыми скоростями» от 0 до $\sim \gamma/k$.

цилляций по скорости $\sim 1/(kt)$). Поэтому возмущение плотности (т. е. интеграл $\int f_{\mathbf{k}}\, d^3p$) затухает, как и потенциал $\varphi_{\mathbf{k}}$ [1]).

Эволюция функции распределения согласно (34.16) относится ко времени, когда поле можно считать затухшим; формула (34.16) соответствует просто свободному разлету частиц — каждая со своей постоянной скоростью. Действительно, функция вида

$$f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = g(\mathbf{p}) e^{i(\mathbf{kr} - \mathbf{kv}t)} \tag{34.17}$$

есть решение кинетического уравнения свободных частиц

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = 0 \tag{34.18}$$

при заданном начальном ($t = 0$) распределении по скоростям и периодическом ($\propto e^{i\mathbf{kr}}$) распределении по координатам.

§ 35. Плазменное эхо

Термодинамически обратимый характер затухания Ландау проявляется в своеобразных нелинейных явлениях, называемых *плазменным эхом*. Эти явления возникают в результате тех незатухающих осцилляций функции распределения (34.16), которые остаются после бесстолкновительной релаксации возмущений плотности (и поля) в плазме. Они имеют по существу кинематическое происхождение, не связанное с существованием в плазме самосогласованного электрического поля. Мы проиллюстрируем его сначала на примере газа из незаряженных частиц без столкновений.

Пусть в начальный момент времени в газе задано возмущение, в котором функция распределения, оставаясь по скоростям максвелловской в каждой точке пространства, меняется вдоль оси x по периодическому закону

$$\delta f = A_1 \cos k_1 x \cdot f_0(p) \quad \text{при} \quad t = 0 \tag{35.1}$$

(в этом параграфе $p = mv$ будет обозначать x-компоненту импульса; функция распределения предполагается уже проинтегрированной по p_y и p_z). По такому же закону меняется вдоль оси x (в тот же момент $t = 0$) и возмущение плотности газа, т. е. интеграл $\int \delta f \cdot dp$. В последующие моменты времени возмущение

---

[1]) Забегая вперед, сразу же отметим, однако, что осциллирующий характер функции распределения при больших t приводит к сильному возрастанию эффективного числа кулоновских столкновений и тем самым ускоряет наступающее в конечном счете затухание возмущения (см. задачу к § 41).

функции распределения будет меняться по закону

$$\delta f = A_1 \cos[k_1(x - vt)] f_0(p), \tag{35.2}$$

отвечающему свободному перемещению каждой частицы вдоль оси x со своей скоростью v. Возмущение плотности, однако, затухнет $\left(\text{за время} \sim \dfrac{1}{v_T k_1}\right)$ ввиду погашения интеграла $\int \delta f\, dp$ за счет осциллирующего по скоростям множителя $\cos[k_1(x - vt)]$ в подынтегральном выражении. Асимптотический закон этого затухания при временах $t \gg \dfrac{1}{k_1 v_T}$ дается выражением

$$\delta N = \int \delta f\, dp \propto \exp\left(-\frac{1}{2}k_1^2 v_T^2 t^2\right) \tag{35.3}$$

(оценка интеграла производится методом перевала).

Пусть теперь в некоторый момент времени $t = \tau \gg \dfrac{1}{k_1 v_T}$ функция распределения снова промодулирована с амплитудой A_2 и некоторым новым волновым вектором $k_2 > k_1$. Возникшее возмущение плотности снова затухнет $\left(\text{за время} \sim \dfrac{1}{k_2 v_T}\right)$, но в момент

$$\tau' = \frac{k_2}{k_2 - k_1}\tau \tag{35.4}$$

возникнет вновь. Действительно, вторая модуляция приводит к появлению в функции распределения (в момент $t = \tau$) члена второго порядка вида

$$\delta f^{(2)} = A_1 A_2 \cos(k_1 x - k_1 v\tau) \cos k_2 x \cdot f_0(p). \tag{35.5}$$

Дальнейшая эволюция этого возмущения при $t > \tau$ превращает его в

$$\begin{aligned}\delta f^{(2)} &= A_1 A_2 f_0(p) \cos\left[k_1 x - k_1 vt\right] \cos\left[k_2 x - k_2 v(t - \tau)\right] = \\ &= \frac{1}{2} A_1 A_2 f_0(p) \{\cos\left[(k_2 - k_1)x - (k_2 - k_1)vt + k_2 v\tau\right] + \\ &\qquad + \cos\left[(k_2 + k_1)x - (k_2 + k_1)vt + k_2 v\tau\right]\}.\end{aligned}$$

Теперь видно, что в момент $t = \tau'$ осциллирующая зависимость от v в первом члене исчезает, так что этот член даст конечный вклад в возмущение плотности газа с волновым вектором $k_2 - k_1$. Возникшее таким образом *эхо* затухнет затем в течение времени $\sim \dfrac{1}{v_T(k_2 - k_1)}$, причем последняя стадия этого затухания происходит по закону, аналогичному (35.3).

Перейдем к исследованию этого явления в электронной плазме (*R. W. Gould*, *T. M. O'Neil*, *J. H. Malmberg*, 1967). Его механизм остается прежним, но конкретный закон затухания меняется из-за влияния самосогласованного поля.

Будем считать, что возмущения создаются импульсами некоторого внешнего (создаваемого «сторонними» зарядами) потенциала $\varphi^{(\text{ст})}$, прилагаемыми к плазме в моменты $t = 0$ и $t = \tau$:

$$\varphi^{(\text{ст})} = \varphi_1 \delta(t) \cos k_1 x + \varphi_2 \delta(t-\tau) \cos k_2 x; \tag{35.6}$$

при этом предполагается, что $k_2 > k_1$, а $\tau \gg \dfrac{1}{k_1 v_T}, \dfrac{1}{\gamma(k_1)}$ (где $\gamma(k)$ — декремент затухания Ландау).

Возмущение функции распределения ($f = f_0 + \delta f$) удовлетворяет бесстолкновительному кинетическому уравнению, которое с учетом члена второго порядка имеет вид

$$\frac{\partial\, \delta f}{\partial t} + v \frac{\partial\, \delta f}{\partial x} + e \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{df_0}{dp} = -e \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial\, \delta f}{\partial p}. \tag{35.7}$$

При этом потенциал φ возникающего в плазме поля (включающий в себя также и «стороннюю» часть $\varphi^{(\text{ст})}$) удовлетворяет уравнению

$$\Delta(\varphi - \varphi^{(\text{ст})}) = 4\pi e \int \delta f\, dp. \tag{35.8}$$

Будем искать решение этих уравнений в виде интегралов Фурье:

$$\delta f = \int f_{\omega' k'} e^{i(k'x - \omega' t)} \frac{d\omega'\, dk'}{(2\pi)^2},$$

$$\varphi = \int \varphi_{\omega'' k''} e^{i(k''x - \omega'' t)} \frac{d\omega''\, dk''}{(2\pi)^2}.$$

Подставив эти выражения, умножив затем уравнение на $e^{-i(kx-\omega t)}$ и интегрируя их по $dx\, dt$, получим

$$(kv - \omega) f_{\omega k} + ek\varphi_{\omega k} \frac{df_0}{dp} = \\ = -e \int (k - k') \varphi_{\omega-\omega', k-k'} \frac{df_{\omega' k'}}{dp} \frac{d\omega' dk'}{(2\pi)^2}, \tag{35.9}$$

$$-k^2 \varphi_{\omega k} = 4\pi e \int f_{\omega k}\, dp - k^2 \varphi^{(\text{ст})}_{\omega k}, \tag{35.10}$$

где

$$\varphi^{(\text{ст})}_{\omega k} = \pi\varphi_1 [\delta(k + k_1) + \delta(k - k_1)] + \pi\varphi_2 [\delta(k + k_2) + \delta(k - k_2)] e^{i\omega\tau}.$$

В линейном приближении (т. е. при пренебрежении правой частью в (35.9)) решение этих уравнений есть

$$f^{(1)}_{\omega k} = -e\frac{df_0}{dp}\frac{k}{kv-\omega}\varphi^{(1)}_{\omega k}, \quad \varphi^{(1)}_{\omega k} = \frac{\varphi^{(\text{ст})}_{\omega k}}{\varepsilon_l(\omega, k)}, \tag{35.11}$$

где ε_l — диэлектрическая проницаемость (29.10). Этому решению отвечают возмущения, затухающие от моментов времени $t = 0$ и $t = \tau$ соответственно с декрементами $\gamma(k_1)$ и $\gamma(k_2)$.

Во втором приближении надо подставить (35.11) в правую часть уравнения (35.9) и для членов второго порядка в возмущениях функции распределения и потенциала получаются уравнения

$$(kv-\omega)f^{(2)}_{\omega k} + ek\varphi^{(2)}_{\omega k}\frac{df_0}{dp} = \frac{dI_{\omega k}}{dp}, \tag{35.12}$$

$$k^2\varphi^{(2)}_{\omega k} = -4\pi e\int f^{(2)}_{\omega k}\,dp, \tag{35.13}$$

где

$$I_{\omega k} = -e\int (k-k')\varphi^{(1)}_{\omega-\omega', k-k'} f^{(1)}_{\omega' k'}\frac{d\omega'\,dk'}{(2\pi)^2}. \tag{35.14}$$

Интересующий нас эффект — эхо с волновым вектором $k_2 - k_1$ — будет заключен в членах в правой части (35.12), содержащих $\delta(k \pm (k_2 - k_1))$. Соберем такие члены в выражении $I_{\omega k}$. К моменту времени $t = \tau$ возмущение $\varphi^{(1)}$, происходящее от приложенного при $t = 0$ импульса φ_1, уже затухнет. Поэтому заранее очевидно, что при подстановке (35.11) в (35.14) надо учесть в $\varphi^{(1)}_{\omega k}$ лишь член с φ_2; интересующие нас члены вида

$$I_{\omega k} = I_\omega(k_1, k_2)\delta(k - k_2 + k_1) + I_\omega(-k_1, -k_2)\delta(k + k_2 - k_1) \tag{35.15}$$

получатся при этом от членов в $f^{(1)}_{\omega k}$, содержащих φ_1. После выполнения интегрирования по dk' в (35.14) получим в результате [1])

$$I_\omega(k_1, k_2) = \frac{1}{4}e^2\varphi_1\varphi_2 k_1 k_2\frac{df_0}{dp}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(\omega-\omega')\tau}\,d\omega'}{(k_1 v + \omega')\varepsilon_l(\omega', k_1)\varepsilon_l(\omega-\omega', k_2)}, \tag{35.16}$$

причем, как всегда, переменную интегрирования ω' надо понимать как $\omega' + i0$.

[1]) При вычислении следует иметь в виду, что ε_l зависит лишь от $|\mathbf{k}|$ и потому в обозначениях этого параграфа (где $k \equiv k_x$) имеем $\varepsilon_l(\omega, -k) = \varepsilon_l(\omega, k)$.

Интеграл (35.16) можно вычислить с учетом того, что τ предполагается большим $\left(\tau \gg \dfrac{1}{kv_T}, \dfrac{1}{\gamma}\right)$. Для этого смещаем в нижнюю полуплоскость комплексной переменной ω' контур интегрирования, «зацепляющийся» при этом за полюсы подынтегрального выражения. Эти полюсы расположены в нулях функций ε_l и в точке $\omega' = -k_1 v - i0$. Первые из них имеют отличные от нуля отрицательные мнимые части ($-\gamma(k_1)$ или $-\gamma(k_2)$), и вклады от них в интеграл (вычеты в полюсах) затухают с увеличением τ как $e^{-\gamma\tau}$. Незатухающий же вклад возникает только от вещественного полюса $\omega' = -k_1 v - i0$. Таким образом, получим

$$I_\omega(k_1, k_2) = -e^2 \frac{i\pi}{2} \frac{df_0}{dp} \frac{\varphi_1 \varphi_2 k_1 k_2 e^{i(\omega + k_1 v)\tau}}{\varepsilon_l(-k_1 v, k_1)\varepsilon_l(\omega + k_1 v, k_2)}. \tag{35.17}$$

Возвращаясь к уравнениям (35.12), (35.13) и подставив $f^{(2)}_{\omega k}$ из первого уравнения во второе, находим

$$\varphi^{(2)}_{\omega k} = -\frac{4\pi e}{k^2 \varepsilon_l(\omega, k)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dI_{\omega k}}{dp} \frac{dp}{kv - \omega - i0}. \tag{35.18}$$

При вычислении производной $dI_{\omega k}/dp$ надо дифференцировать только экспоненциальный множитель в (35.17), поскольку $k_1 v_T \tau \gg 1$.

Собирая теперь полученные выражения (35.15)–(35.18) и совершая обратное преобразование Фурье, получим интересующий нас потенциал эха с волновым вектором $k_3 = k_2 - k_1$ в виде

$$\varphi^{(2)}(t, x) = \operatorname{Re}\{A(t) e^{ik_3 x}\}. \tag{35.19}$$

Амплитуду $A(t)$ выпишем сразу в асимптотическом пределе при $t - \tau \to \infty$. В этом пределе интеграл по ω определяется вычетом подынтегрального выражения только в полюсе $\omega = k_3 v - i0$. Окончательно находим

$$A(t) = -i\pi e^3 \varphi_1 \varphi_2 \tau \frac{k_1^2 k_2}{k_3^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df_0}{dp} \frac{\exp[-ivk_3(t - \tau')]\, dp}{\varepsilon_l(k_3 v, k_3)\varepsilon_l(-k_1 v, k_1)\varepsilon_l(k_2 v, k_2)}, \tag{35.20}$$

где $\tau' = k_2\tau/k_3$.

Это выражение — амплитуда эха — максимально при $t = \tau'$, причем максимальное значение пропорционально τ, т. е. промежутку времени между двумя импульсами. По обе стороны от максимума амплитуда $A(t)$ убывает, но по различным законам. Асимптотически при $t - \tau' \to \infty$ интеграл (35.20) определяется

вычетом подынтегрального выражения в его полюсе с наименьшей по величине отрицательной мнимой частью; этот полюс лежит при $\varepsilon_l(k_3 v, k_3) = 0$, и его мнимая часть $\operatorname{Im} v = -\gamma(k_3)/k_3$ [1]. По другую же сторону от максимума, при $t-\tau' \to -\infty$, интеграл определяется вычетом в полюсе при $\varepsilon_l(-k_1 v, k_1) = 0$, для которого $\operatorname{Im} v = \gamma(k_1)/k_1$ (путь интегрирования должен быть при этом смещен в верхнюю полуплоскость комплексного v). В результате находим, что

$$A(t) \propto \exp[-\gamma(k_3)(t-\tau')] \quad \text{при} \quad t-\tau' \to \infty,$$

$$A(t) \propto \exp\left[-\frac{k_3}{k_1}\gamma(k_1)(\tau'-t)\right] \quad \text{при} \quad t-\tau' \to -\infty. \qquad (35.21)$$

Таким образом, амплитуда эха перед достижением его максимума возрастает с инкрементом $k_3\gamma(k_1)/k_1$, а за максимумом убывает с декрементом $\gamma(k_3)$. Рис. 10 иллюстрирует рассмотренное явление: первые две кривые изображают ход изменения потенциала в двух импульсах, приложенных в моменты $t = 0$ и $t = \tau$, а третья кривая — форму эха. Около кривых указаны соответствующий декремент или инкремент.

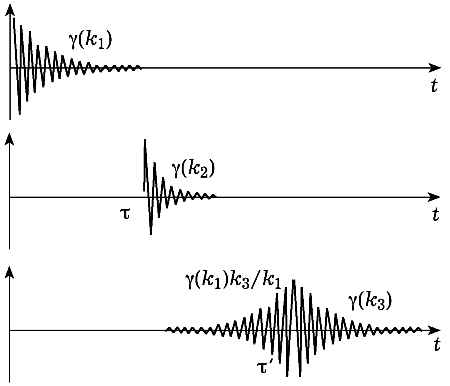


Рис. 10

Изложенные расчеты произведены в пренебрежении столкновениями. Поэтому условие применимости количественной формулы (35.20) требует, чтобы к заданному моменту t осцилляции функции распределения не успели еще затухнуть под влиянием столкновений. Забегая вперед и воспользовавшись результатами задачи к § 41, можно сформулировать это условие в виде

$$\nu(v_T)(kv_T)^2 t^3 \ll 1, \qquad (35.22)$$

где $\nu(v_T)$ — средняя частота кулоновских столкновений электрона.

[1]) Подразумевается, что все волновые векторы $k \ll 1/a_e$. Тогда $\gamma(k)$ экспоненциально мало и убывает с возрастанием k. Поскольку $k_3 < k_2$, то полюс при $\varepsilon_l(k_2 v, k_2) = 0$ в этих условиях заведомо лежит дальше от вещественной оси v, чем полюс при $\varepsilon_l(k_3 v, k_3) = 0$.

§ 36. Адиабатический захват электронов

Рассмотрим вопрос о распределении электронов плазмы в медленно включаемом потенциальном электрическом поле. Пусть L — порядок величины протяженности поля, а τ — характерное время его изменения. Будем считать, что

$$\tau \gg L/\overline{v}_e. \tag{36.1}$$

В то же время будем предполагать τ малым по сравнению со временем свободного пробега электронов, так что речь идет по-прежнему о бесстолкновительной плазме.

В силу условия (36.1) поле можно считать стационарным в течение времени его пролета электроном. С этой же точностью будет стационарной также и функция распределения электронов в поле. Как было указано в конце § 27, решение бесстолкновительного кинетического уравнения зависит только от интегралов движения частицы; для стационарного распределения это могут быть только те интегралы, которые не зависят явно от времени.

Мы ограничимся одномерным случаем, когда потенциал поля φ зависит только от одной координаты x. Так как движение вдоль осей y и z при этом несущественно, речь будет идти о функции распределения f только по импульсу p_x (и по координате x).

В одномерном случае уравнение движения имеет два интеграла, из которых не зависит явно от времени (в стационарном поле) всего один — энергия электрона

$$\varepsilon = \frac{p_x^2}{2m} + U(x), \tag{36.2}$$

где $U(x) = -e\varphi(x)$ [1]. Поэтому стационарная функция распределения будет зависеть от p_x и x только в комбинации (36.2):

$$f = f[\varepsilon(x, p_x)]. \tag{36.3}$$

Вид же функции $f(\varepsilon)$ должен определяться граничными условиями.

Пусть поле $U(x)$ имеет вид потенциального барьера (рис. 11 *а*). В этом случае функция $f(\varepsilon)$ определяется видом распределения электронов, приходящих к барьеру из бесконечности. Так, если по обе стороны вдали от барьера электроны имеют равновесное (однородное по пространству) распределение с температурой T_e, то и во всем пространстве будет иметь место больцмановское

[1]) Вторым интегралом движения может являться, например, начальное (в некоторый заданный момент времени) значение координаты частицы x_0, выраженное в функции от времени и текущей координаты вдоль траектории $x_0(t, x)$.

распределение:

$$f = \frac{N_0}{(2\pi m T_e)^{1/2}} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{T_e}\right). \tag{36.4}$$

Плотность же электронного газа будет распределена везде по формуле

$$N_e(x) = N_0 e^{-U(x)/T_e}, \tag{36.5}$$

где N_0 — плотность вдали от барьера.

Пусть теперь поле имеет вид потенциальной ямы (рис. 11 *б*). В этом случае распределение электронов с положительной энергией ε снова определится распределением частиц, приходящих из бесконечности; при равновесном распределении на бесконечности распределение электронов с $\varepsilon > 0$ будет больцмановским во всем пространстве. Но помимо частиц с $\varepsilon > 0$, в этом случае существуют также и частицы с энергией $\varepsilon < 0$; эти частицы совершают финитное движение внутри потенциальной ямы — они «захвачены». На бесконечности частиц с $\varepsilon < 0$ нет; поэтому изложенные выше соображения, в которых энергия рассматривалась как строго сохраняющаяся величина, недостаточны для нахождения распределения захваченных частиц. Необходимо учесть также и изменение энергии в не строго стационарном поле, в результате чего это распределение оказывается, вообще говоря, зависящим от предыстории — от хода включения поля (*А.В. Гуревич*, 1967).

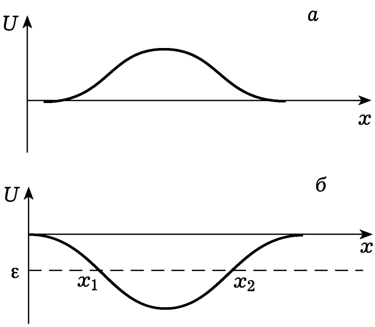


Рис. 11

В силу условия (36.1) поле мало меняется за время периода финитного движения захваченных частиц. Как известно, в таком случае сохраняется так называемый *адиабатический инвариант* — интеграл

$$I(t, \varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \cdot 2 \int\limits_{x_1}^{x_2} [2m(\varepsilon - U(t, x))]^{1/2}\, dx, \tag{36.6}$$

взятый между двумя границами движения (при заданных ε и t). Эта величина и будет играть теперь роль интеграла движения, через который должна выражаться функция распределения захваченных частиц:

$$f_{\text{захв}} = f_{\text{захв}}(I(t, \varepsilon)) \tag{36.7}$$

(причем энергия ε в свою очередь предполагается выраженной здесь через x и p_x согласно (36.2)). Вид же функции (36.7) опре-

деляется тем, что при медленном включении поля функция распределения будет непрерывной функцией ε. Поэтому при граничном значении энергии захваченных частиц функция $f_{\text{захв}}(I)$ должна совпадать с функцией распределения частиц, совершающих над ямой инфинитное движение.

Случай потенциальной ямы вида рис. 10 *б*, однако, в особенности прост в виду того, что граничная энергия остается (при постепенном включении поля) постоянной, равной нулю. Тогда из указанного граничного условия следует, что $f_{\text{захв}}$ сводится просто к постоянной:

$$f_{\text{захв}} = f(0), \tag{36.8}$$

где $f(\varepsilon)$ — функция распределения частиц над ямой. Найдем пространственное распределение электронов в этом случае, если $f(\varepsilon)$ — больцмановская функция (36.4).

Суммируя числа электронов с $\varepsilon > 0$ и с $\varepsilon < 0$, имеем

$$N_e = 2\int\limits_{p_1}^{\infty} f(\varepsilon)\,dp_x + 2\int\limits_{0}^{p_1} f(0)\,dp_x, \quad p_1 = (2m|U|)^{1/2}$$

(множители 2 учитывают частицы с $p_x > 0$ и $p_x < 0$). Подставив сюда $f(\varepsilon)$ из (36.4), получим

$$N_e(t,x) = N_0\left\{e^{|U|/T_e}\left[1-\Phi\left(\sqrt{\frac{|U|}{T_e}}\right)\right] + 2\sqrt{\frac{|U|}{\pi T_e}}\right\}, \tag{36.9}$$

где

$$\Phi(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\xi} e^{-u^2}\,du. \tag{36.10}$$

При $\xi \ll 1$, разложив подынтегральное выражение в (36.10) по степеням u, имеем

$$\Phi(\xi) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\xi - \frac{\xi^3}{3}\right).$$

Поэтому распределение электронов, захваченных в неглубокой яме ($|U| \ll T_e$), дается формулой

$$N_e = N_0\left[1 + \frac{|U|}{T_e} - \frac{4}{3\sqrt{\pi}}\left(\frac{|U|}{T_e}\right)^{3/2}\right]. \tag{36.11}$$

Первый поправочный член совпадает с тем, что получилось бы из формулы Больцмана (36.5). Но уже следующая поправка отличается от больцмановской.

При $\xi \gg 1$ разность $1-\Phi(\xi)$ экспоненциально мала ($\sim \exp(-\xi^2)$). Поэтому в случае глубокой ямы ($|U| \gg T_e$) в

(36.9) существен лишь второй член в фигурных скобках, так что

$$N_e(t, x) = 2N_0 \left(\frac{|U|}{\pi T_e}\right)^{1/2}. \qquad (36.12)$$

С увеличением $|U|$ плотность возрастает гораздо медленнее, чем это следовало бы по формуле Больцмана.

§ 37. Квазинейтральная плазма

Уравнения динамики плазмы допускают далеко идущее упрощение для категории явлений, в которых характерные масштабы длин и времени удовлетворяют следующим условиям. Характерный размер неоднородностей в плазме L предполагается большим по сравнению с электронным дебаевским радиусом:

$$\frac{a_e}{L} \ll 1. \qquad (37.1)$$

Скорость же процесса предполагается определяющейся движением ионов, так что характерный масштаб скорости дается величиной v_{Ti}, малой по сравнению со скоростями электронов. Движение ионов приводит к медленному изменению электрического потенциала, за которым адиабатически следует распределение электронов.

Пусть δN_e и δN_i — изменения плотностей электронов и ионов в возмущенной плазме. Эти изменения создают в плазме среднюю плотность некомпенсированного заряда: $\delta\rho = e(z\delta N_i - \delta N_e)$. Потенциал создаваемого этими зарядами электрического поля определяется уравнением Пуассона

$$\Delta\varphi = -4\pi e(z\delta N_i - \delta N_e). \qquad (37.2)$$

По порядку величины $\Delta\varphi \sim \varphi/L^2$. Поэтому

$$\left|\frac{z\delta N_i - \delta N_e}{\delta N_e}\right| \sim \frac{1}{4\pi e L^2}\left|\frac{\varphi}{\delta N_e}\right|. \qquad (37.3)$$

Если поле слабо ($e\varphi \ll T_e$), то изменение электронной плотности

$$\delta N_e \sim \frac{e\varphi N_e}{T_e}$$

(ср. (36.11)) и тогда

$$\left|\frac{z\delta N_i - \delta N_e}{\delta N_e}\right| \sim \frac{a_e^2}{L^2} \ll 1. \qquad (37.4)$$

Это неравенство остается справедливым и в случае сильного возмущения, когда $e\varphi \sim T_e$; при этом $\delta N_e \sim N_e$ и из (37.3) снова следует (37.4).

Таким образом, возникающая при возмущении некомпенсированная плотность зарядов оказывается малой по сравнению с возмущениями плотностей зарядов электронов и ионов в отдельности; в таких случаях говорят о *квазинейтральной плазме*. Это свойство позволяет при изучении рассматриваемого круга явлений определять распределение потенциала в плазме, просто исходя из «уравнения квазинейтральности»

$$N_e = zN_i \tag{37.5}$$

совместно с кинетическим уравнением для ионов и с уравнением, выражающим «адиабатическое» распределение электронов [1]).

Разумеется, в начальный момент времени — если рассматривается задача с начальными условиями — плотности электронов могут быть заданы произвольно и не обязательно удовлетворяют неравенству (37.4). Возникающее при этом большое электрическое поле приведет, однако, к движению электронов, которое быстро, за характерные «электронные» времена, восстановит квазинейтральность (в диффузионном случае этот процесс прослежен в § 25).

Переход от электродинамического уравнения (37.2) к условию (37.5) означает не только существенное упрощение системы уравнений динамики плазмы, но и принципиальное изменение их размерностной структуры. Действительно, потенциал φ входит в кинетическое уравнение и в распределение электронов только в произведении с зарядом e, а в условие (37.5) (в противоположность уравнению (37.2)) заряд вообще не входит. Поэтому заменой

$$e\varphi \to \psi \tag{37.6}$$

заряд e вообще устраняется из уравнений, а вместе с ним исчезает также и параметр размерности длины — дебаевский радиус a_e.

Отсутствие в уравнениях параметра длины делает возможными автомодельные движения плазмы. Такие решения появляются в тех случаях, когда параметры размерности длины отсутствуют также и в начальных или граничных условиях задачи; тогда все функции могут зависеть от координат и времени только в комбинации $\mathbf{r}/t$. Пусть, например, плазма первоначально занимает полупространство $x < 0$. В момент времени $t = 0$ «убирается заслонка» и плазма начинает расширяться в пустоту. Сначала начинают двигаться электроны, так что электронная

---

[1]) Подчеркнем, что этот результат сам по себе относится как к бесстолкновительной плазме, так и к плазме со столкновениями. Заметим также, что, поскольку вывод неравенства (37.4) не связан с предположением о слабости поля, свойство квазинейтральности имеет место и в тех случаях, когда электромагнитные свойства плазмы не могут быть описаны с помощью диэлектрической проницаемости (т. е. в предположении линейной связи между **D** и **E**).

плотность образует вблизи границы переходный слой с характерной шириной $\sim a_e$. За время $t_1 \gg a_e/v_{T_e}$ электронное движение затухает и далее электронная плотность следует адиабатически за потенциалом согласно формуле Больцмана. Теперь изменение всех величин определяется движением ионов. Благодаря этому за время $t_2 \gg a_e/v_{T_i} \gg a_e/v_{T_e}$ граница размывается на расстояниях, больших по сравнению с a_e. К этому времени плазма становится квазинейтральной, а движение автомодельным.

Напишем уравнения динамики квазинейтральной плазмы в раскрытом виде, предположив для определенности, что распределение электронной плотности везде больцмановское:

$$N_e = N_0 e^{\psi/T_e}; \tag{37.7}$$

как было показано в § 36, это распределение не нарушается медленно меняющимся полем, если поле не содержит потенциальных ям. Формула (37.7) совместно с условием (37.5) позволяет прямо выразить потенциал через функцию распределения ионов:

$$\psi = T_e \ln \frac{zN_i}{N_0} = T_e \ln \left[\frac{z}{N_0} \int f_i \, d^3p \right]. \tag{37.8}$$

Подставив же это выражение в кинетическое уравнение для ионов (с самосогласованным полем $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$), получим

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{r}} - zT_e \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \ln \int f_i \, d^3p = 0. \tag{37.9}$$

Отметим, что, несмотря на нелинейность этого уравнения, его решения не зависят от средней плотности плазмы: если $f_i(t, \mathbf{r})$ есть решение, то решением будет и Cf_i с произвольным постоянным множителем C.

Упомянем, что в одномерном случае уравнение (37.9) имеет класс решений, характерных тем, что в них функция $f_i(t, x, \mathbf{p})$ зависит от координаты x и времени t только через посредство некоторой функции $\chi(t, x)$:

$$f_i = f_i[\chi(t, x), \mathbf{p}]. \tag{37.10}$$

Эти решения в известном смысле аналогичны простым волнам обычной гидродинамики.

§ 38. Гидродинамика двухтемпературной плазмы

В особенности простое теоретическое описание допускает двухтемпературная плазма, в которой

$$T_e \gg T_i. \tag{38.1}$$

Мы уже видели в § 33, что в этом случае в плазме могут распро-

страняться незатухающие ионно-звуковые волны со скоростью $\sim (T_e/M)^{1/2}$. Эта же скорость будет вообще характерна для распространения возмущений в плазме. Поскольку в то же время она велика (в силу (38.1)) по сравнению с тепловыми скоростями ионов, то для большинства задач о движении плазмы можно вообще пренебречь тепловым разбросом скоростей ионов. Движение ионной компоненты плазмы будет тогда описываться в «гидродинамическом приближении» скоростью $\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}_i$, задаваемой как функция точки в пространстве (и времени) и удовлетворяющей уравнению

$$M\frac{d\mathbf{v}}{dt} = ez\mathbf{E},$$

или

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = \frac{ez}{M}\mathbf{E}. \tag{38.2}$$

К этому уравнению добавляется уравнение непрерывности

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} + \operatorname{div}(N_i\mathbf{v}) = 0 \tag{38.3}$$

и уравнение Пуассона, определяющее потенциал электрического поля φ (а с ним и напряженность $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$):

$$\Delta\varphi = -4\pi e(zN_i - N_e). \tag{38.4}$$

Что же касается электронов, то при движениях плазмы со скоростями $v \lesssim (T_e/M)^{1/2} \ll v_{Te}$ их распределение адиабатически следует за распределением поля. Как мы видели в § 36, конкретное выражение для электронной плотности N_e при этом существенно зависит от характера поля. Для поля без потенциальных ям оно дается просто формулой Больцмана (37.7), так что уравнение (38.4) принимает вид

$$\Delta\varphi = -4\pi eN_0\left(\frac{zN_i}{N_0} - e^{e\varphi/T_e}\right). \tag{38.5}$$

Уравнения (38.2), (38.3) и (38.5) составляют полную систему уравнений для функций $\mathbf{v}$, N и φ. Она может быть еще упрощена для квазинейтральной плазмы. В этом случае согласно (37.8) имеем

$$e\varphi = T_e \ln\frac{zN_i}{N_0}, \quad e\mathbf{E} = -T_e\frac{\nabla N_i}{N_i} \tag{38.6}$$

и (38.2) можно переписать в виде

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{zT_e}{M}\frac{\nabla N_i}{N_i}. \tag{38.7}$$

Система уравнений (38.3) и (38.7) формально тождественна уравнениям гидродинамики изотермического идеального газа с

массой частиц M и температурой zT_e. Скорость звука в таком газе равна $(zT_e/M)^{1/2}$ — в соответствии с выражением (33.5) для скорости ионно-звуковых волн; дисперсия волн в этом приближении отсутствует.

Установленная аналогия с гидродинамикой нуждается в существенной оговорке. Как известно, система гидродинамических уравнений далеко не всегда имеет непрерывные во всем пространстве решения. Отсутствие непрерывного решения в обычной гидродинамике означает образование ударных волн — поверхностей, на которых физические величины испытывают разрывы. В бесстолкновительной гидродинамике не существует ударных волн, поскольку они по самой своей природе связаны с отсутствующей в данном случае диссипацией энергии. Отсутствие непрерывных решений означает здесь, что в некоторой области пространства нарушается предположение о квазинейтральности плазмы. В таких областях (их условно называют *бесстолкновительными ударными волнами*) зависимость физических величин от координат и времени оказывается осциллирующей, причем характерная длина волны этих осцилляций определяется не только характерными размерами задачи, но и внутренним свойством плазмы — ее дебаевским радиусом [1]).

Вернемся к более общим уравнениям (38.2)–(38.4), не предполагающим квазинейтральности плазмы. Важным свойством этих уравнений является существование у них одномерных решений, в которых все величины зависят от переменных t и x только в комбинации $\xi = x - ut$ с постоянной u. Такие решения описывают волны, распространяющиеся со скоростью u без изменения своего профиля. Если перейти к системе отсчета, движущейся относительно исходной системы со скоростью u, то в этой системе движение плазмы будет стационарным. Наиболее интересными из решений этого типа являются решения, периодические в пространстве, и решения, убывающие в обе стороны на бесконечности. Рассмотрим здесь именно последние — так называемые *уединенные волны*, или *солитоны* [2]) (*А.А. Веденов, Е.П. Велихов, Р.З. Сагдеев*, 1961).

Обозначив штрихом дифференцирование по ξ, получим из (38.2), (38.3)

$$(v-u)v' = -\frac{e}{M}\varphi', \qquad (N_i v)' - uN_i' = 0$$

(для упрощения полагаем $z = 1$).

---

[1]) Понятие бесстолкновительной ударной волны было введено *Р.З. Сагдеевым* в 1964 г. Фактическое построение такой структуры в некоторых частных случаях см. *Гуревич А.В., Питаевский Л.П.* // ЖЭТФ. 1973. Т. 65. С. 590.

[2]) От английского слова solitary — одинокий.

Интегрируя эти уравнения с граничными условиями $\varphi = 0$, $v = 0$, $N_i = N_0$ при $\xi \to \infty$, найдем

$$\frac{e}{M}\varphi = \frac{u^2}{2} - \frac{(u-v)^2}{2}, \tag{38.8}$$

$$N_i = N_0 \frac{u}{u-v} = N_0 \frac{u}{[u^2 - 2e\varphi/M]^{1/2}}. \tag{38.9}$$

Уравнение же (38.4) дает $\varphi'' = -4\pi e(N_i - N_e)$, или, после умножения на $2\varphi'$ и интегрирования,

$$\varphi'^2 = -8\pi e \int\limits_0^{\varphi} [N_i(\varphi) - N_e(\varphi)]\, d\varphi. \tag{38.10}$$

При этом функция $N_i(\varphi)$ берется из (38.9), а $N_e(\varphi)$ определяется формулами § 36. Отметим, что в рассматриваемой волне всегда $\varphi > 0$, как это видно из (38.8). Потенциальная энергия электрона в таком поле $U = -e\varphi < 0$, т. е. по отношению к электронам поле имеет характер потенциальной ямы.

Уравнением (38.10) задача об определении профиля волны $\varphi(\xi)$ сводится к квадратурам. При этом скорость u оказывается непосредственно связанной с амплитудой волны — максимальным значением функции $\varphi(\xi)$ (обозначим это значение через φ_m). Действительно, при $\varphi = \varphi_m$ должно быть $\varphi' = 0$. Приравняв нулю интеграл в правой части (38.10) (и осуществив в нем интегрирование первого члена), получим уравнение

$$\frac{Mu^2}{e}\left[1 - \left(1 - 2e\frac{\varphi_m}{Mu^2}\right)^{1/2}\right] = \frac{1}{N_0}\int\limits_0^{\varphi_m} N_e(\varphi)\, d\varphi, \tag{38.11}$$

которое и определяет в принципе зависимость u от φ_m. При этом, очевидно, должно быть

$$2e\frac{\varphi_m}{Mu^2} < 1. \tag{38.12}$$

Это условие, вообще говоря, устанавливает верхнюю границу возможных значений амплитуды волны φ_m (а с нею и скорости u).

Отметим еще, что для полного пренебрежения столкновениями необходимо, чтобы частота поля ω была велика по сравнению с характерными частотами соударений как электронов ν_e, так и ионов ν_i. Но поскольку $\nu_e \sim (M/m)^{1/2}\nu_i \gg \nu_i$ (см. § 43), то возможна ситуация, когда $\nu_e \gg \omega \gg \nu_i$. В таком случае столкновения по-прежнему не влияют на движение ионов, но распределение электронов можно считать больцмановским и при наличии потенциальных ям.

Задача

Определить профиль и скорость уединенной волны небольшой интенсивности ($e\varphi_m/T_e \ll 1$) в плазме с электронами, распределенными согласно (36.11) (*А.В. Гуревич*, 1967).

Решение. В (36.11) должны быть сохранены все члены; возникновение уединенной волны связано именно с последним, нелинейным членом в этом выражении. Вычисление по (38.11) приводит к результату

$$u^2 = \frac{T_e}{M}\left[1 + \frac{16}{15}\left(\frac{e\varphi_m}{\pi T_e}\right)^{1/2}\right].$$

Профиль волны находится интегрированием уравнения (38.10) и имеет вид

$$\varphi = \varphi_m \operatorname{ch}^{-4}\left[\frac{x}{\sqrt{15}\,a_e}\left(\frac{e\varphi_m}{\pi T_e}\right)^{1/4}\right].$$

§ 39. Солитоны в слабо диспергирующей среде

Существование (в среде без диссипации) нелинейных волн со стационарным профилем тесно связано с наличием дисперсии. В недиспергирующей среде учет нелинейности неизбежно нарушает стационарность волны; скорость распространения различных точек профиля оказывается зависящей от значения амплитуды в этих точках, что и приводит к искажению профиля. Так, в гидродинамике идеальной сжимаемой жидкости нелинейные эффекты приводят к постепенному увеличению крутизны переднего фронта волны (см. VI, § 94). Дисперсия же, со своей стороны, приводит к постепенному расплыванию профиля, и оба влияния могут взаимно компенсироваться, приводя к стационарности профиля волны.

В этом параграфе мы изучим эти явления в общем виде для довольно широкой категории случаев распространения волн в бездиссипативной слабо диспергирующей среде с учетом слабой же нелинейности.

Пусть u_0 — скорость распространения волны в линейном приближении, при пренебрежении дисперсией. В этом приближении в одномерной волне, распространяющейся в одну сторону вдоль оси x, все величины зависят от x и t только в комбинации $\xi = x - u_0 t$. В дифференциальном виде это свойство выражается уравнением

$$\frac{\partial b}{\partial t} + u_0\frac{\partial b}{\partial x} = 0,$$

где b обозначает какую-либо из колеблющихся в волне величин.

Постоянной скорости u_0 отвечает закон дисперсии волн $\omega = u_0 k$. В диспергирующей среде этот закон представляет собой лишь первый член разложения функции $\omega(k)$ по степеням мало-

го k. С учетом следующего члена имеем [1])

$$\omega = u_0 k - \beta k^3, \tag{39.1}$$

где β — постоянная, которая может в принципе быть как положительной, так и отрицательной.

Дифференциальное уравнение, описывающее в линейном приближении распространение (в одну сторону) волны в среде с такой дисперсией, имеет вид

$$\frac{\partial b}{\partial t} + u_0 \frac{\partial b}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 b}{\partial x^3} = 0;$$

действительно, для волны, в которой $b \propto \exp(-i\omega t + ikx)$, отсюда получается (39.1).

Наконец, учет нелинейности приводит к появлению в уравнении членов более высокого порядка по b. Эти члены во всяком случае должны удовлетворять условию обращения в нуль при постоянном (не зависящем от x) b, что отвечает просто однородной среде. Ограничившись членом с производной наиболее низкого порядка (малые k!), напишем уравнение распространения слабо нелинейной волны в виде

$$\frac{\partial b}{\partial t} + u_0 \frac{\partial b}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 b}{\partial x^3} + \alpha b \frac{\partial b}{\partial x} = 0, \tag{39.2}$$

где α — постоянный параметр (который тоже может в принципе иметь оба знака) [2]).

Для упрощения записи этого уравнения введем вместо x новую переменную ξ и вместо b — новую неизвестную функцию a, определив их согласно

$$\xi = x - u_0 t, \qquad a = \alpha b. \tag{39.3}$$

---

[1]) Тот факт, что функция $\omega(k)$ разлагается по нечетным степеням k, следует уже из соображений вещественности. Исходная система физических уравнений движения среды содержит лишь вещественные величины и параметры. Мнимая единица i появляется лишь в результате подстановки в эти уравнения решения, пропорционального $\exp(-i\omega t + ikx)$. Поэтому возникающий в результате этой подстановки закон дисперсии определяет $i\omega$ в виде функции от ik с вещественными коэффициентами; разложение такой функции может содержать лишь нечетные степени от ik. В общем случае диссипирующей среды функция $\omega(k)$ комплексна ($\omega = \omega' + i\omega''$), и тогда сделанное утверждение относится к разложению вещественной части частоты, $\omega'(k)$. Разложение же функции $\omega''(k)$ по тем же причинам будет содержать лишь четные степени k.

[2]) Подчеркнем, однако, во избежание недоразумений, что такой вид слабой нелинейности отнюдь не является универсальным. Так, слабая нелинейность для распространения волн в плазме, возникающая от последнего члена в электронном распределении (36.11) (использованном в задаче к § 38), соответствовала бы члену $\sim \sqrt{b}\,\partial b/\partial x$ в уравнении типа (39.2).

Тогда получим

$$\frac{\partial a}{\partial t} + a\frac{\partial a}{\partial \xi} + \beta\frac{\partial^3 a}{\partial \xi^3} = 0. \tag{39.4}$$

В таком виде это уравнение называют уравнением *Кортевега–де Вриза* (КдВ) [1]. Будем считать сначала для определенности, что постоянная $\beta > 0$.

Нас будут интересовать решения, описывающие волны со стационарным профилем. В таких решениях функция $a(t, \xi)$ зависит только от разности $\xi - v_0 t$ с некоторым постоянным v_0:

$$a = a(\xi - v_0 t); \tag{39.5}$$

при этом скорость распространения волны есть

$$u = u_0 + v_0. \tag{39.6}$$

Подставив (39.5) в (39.4) и обозначив дифференцирование по ξ штрихом, получим уравнение

$$\beta a''' + aa' - v_0 a' = 0. \tag{39.7}$$

Отметим, что оно инвариантно относительно замены

$$a \to a + V, \quad v_0 \to v_0 + V \tag{39.8}$$

с произвольной постоянной V.

Первый интеграл уравнения (39.7):

$$\beta a'' + \frac{1}{2}a^2 - v_0 a = \frac{c_1}{2}.$$

Умножив это равенство на $2a'$ и интегрируя еще раз, получим

$$\beta a'^2 = -\frac{a^3}{3} + v_0 a^2 + c_1 a + c_2. \tag{39.9}$$

Вместо трех постоянных v_0, c_1, c_2 целесообразно ввести другие постоянные — три корня кубического трехчлена, стоящего в правой части (39.9). Обозначив эти корни через a_1, a_2, a_3, напишем

$$\beta a'^2 = -\frac{1}{3}(a - a_1)(a - a_2)(a - a_3). \tag{39.10}$$

Постоянная v_0 связана с новыми постоянными равенством

$$v_0 = \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3). \tag{39.11}$$

---

[1]) Оно было получено *Кортевегом* и *де Вризом* (*D.J. Korteweg*, *G. de Vries*, 1895) для волн на поверхности мелкой воды.

Нас будут интересовать лишь такие решения уравнения (39.10), в которых величина $|a(\xi)|$ ограничена; неограниченный рост $|a|$ противоречил бы предположению о слабой нелинейности. Легко видеть, что это условие не выполняется, если среди корней a_1, a_2, a_3 имеются комплексные; пусть это будут a_1 и a_2 (причем $a_2 = a_1^*$). Действительно, в таком случае правая часть (39.10) принимает вид $|a - a_1|^2(a_3 - a)/3$ и ничто не мешает a стремиться к $-\infty$.

Таким образом, постоянные a_1, a_2, a_3 должны быть вещественными; расположим их в порядке $a_1 > a_2 > a_3$. Поскольку выражение в правой части уравнения (39.10) должно быть положительным, то функция $a(\xi)$ может меняться лишь в интервале $a_1 \geqslant a \geqslant a_2$. Без ограничения общности можно положить $a_3 = 0$; этого всегда можно достичь преобразованием вида (39.8). Условившись о таком выборе, перепишем уравнение (39.10) в виде

$$\beta a'^2 = \frac{1}{3}(a_1 - a)(a - a_2)a. \tag{39.12}$$

Решение этого уравнения имеет различный характер при $a_2 = 0$ и при $a_2 \neq 0$. В первом случае ($a_2 = 0$, $a_1 > 0$) интегрирование уравнения дает

$$a(\xi) = a_1 \operatorname{ch}^{-2}\left(\frac{\xi}{2}\sqrt{\frac{a_1}{3\beta}}\right); \tag{39.13}$$

начало отсчета ξ выбрано в точке максимума функции (здесь и ниже мы пишем, для упрощения обозначений, профиль волны как функцию от $\xi = x$ в некоторый заданный момент времени $t = 0$). Это решение описывает уединенную волну (солитон): при $\xi \to \pm\infty$ функция $a(\xi)$ вместе со своими производными обращается в нуль. Постоянная a_1 дает амплитуду солитона, а его ширина убывает с ростом амплитуды как $a_1^{-1/2}$. Согласно (39.11) имеем $v_0 = a_1/3$, так что скорость солитона

$$u = u_0 + a_1/3. \tag{39.14}$$

Эта скорость $u > u_0$ и растет с увеличением амплитуды.

Снова напомним, что нелинейность процессов, описываемых уравнением КдВ, предполагается слабой. Условие этой малости имеет естественный смысл; так, если роль величины a играет изменение плотности среды, то это изменение должно быть малым по сравнению с невозмущенной плотностью. В то же время «степень нелинейности» этих процессов характеризуется еще и другим безразмерным параметром: $L(a_1/\beta)^{1/2}$, где L — характерная длина, а a_1 — амплитуда возмущения. Этот параметр определяет

относительную роль эффектов нелинейности и дисперсии и может быть как малым (преобладание эффекта дисперсии), так и большим (преобладание эффекта нелинейности). Для солитона, ширина которого $L \sim (\beta/a_1)^{1/2}$, этот параметр порядка 1.

Перейдем к случаю $a_2 \neq 0$; в этом случае решение уравнения (39.12) описывает периодическую в пространстве, бесконечно протяженную волну. Интегрирование уравнения дает

$$\xi = \int\limits_a^{a_1} \frac{\sqrt{3\beta}\, da}{[a(a_1 - a)(a - a_2)]^{1/2}} = \left(\frac{12\beta}{a_1}\right)^{1/2} F(s, \varphi), \tag{39.15}$$

где $F(s, \varphi)$ — эллиптический интеграл первого рода:

$$F(s, \varphi) = \int\limits_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1 - s^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}}, \tag{39.16}$$

причем [1])

$$\sin \varphi = \sqrt{\frac{a_1 - a}{a_1 - a_2}}, \quad s = \sqrt{1 - \frac{a_2}{a_1}}; \tag{39.17}$$

начало отсчета ξ выбрано в одном из максимумов функции $a(\xi)$.

Обращая формулу (39.15) путем введения эллиптической функции Якоби, получим

$$a = a_1 \,\mathrm{dn}^2 \left(\sqrt{\frac{a_1}{12\beta}}\, \xi, s\right). \tag{39.18}$$

Эта функция периодична, причем ее период (длина волны) по координате x равен

$$\lambda = 4\sqrt{\frac{3\beta}{a_1}}\, F\left(\frac{\pi}{2}, s\right) = 4\sqrt{\frac{3\beta}{a_1}} K(s), \tag{39.19}$$

где $K(s)$ — полный эллиптический интеграл первого рода. Среднее по периоду значение функции (39.18):

$$\overline{a} = \frac{1}{\lambda} \int\limits_0^{\lambda} a(\xi)\, d\xi = a_1 \frac{E(s)}{K(s)}, \tag{39.20}$$

где $E(s)$ — полный эллиптический интеграл второго рода. Естественно рассматривать периодическую волну, в которой сред-

[1]) Параметр эллиптического интеграла обозначен буквой s (вместо обычно принятой k) во избежание путаницы с волновым вектором.

нее значение колеблющейся величины равно нулю. Этого всегда можно добиться преобразованием (39.8), вычитая величину (39.20) из функции (39.18). Скорость распространения волны равна тогда

$$u = u_0 + \left[\frac{a_1 + a_2}{3} - a_1 \frac{E(s)}{K(s)}\right]. \tag{39.21}$$

Малым амплитудам колебаний $a_1 - a_2$ соответствуют значения параметра $s \ll 1$. Воспользовавшись приближенным выражением

$$\operatorname{dn}(z, s) \approx 1 - \frac{s^2}{4} + \frac{s^2}{4}\cos 2z, \qquad s \ll 1,$$

найдем, что решение (39.18) переходит в этом случае, как и следовало, в гармоническую волну

$$a = \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_1 - a_2}{2}\cos kx, \qquad k = \sqrt{\frac{a_1}{3\beta}}.$$

При этом скорость (39.21) становится равной $u = u_0 - a_1/3 = u_0 - \beta k^2$ в соответствии с (39.1).

Обратному предельному случаю больших амплитуд (в рассматриваемой модели волн) отвечают значения $a_2 \to 0$, причем параметр $s \to 1$. Имея в виду предельную формулу

$$K(s) \approx \frac{1}{2}\ln\frac{16}{1 - s^2}, \qquad s^2 \to 1,$$

найдем, что в этом пределе длина волны возрастает по логарифмическому закону

$$\lambda = \sqrt{\frac{12\beta}{a_1}}\,\ln\frac{16a_1}{a_2}. \tag{39.22}$$

Другими словами, последовательные пучности волны раздвигаются на большие расстояния друг от друга. Профиль волны вблизи каждой из них получается из (39.18) с помощью предельного выражения функции $\operatorname{dn} z$ при $s = 1$, справедливой при конечных значениях z: $\operatorname{dn} z = 1/\operatorname{ch} z$. В результате мы возвращаемся к формуле (39.13). Таким образом, в пределе $s \to 1$ периодическая волна разбивается на совокупность следующих друг за другом удаленных солитонов.

До сих пор мы предполагали, что $\beta > 0$. Случай, когда постоянная $\beta < 0$ не требует особого рассмотрения: изменение знака β в уравнении (39.4) эквивалентно замене $\xi \to -\xi$, $a \to -a$. Поскольку при такой замене аргумент $\xi - v_0 t$ в (39.5) превращается в $-\xi - v_0 t$, то скорость распространения волны будет теперь $u = u_0 - v_0$. Так, для солитона полученные выше результаты изменятся лишь в том отношении, что функция $a(\xi)$ станет отрицательной, а его скорость $u < u_0$.

Уравнение КдВ обладает некоторыми специфическими свойствами, позволяющими установить для него ряд общих теорем. Они основаны на формальной связи, существующей между уравнением КдВ и задачей о собственных значениях уравнения типа уравнения Шредингера (*C.S. Gardner*, *J.M. Greene*, *M.D. Kruskal*, *R.M. Miura*, 1967).

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}+\left[\frac{1}{6\beta}a(t,\xi)+\varepsilon\right]\psi=0 \tag{39.23}$$

и будем снова для определенности считать, что $\beta>0$. Уравнение (39.23) имеет вид уравнения Шредингера, в котором функция $-a(t,\xi)$ играет роль потенциальной энергии, зависящей от t как от параметра. Пусть функция $a(t,\xi)$ в некоторой области ξ положительна и стремится к нулю при $\xi\to\pm\infty$. Тогда уравнение (39.23) будет обладать собственными значениями ε, отвечающими «финитному движению в потенциальной яме $-a(t,\xi)$»; в силу зависимости функции a от t, эти собственные значения, вообще говоря, тоже зависят от t.

Покажем, что собственные значения ε не будут зависеть от t, если функция $a(t,\xi)$ удовлетворяет уравнению КдВ (39.4).

Выразив из (39.23) a в виде

$$a=-6\beta\left(\frac{\psi''}{\psi}+\varepsilon\right)$$

и подставив в (39.4), после прямого вычисления получим

$$\psi^2\frac{d\varepsilon}{dt}=(\psi'A-\psi A')', \tag{39.24}$$

где

$$A(t,\xi)=6\beta\left(\frac{1}{\beta}\frac{\partial\psi}{\partial t}-\frac{3}{\psi}\psi'\psi''+\psi'''-\frac{\varepsilon}{6}\psi'\right); \tag{39.25}$$

существенно, что правая часть (39.24) оказывается выраженной в виде производной по ξ от выражения, обращающегося в нуль при $\xi\to\pm\infty$ (напомним, что собственные функции дискретного спектра уравнения (39.23) исчезают на бесконечности). Поэтому интегрирование равенства (39.24) по всем ξ от $-\infty$ до ∞ дает

$$\frac{d\varepsilon}{dt}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi^2\,d\xi=0$$

и, ввиду конечности стоящего здесь нормировочного интеграла функции ψ, отсюда следует, что $d\varepsilon/dt=0$.

Покажем теперь, что уравнение (39.23) имеет всего одно дискретное собственное значение в случае стационарного «потенциала» $a(\xi)$ вида (39.13), отвечающего одиночному солитону. С этим «потенциалом» уравнение (39.23) имеет вид

$$\psi'' + \left(\frac{U_0}{\operatorname{ch}^2 \alpha\xi} + \varepsilon\right)\psi = 0, \tag{39.26}$$

причем

$$U_0 = \frac{a_1}{6\beta}, \quad \alpha = \left(\frac{a_1}{12\beta}\right)^{1/2}. \tag{39.27}$$

Дискретные собственные значения уравнения (39.26) даются формулой

$$\varepsilon_n = -\alpha^2(s-n)^2, \quad s = \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4U_0}{\alpha^2}}\right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

причем должно быть $n < s$ (см. III, § 23, задача 4). Со значениями параметров из (39.27) $s = 1$, так что имеется всего одно собственное значение

$$\varepsilon = -\frac{a_1}{12\beta}. \tag{39.28}$$

Если же «потенциал» $a(t,\xi)$ представляет собой совокупность солитонов, находящихся на больших расстояниях друг от друга (так что «взаимодействие» между ними отсутствует), то спектр собственных значений уравнения (39.23) будет складываться из «уровней» (39.28) в каждой из потенциальных ям, причем каждый из них определяется амплитудой a_1 соответствующего солитона.

Поскольку скорость распространения солитона растет с увеличением его амплитуды, то солитон большей амплитуды в конце концов всегда догонит солитон меньшей амплитуды. Произвольная начальная совокупность удаленных друг от друга солитонов после процессов взаимных «столкновений» в конце концов превратится в совокупность солитонов, расположенных в порядке возрастания их амплитуд (напомним, что все возмущения, описываемые уравнением КдВ, распространяются в одну сторону!). Полученные выше результаты позволяют сразу же сделать интересное заключение: начальная и конечная совокупности солитонов одинаковы по общему числу и по амплитудам солитонов, отличаясь лишь порядком их расположения. Это следует непосредственно из того, что каждый из изолированных солитонов соответствует одному из собственных значений ε, а эти значения от времени не зависят.

Вообще, всякое положительное ($a > 0$) начальное возмущение, занимающее конечную область пространства, в ходе своей

эволюции, согласно уравнению КдВ, в конце концов распадается в совокупность изолированных солитонов, амплитуды которых уже не зависят от времени. Эти амплитуды и число солитонов можно в принципе найти путем определения спектра дискретных собственных значений уравнения (39.23) с начальным распределением $a(0,\xi)$ в качестве «потенциала». Если же начальное возмущение содержит в себе также и участки с $a<0$, то в ходе его эволюции возникает еще и волновой пакет, постепенно расплывающийся, не распадаясь на солитоны.

Во избежание недоразумений надо, однако, уточнить, что именно подразумевается под начальным возмущением в уравнении КдВ. Реальное возмущение, возникающее в среде в некоторый момент времени, в ходе своей эволюции (описываемой полным волновым уравнением второго порядка по времени) распадается, вообще говоря, на два возмущения, распространяющиеся в обе стороны оси x. Под «начальным» возмущением для уравнения КдВ надо понимать одно из этих двух возмущений сразу после распада.

Задача

Определить коэффициенты α и β в уравнении (39.2) для ионно-звуковых волн в плазме с $T_i \ll T_e$.

Решение. Коэффициент дисперсии β получается из (33.4) разложением по малой величине ka_e:

$$\beta = a_e^2 u_0,$$

где $u_0 = (zT_e/M)^{1/2}$.

При определении же коэффициента нелинейности α можно пренебречь дисперсией вовсе, т. е. рассматривать предельный случай $k\to 0$. В этом пределе плазму можно во всяком случае считать квазинейтральной и соответственно описывать ее гидродинамическими уравнениями изотермического идеального газа (38.3), (38.7). Положив $N_i = N_0 + \delta N$, пишем эти уравнения с точностью до членов второго порядка по малым величинам δN и v. При этом в членах второго порядка можно положить $v = u_0\delta N/N_0$, как это имеет место в линейном приближении для волны, распространяющейся в положительном направлении оси x (u_0 — скорость волн в линейном приближении). Тогда уравнения примут вид

$$\frac{\partial\,\delta N}{\partial t} + N_0\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}(v\,\delta N) = -\frac{2u_0}{N_0}\,\delta N\frac{\partial\,\delta N}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u_0^2}{N_0}\frac{\partial\,\delta N}{\partial x} = \frac{u_0^2}{N_0^2}\,\delta N\frac{\partial\,\delta N}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Дифференцируя первое уравнение по t, второе по x и исключив $\partial^2 v/\partial t\,\partial x$, находим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - u_0\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_0\frac{\partial}{\partial x}\right)\delta N = -\frac{2u_0}{N_0}\frac{\partial}{\partial t}\left(\delta N\frac{\partial\,\delta N}{\partial x}\right).$$

С той же точностью заменяем производную $\partial/\partial t$ в правой части уравнения и в разности $\partial/\partial t - u_0\partial/\partial x$ в его левой части на $-u_0\partial/\partial x$. Наконец, вычеркнув в обеих частях дифференцирования $\partial/\partial x$ и сравнив получившееся уравнение с (39.2), найдем

$$\alpha = u_0/N_0.$$

§ 40. Диэлектрическая проницаемость вырожденной бесстолкновительной плазмы

При вычислении в § 29, 31 диэлектрической проницаемости бесстолкновительной плазмы полностью пренебрегалось всеми квантовыми эффектами. Полученные таким образом результаты ограничены, прежде всего, по температуре условием отсутствия вырождения; для электронов это условие гласит:

$$T \gg \varepsilon_F \sim \frac{\hbar^2 N_e^{2/3}}{m}, \tag{40.1}$$

где $\varepsilon_F = \dfrac{p_F^2}{2m}$, p_F — граничный импульс распределения Ферми при $T = 0$, связанный с плотностью числа электронов равенством $\dfrac{p_F^3}{3\pi^2\hbar^3} = N_e$.

Кроме того, сама возможность применения к плазме во внешнем поле классического уравнения Больцмана связана с определенными условиями, наложенными на волновой вектор $\mathbf{k}$ и частоту ω поля. Характерные расстояния изменения поля ($\sim 1/k$) должны быть велики по сравнению с де-бройлевской длиной волны электронов ($\hbar/\overline{p}$), а связанная с этой неоднородностью неопределенность импульса ($\sim \hbar k$) должна быть мала по сравнению с шириной ($\sim T/\overline{v}$) области размытия теплового распределения электронов. Для невырожденной плазмы $\overline{p} \sim T/\overline{v} \sim (mT)^{1/2}$, так что оба эти условия совпадают. Для вырожденной плазмы $\overline{p} \sim p_F$, $v \sim v_F = p_F/m$, но поскольку $T \lesssim \varepsilon_F$, то $T/\overline{v} \lesssim \overline{p}$. Таким образом, достаточно потребовать в обоих случаях

$$\hbar k \overline{v} \ll T. \tag{40.2}$$

Наконец, частота должна удовлетворять условию

$$\hbar\omega \ll \varepsilon_F \tag{40.3}$$

— квант энергии поля должен быть мал по сравнению со средней энергией электрона (это условие, впрочем, обычно не играет роли).

Теперь мы рассмотрим диэлектрические свойства плазмы, отказавшись от выполнения условий (40.1)–(40.3) для ее электронной компоненты; ионная же компонента может оставаться невырожденной. Мы будем вычислять электронную часть диэлектрической проницаемости. При этом будет по-прежнему предполагаться выполненным условие, обеспечивающее возможность пренебрежения взаимодействием частиц плазмы:

$$e^2 N_e^{1/3} \ll \overline{\varepsilon}; \tag{40.4}$$

при $\bar{\varepsilon} \sim \varepsilon_F$ это условие принимает вид $N_e^{1/3} \gg \frac{me^2}{\hbar^2}$, или $\frac{e^2}{\hbar v_F} \ll 1$ (ср. V, § 80, IX, § 85).

Отказ от условия (40.2) требует применения с самого начала квантовомеханического уравнения для матрицы плотности. Поскольку взаимодействием между электронами пренебрегается, можно писать замкнутое уравнение сразу для одночастичной матрицы плотности $\rho_{\sigma_1\sigma_2}(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ (σ_1, σ_2 – спиновые индексы). Будем считать распределение электронов независящим от спина; другими словами, зависимость матрицы плотности от спиновых индексов отделяется в виде множителя $\delta_{\sigma_1\sigma_2}$, который мы будем опускать. Независящая от спина матрица плотности $\rho(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ удовлетворяет уравнению

$$i\hbar\frac{\partial\rho}{\partial t} = (\widehat{H}_1 - \widehat{H}_2^*)\rho, \tag{40.5}$$

где $\widehat{H}$ — гамильтониан электрона во внешнем поле, а индексы 1 или 2 указывают переменные ($\mathbf{r}_1$ или $\mathbf{r}_2$), на которые действует оператор (см. III, § 14). Это уравнение заменяет собой классическую теорему Лиувилля ($df/dt = 0$) для классической одночастичной функции распределения.

Будем (как и в § 29) вычислять продольную диэлектрическую проницаемость. Соответственно этому рассматриваем электрическое поле со скалярным потенциалом $\varphi(t, \mathbf{r})$, так что гамильтониан электрона

$$\widehat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - e\varphi(t, \mathbf{r}). \tag{40.6}$$

Считая поле слабым, полагаем

$$\rho = \rho_0(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + \delta\rho(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), \tag{40.7}$$

где ρ_0 — матрица плотности невозмущенного стационарного и однородного (но не обязательно равновесного) состояния газа; в силу его однородности, ρ_0 зависит только от разности $\mathbf{R} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Матрица плотности $\rho_0(\mathbf{R})$ связана с (невозмущенной) функцией распределения электронов по импульсам $n_0(\mathbf{p})$ формулой

$$n_0(\mathbf{p}) = \mathcal{N}_e \int \rho_0(\mathbf{R}) e^{-i\mathbf{p}\mathbf{R}/\hbar}\, d^3x, \tag{40.8}$$

где $\mathcal{N}_e$ — полное число электронов (см. IX, (7,20)). Здесь $n(\mathbf{p})$ определяется как числа заполнения квантовых состояний электронов с определенными значениями импульса и проекции спина. Число состояний, приходящихся на элемент импульсного пространства d^3p и с двумя значениями проекции спина, есть $\frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3}$.

Поэтому $n(\mathbf{p})$ связано с использовавшейся ранее функцией распределения $f(\mathbf{p})$ соотношением

$$f(\mathbf{p}) = \frac{2n(\mathbf{p})}{(2\pi\hbar)^3}. \tag{40.9}$$

Подставив (40.7) в (40.8) и отбросив члены второго порядка малости, получим линейное уравнение для малой добавки к матрице плотности:

$$\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_1 - \Delta_2)\right]\delta\rho(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \\ = -e[\varphi(t, \mathbf{r}_1) - \varphi(t, \mathbf{r}_2)]\rho_0(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \tag{40.10}$$

Пусть [1])

$$\varphi(t, \mathbf{r}) = \varphi_{\omega\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{kr} - \omega t)}. \tag{40.11}$$

Тогда зависимость решения уравнения (40.10) от суммы $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2$ (и от времени) можно отделить, положив

$$\delta\rho = \exp\left[i\mathbf{k}\frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2} - i\omega t\right] g_{\omega\mathbf{k}}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \tag{40.12}$$

Подставив это выражение в (40.10), получим уравнение для $g_{\omega\mathbf{k}}(\mathbf{R})$:

$$\left[\hbar\omega + \frac{\hbar^2}{2m}\left(\nabla + i\frac{\mathbf{k}}{2}\right)^2 - \frac{\hbar^2}{2m}\left(\nabla - i\frac{\mathbf{k}}{2}\right)^2\right] g_{\omega\mathbf{k}}(\mathbf{R}) = \\ = -e\varphi_{\omega\mathbf{k}}(e^{i\mathbf{kR}/2} - e^{-i\mathbf{kR}/2})\rho_0(\mathbf{R}).$$

Теперь можно перейти в этом уравнении к фурье-разложению по $\mathbf{R}$. Умножив обе его части на $\exp(-i\mathbf{pR}/\hbar)$ и проинтегрировав по d^3x, получим (с учетом (40.8))

$$\left[\hbar\omega - \varepsilon\left(\mathbf{p} + \frac{\hbar\mathbf{k}}{2}\right) + \varepsilon\left(\mathbf{p} - \frac{\hbar\mathbf{k}}{2}\right)\right] g_{\omega\mathbf{k}}(\mathbf{p}) = \\ = -\frac{e\varphi_{\omega\mathbf{k}}}{\mathcal{N}_e}\left[n_0\left(\mathbf{p} - \frac{\hbar\mathbf{k}}{2}\right) - n_0\left(\mathbf{p} + \frac{\hbar\mathbf{k}}{2}\right)\right]$$

(где $\varepsilon(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^2/(2m)$), или

$$g_{\omega\mathbf{k}}(\mathbf{p}) = \frac{e\varphi_{\omega\mathbf{k}}}{\hbar\mathcal{N}_e}\frac{n_0(\mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}/2) - n_0(\mathbf{p} - \hbar\mathbf{k}/2)}{\omega - \mathbf{kv}}. \tag{40.13}$$

Значение матрицы плотности при $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 \equiv \mathbf{r}$ определя-

[1]) Гамильтониан (40.6) должен быть эрмитовым, а потому функция φ в нем (и, следовательно, в уравнении (40.10)) — вещественной. Но после того как уравнение (40.10) написано, ввиду его линейности можно его решать для каждой из комплексных монохроматических компонент поля в отдельности.

ет плотность числа частиц в системе: $N = 2\mathcal{N}\rho(t, \mathbf{r}, \mathbf{r})$ (см. IX, (7.19)). Поэтому изменение плотности электронов под влиянием поля есть

$$\delta N_e = 2\mathcal{N}_e \delta\rho(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}) = 2\mathcal{N}_e e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)} g_{\omega\mathbf{k}}(\mathbf{R} = 0),$$

или, выразив $g_{\omega\mathbf{k}}(\mathbf{R} = 0)$ через фурье-компоненты,

$$\delta N_e = 2\mathcal{N}_e e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)} \int g_{\omega\mathbf{k}}(\mathbf{p}) \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}. \tag{40.14}$$

Соответствующее же изменение плотности зарядов есть $-e\delta N_e$.

Диэлектрическая проницаемость вычисляется теперь так, как это было сделано в § 29: исходя из связи плотности заряда с вектором диэлектрической поляризации ($-e\delta N_e = -\operatorname{div}\mathbf{P} = -i\mathbf{kP}$) пишем

$$e\delta N_e = i\frac{\varepsilon_l - 1}{4\pi}\mathbf{Ek} = k^2\frac{\varepsilon_l - 1}{4\pi}\varphi_{\omega\mathbf{k}}.$$

Таким образом, находим следующую формулу для электронной части продольной диэлектрической проницаемости плазмы с функцией распределения электронов $n(\mathbf{p})$ (индекс 0 у которой теперь опускаем):

$$\varepsilon_l(\omega, k) - 1 = -\frac{4\pi e^2}{\hbar k^2}\int \frac{n(\mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}/2) - n(\mathbf{p} - \hbar\mathbf{k}/2)}{\mathbf{kv} - \omega - i0}\frac{2\,d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \tag{40.15}$$

(*Ю.Л. Климонтович*, *В.П. Силин*, 1952); обход полюса в интеграле определяется, как обычно, правилом Ландау.

В квазиклассическом случае, при выполнении условий (40.2), (40.3), можно разложить функции $n(\mathbf{p} \pm \hbar\mathbf{k}/2)$ по степеням $\mathbf{k}$. Тогда

$$n\left(\mathbf{p} + \frac{\hbar\mathbf{k}}{2}\right) - n\left(\mathbf{p} - \frac{\hbar\mathbf{k}}{2}\right) \approx \hbar\mathbf{k}\frac{\partial n(\mathbf{p})}{\partial\mathbf{p}}$$

и формула (40.15) переходит (с учетом связи (40.9)) в прежнюю формулу (29.9). Подчеркнем, однако, что распределение $n(\mathbf{p})$ в этой формуле может относиться к вырожденной плазме.

Применим формулу (40.15) к полностью вырожденной электронной плазме при $T = 0$, когда $n(\mathbf{p}) = 1$ при $p < p_F$ и $n(\mathbf{p}) = 0$ при $p > p_F$. Заменив в двух членах в (40.15) переменную интегрирования $\mathbf{p} \pm \hbar\mathbf{k}/2 \to \mathbf{p}$, получим

$$\varepsilon_l - 1 = \frac{4\pi e^2}{\hbar k^2}\int\limits_{p<p_F}\left\{\frac{1}{\omega_+ - \mathbf{kv} + i0} - \frac{1}{\omega_- - \mathbf{kv} + i0}\right\}\frac{2\,d^3p}{(2\pi\hbar)^3},$$

где $\omega_\pm = \omega \pm \dfrac{\hbar k^2}{2m}$. Элементарное, хотя и довольно громоздкое

интегрирование приводит к результату

$$\varepsilon_l(\omega, k) - 1 = \frac{3\Omega_e^2}{2k^2 v_F^2}\{1 - g(\omega_+) + g(\omega_-)\}, \tag{40.16}$$

$$g(\omega) = \frac{m(\omega^2 - k^2 v_F^2)}{2\hbar k^3 v_F} \ln \frac{\omega + kv_F}{\omega - kv_F},$$

причем логарифм должен пониматься как $\ln|u| - i\pi$, если его аргумент $u < 0$; «плазменная частота» Ω_e определена по-прежнему как $\Omega_e = (4\pi N_e e^2/m)^{1/2}$.

В квазиклассическом пределе, при $\hbar k \ll p_F$, $\hbar\omega \ll \varepsilon_F$ [1]), формула (40.16) приводит к простому выражению, не содержащему $\hbar$:

$$\varepsilon_l - 1 = \frac{3\Omega_e^2}{k^2 v_F^2}\left[1 - \frac{\omega}{2kv_F}\ln\frac{\omega + kv_F}{\omega - kv_F}\right] + \begin{cases} 0 & \text{при} \quad |\omega| > kv_F, \\ i\dfrac{3\pi\Omega_e^2\omega}{2(kv_F)^3} & \text{при} \quad |\omega| < kv_F. \end{cases} \tag{40.17}$$

Особый интерес представляет статический случай. При $\omega = 0$ выражение (40.16) как функция k имеет особенность в точке, где $\hbar k$ совпадает с диаметром ферми-сферы:

$$\hbar k = 2p_F; \tag{40.18}$$

в этой точке аргумент одного из логарифмов обращается в нуль. Вблизи нее

$$\varepsilon_l(0, k) - 1 = \frac{e^2}{2\pi\hbar\varepsilon_F}\left[1 - \xi\ln\frac{1}{|\xi|}\right], \tag{40.19}$$

$$\xi = \frac{\hbar k - 2p_F}{2p_F}, \quad |\xi| \ll 1.$$

Покажем, что наличие этой особенности (ее называют *коновской*) приводит к изменению характера экранировки поля зарядов в плазме, которая становится не экспоненциальной [2]).

Запишем выражение (40.19) в виде

$$\varepsilon_l(0, k) = \beta - \alpha\xi\ln\frac{1}{|\xi|}, \tag{40.20}$$

где $\alpha = \dfrac{e^2}{2\pi\hbar v_F}$, а постоянная β может включать в себя также и не имеющий особенности вклад от невырожденной ионной компоненты плазмы.

---

[1]) При $T = 0$ достаточно этих условий. Дело в том, что предельное значение ε_l при $\hbar k v_F/\varepsilon_F \to 0$ и $T \to 0$ не зависит от порядка перехода к пределу. Поэтому соотношение между $\hbar k v_F$ и T несущественно.

[2]) Физические следствия особенности, возникающей при условии (40.18), были указаны *Коном* (*W. Kohn*, 1959).

Фурье-компонента поля, создаваемого покоящимся в плазме малым точечным зарядом e_1, выражается через диэлектрическую проницаемость формулой

$$\varphi_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi e_1}{k^2 \varepsilon_l(0, k)} \tag{40.21}$$

(см. задачу 1 § 31). Для потенциала же $\varphi(r)$ как функции расстояния от заряда e_1 имеем

$$\varphi(r) = \int \varphi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kr}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} = \frac{1}{2\pi^2 r} \operatorname{Im} \int_0^\infty \varphi_{\mathbf{k}} e^{ikr} k\, dk. \tag{40.22}$$

При $k \to 0$ функция $\varphi(k)$ стремится к постоянному пределу и не имеет особенности. Поэтому асимптотическое поведение интеграла в (40.22) при $r \to \infty$ определяется особенностью этой функции при $\hbar k = 2p_F$. Вблизи нее

$$\varphi_{\mathbf{k}} = \frac{e_1 \pi \hbar^2}{\beta p_F^2} \left[1 + \frac{\alpha}{\beta} \xi \ln \frac{1}{|\xi|} \right].$$

Вклад этой области в асимптотическое значение интеграла:

$$\varphi(r) \approx \frac{2e_1\alpha}{\pi\beta^2 r} \operatorname{Im} \left(e^{2ip_F r/\hbar} J\right), \qquad J = \int_{-\infty}^{\infty} \xi \ln \frac{1}{|\xi|} e^{2ip_F r\xi/\hbar}\, d\xi;$$

ввиду быстрой сходимости (см. ниже) интегрирование по ξ можно распространить от $-\infty$ до ∞.

Для вычисления интеграла J разделим его на две части — от $-\infty$ до 0 и от 0 до ∞ — и в каждой из них повернем путь интегрирования в плоскости комплексной переменной ξ до его совпадения с верхней мнимой полуосью. Положив затем $\xi = iy$, получим

$$J = \int_0^\infty e^{-2p_F r y/\hbar} \left[\ln \frac{1}{-iy} - \ln \frac{1}{iy} \right] y\, dy.$$

Разность в квадратных скобках сводится к $i\pi$, так что $J = i\pi \left(\dfrac{\hbar}{2p_F r} \right)^2$. Окончательно находим

$$\varphi(r) \approx \frac{e_1 \alpha \hbar^2}{2\beta^2 p_F^2} \frac{\cos(2p_F r/\hbar)}{r^3}. \tag{40.23}$$

Таким образом, потенциал экранированного поля вдали от заряда осциллирует с амплитудой, спадающей по степенному

закону. Этот результат, полученный для вырожденной плазмы при $T = 0$, остается в силе для малых, но конечных температур на расстояниях $r \ll \dfrac{\hbar v_F}{T}$.

Задача

Определить спектр электронных колебаний вырожденной плазмы при $T = 0$ в квазиклассической области значений k.

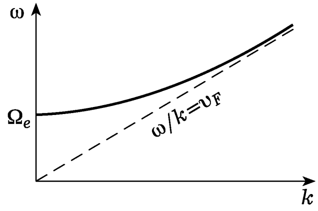


Рис. 12

Решение. Зависимость $\omega(k)$ дается уравнением $\varepsilon_l(\omega, k) = 0$ с ε_l из (40.17). При малых k ($kv_F \ll \Omega_e$) оказывается, что $kv_F/\omega \ll 1$; действительно, разложив $\varepsilon_l(\omega, k)$ по степеням этого отношения, получим

$$\omega = \Omega_e \left[1 + \frac{3}{10}\left(\frac{kv_F}{\Omega_e}\right)^2\right] \tag{1}$$

(*А.А. Власов*, 1938)[1] Эта часть спектра соответствует обычным плазменным колебаниям (ср. (32.5)).

При больших k ($kv_F \gg \Omega_e$, но по-прежнему $\hbar k \ll p_F$) оказывается, что $\omega \approx kv_F$. Решая уравнение $\varepsilon_l = 0$ последовательными приближениями, получим

$$\omega = kv_F \left[1 + 2\exp\left(-\frac{2k^2v_F^2}{3\Omega_e^2} - 2\right)\right] \tag{2}$$

(*И.И. Гольдман*, 1947). Эта часть спектра аналогична нулевому звуку в незаряженном ферми-газе (ср. IX, (4.16)).

Ход спектра показан схематически на рис. 12. Отметим, что везде $\omega/k > v_F$, а поскольку при $T = 0$ нет частиц со скоростями $v > v_F$, то затухание Ландау строго равно нулю.

[1]) Отметим, что условие квазиклассичности частоты Ω_e в вырожденной плазме ($\hbar\Omega_e \ll \varepsilon_F$) совпадает с условием идеальности плазмы (40.4).

ГЛАВА IV

СТОЛКНОВЕНИЯ В ПЛАЗМЕ

§ 41. Интеграл столкновений Ландау

Изучение свойств плазмы с учетом столкновений между частицами надо начать с вывода кинетического уравнения для функций распределения электронов и ионов.

Специфика этого случая связана с медленностью убывания сил кулоновского взаимодействия между заряженными частицами. При буквальном применении больцмановского интеграла столкновений это обстоятельство приводит к появлению расходимостей в интегралах на больших расстояниях между сталкивающимися частицами. Это значит, что существенную роль играют именно далекие столкновения. Но на больших расстояниях частицы отклоняются лишь с малым изменением их импульсов. Это обстоятельство позволяет придать интегралу столкновений вид, подобный тому, какой он имеет в уравнении Фоккера–Планка. В отличие от последнего, однако, интеграл столкновений теперь не линеен по искомым функциям распределения. Но относительная малость изменений импульса при столкновениях во всяком случае означает, что описываемый интегралом столкновений процесс можно рассматривать как диффузию в импульсном пространстве. Соответственно этому интеграл столкновений может быть представлен в виде

$$\mathrm{St}\, f = -\,\mathrm{div}_{\mathbf{p}}\, \mathbf{s} \equiv -\frac{\partial s_\alpha}{\partial p_\alpha},$$

где $\mathbf{s}$ — плотность потока частиц в импульсном пространстве; задача состоит в выражении этого потока через функции распределения.

Запишем в виде

$$w f(\mathbf{p}) f'(\mathbf{p}')\, d^3q\, d^3p'$$

число столкновений, испытываемых (в 1 с) частицей с импульсом $\mathbf{p}$, с частицами с импульсами $\mathbf{p}'$ в интервале d^3p', причем $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$ переходят соответственно в $\mathbf{p}+\mathbf{q}$ и $\mathbf{p}'-\mathbf{q}$; здесь учтено уже сохранение импульса при столкновениях. Аргументы t, $\mathbf{r}$ в функциях распределения для краткости не выписываем. Частицы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$ могут относиться к одному и тому же или к различным родам частиц в плазме (электроны, ионы). Функцию w будем счи-

тать выраженной через полусуммы импульсов каждой из частиц до и после столкновений и через передаваемый импульс $\mathbf{q}$:

$$w\left(\mathbf{p}+\frac{\mathbf{q}}{2},\ \mathbf{p}'-\frac{\mathbf{q}}{2};\ \mathbf{q}\right);$$

она зависит, конечно, и от родов сталкивающихся частиц. В силу принципа детального равновесия (2.8), функция w симметрична по отношению к перестановке начальных и конечных частиц:

$$w\left(\mathbf{p}+\frac{\mathbf{q}}{2},\mathbf{p}'-\frac{\mathbf{q}}{2};\mathbf{q}\right)=w\left(\mathbf{p}+\frac{\mathbf{q}}{2},\mathbf{p}'-\frac{\mathbf{q}}{2};-\mathbf{q}\right). \tag{41.1}$$

Функция w содержит δ-функционный множитель, выражающий сохранение энергии при столкновениях (сохранение импульса уже учтено).

Рассмотрим единичную площадку, расположенную в некоторой точке $\mathbf{p}$ импульсного пространства (частиц данного рода), перпендикулярную оси p_α. По определению, компонента s_α плотности потока есть избыток числа частиц (данного сорта), пересекающих в единицу времени эту площадку слева направо, над числом частиц, пересекающих ее справа налево. Перемещение в импульсном пространстве есть результат столкновений. Если при столкновении частице передается α-компонента импульса q_α ($q_\alpha>0$), то в результате таких столкновений через площадку пройдут слева направо те частицы, у которых до столкновения эта компонента лежала в пределах от $p_\alpha-q_\alpha$ до p_α. Поэтому полное число частиц, пересекающих площадку слева направо, есть

$$\sum\int\limits_{q_\alpha>0}d^3q\int d^3p'\int\limits_{p_\alpha-q_\alpha}^{p_\alpha}w\left(\mathbf{p}+\frac{\mathbf{q}}{2},\mathbf{p}'-\frac{\mathbf{q}}{2};\mathbf{q}\right)f(\mathbf{p})f'(\mathbf{p}')\,dp_\alpha.$$

Суммирование производится по всем сортам частиц, к которым относятся штрихованные величины (в том числе, конечно, и по заданному сорту, к которому относятся величины без штрихов). Аналогичным образом, число частиц, пересекающих ту же площадку справа налево, можно представить в виде

$$\sum\int\limits_{q_\alpha>0}d^3q\int d^3p'\int\limits_{p_\alpha-q_\alpha}^{p_\alpha}w\left(\mathbf{p}+\frac{\mathbf{q}}{2},\mathbf{p}'-\frac{\mathbf{q}}{2};-\mathbf{q}\right)f(\mathbf{p}+\mathbf{q})f'(\mathbf{p}'-\mathbf{q})\,dp_\alpha.$$

В силу (41.1), функции w в обоих интегралах одинаковы. Поэтому разность этих интегралов содержит в подынтегральном выражении разность

$$f(\mathbf{p})f'(\mathbf{p}')-f(\mathbf{p}+\mathbf{q})f'(\mathbf{p}'-\mathbf{q}').$$

Воспользуемся теперь малостью передачи импульса $\mathbf{q}$ (точнее, малостью существенных в интегралах значений $\mathbf{q}$ по сравнению с $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$). Разлагая написанную разность по степеням $\mathbf{q}$, получим, с точностью до членов первого порядка,

$$\left[-\frac{\partial f(\mathbf{p})}{\partial p_\beta}f'(\mathbf{p}') + f(\mathbf{p})\frac{\partial f'(\mathbf{p}')}{\partial p'_\beta}\right] q_\beta.$$

После этого можно уже, с той же точностью, заменить в подынтегральных выражениях

$$w\left(\mathbf{p}+\frac{\mathbf{q}}{2}, \mathbf{p}'-\frac{\mathbf{q}}{2}; \mathbf{q}\right) \approx w(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; \mathbf{q}).$$

Интегрирование же по dp_α, которое производится по малому интервалу между $p_\alpha - q_\alpha$ и p_α, можно заменить просто умножением на величину этого интервала q_α. В результате получим

$$s_\alpha = \sum \int\limits_{q_\alpha>0} d^3q \int w(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; \mathbf{q}) \left[f(\mathbf{p})\frac{\partial f'(\mathbf{p}')}{\partial p'_\beta} - f'(\mathbf{p}')\frac{\partial f(\mathbf{p})}{\partial p_\beta}\right] q_\alpha q_\beta \, d^3p'. \tag{41.2}$$

В силу (41.1), $w(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; \mathbf{q})$ — четная функция $\mathbf{q}$, поэтому четно и все подынтегральное выражение в (41.2). Это позволяет заменить интеграл по полупространству $q_\alpha > 0$ половиной интеграла по всему $\mathbf{q}$-пространству.

Переписывая выражение (41.2), введем также в него вместо функции w сечение столкновений согласно

$$w\, d^3q = |\mathbf{v} - \mathbf{v}'|\, d\sigma.$$

Как уже было объяснено в связи с записью интеграла столкновений в виде (3.9), после этого можно считать, что число независимых интегрирований уже уменьшено учетом закона сохранения энергии. Таким образом, плотность потока импульса в импульсном пространстве для частиц каждого рода принимает вид

$$s_\alpha = \sum \int \left[f(\mathbf{p})\frac{\partial f'(\mathbf{p}')}{\partial p'_\beta} - f'(\mathbf{p}')\frac{\partial f(\mathbf{p})}{\partial p_\beta}\right] B_{\alpha\beta}\, d^3p', \tag{41.3}$$

где

$$B_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\int q_\alpha q_\beta |\mathbf{v} - \mathbf{v}'|\, d\sigma. \tag{41.4}$$

Остается вычислить величины $B_{\alpha\beta}$ для столкновений частиц, взаимодействующих по закону Кулона.

При отклонении на малый угол изменение $\mathbf{q}$ импульса сталкивающихся частиц перпендикулярно их относительной скорости $\mathbf{v} - \mathbf{v}'$. Поэтому и тензор $B_{\alpha\beta}$ поперечен по отношению к вектору $\mathbf{v} - \mathbf{v}'$:

$$B_{\alpha\beta}(v_\beta - v'_\beta) = 0. \tag{41.5}$$

Сразу же отметим, что тем самым автоматически обеспечивается обращение потоков (41.3) в нуль для равновесного распределения всех частиц. С максвелловскими распределениями f и f' (с одинаковой температурой T) подынтегральное выражение в (41.3) становится равным

$$\frac{ff'}{T}(v'_\beta - v_\beta)B_{\alpha\beta} = 0.$$

Вектор $\mathbf{v} - \mathbf{v}'$ есть в то же время единственный вектор, от которого может зависеть тензор $B_{\alpha\beta}$. Поперечный по отношению к $\mathbf{v} - \mathbf{v}'$ такой тензор должен иметь вид

$$B_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}B\left[\delta_{\alpha\beta} - \frac{(v_\alpha - v'_\alpha)(v_\beta - v'_\beta)}{(\mathbf{v} - \mathbf{v}')^2}\right],$$

где скаляр

$$B = B_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2}\int q^2|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|\,d\sigma.$$

Пусть χ — угол отклонения относительной скорости (угол отклонения в системе центра инерции двух частиц). При малых значениях этого угла величина изменения импульса $q \approx \mu|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|\chi$, где μ — приведенная масса частиц. Поэтому

$$B = \frac{1}{2}\mu^2|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^3\int \chi^2\,d\sigma = \mu^2|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^3\sigma_t,$$

где

$$\sigma_t = \int(1 - \cos\chi)\,d\sigma \approx \frac{1}{2}\int \chi^2\,d\sigma$$

— транспортное сечение. Дифференциальное сечение рассеяния на малые углы в кулоновском поле дается формулой Резерфорда

$$d\sigma \approx \frac{4(ee')^2\,do}{\mu^2(\mathbf{v} - \mathbf{v}')^4\chi^4} \approx \frac{8\pi(ee')^2}{\mu^2(\mathbf{v} - \mathbf{v}')^4}\frac{d\chi}{\chi^3} \qquad (41.6)$$

(e, e' — заряды сталкивающихся частиц). Отсюда транспортное сечение

$$\sigma_t = \frac{4\pi(ee')^2}{\mu^2(\mathbf{v} - \mathbf{v}')^4}L, \qquad L = \int\frac{d\chi}{\chi}. \qquad (41.7)$$

Для величин же $B_{\alpha\beta}$ имеем, следовательно,

$$B_{\alpha\beta} = \frac{2\pi(ee')^2}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|}L\left[\delta_{\alpha\beta} - \frac{(v_\alpha - v'_\alpha(v_\beta) - v'_\beta)}{(\mathbf{v} - \mathbf{v}')^2}\right]. \qquad (41.8)$$

Интеграл L логарифмически расходится. Расходимость на нижнем пределе связана с физической причиной — медленностью убывания кулоновских сил, приводящей к большой вероятности рассеяния на малые углы. В действительности, однако,

в электрически нейтральной плазме кулоновское поле частицы на достаточно больших расстояниях экранируется другими зарядами; обозначим через $\chi_{\min}$ порядок величины минимальных углов, на которых рассеяние еще можно считать кулоновским. Расходимость же на верхнем пределе связана просто с тем, что все формулы были написаны в предположении малости углов и теряют свою применимость при $\chi \sim 1$. Имея в виду слабую чувствительность логарифма большого аргумента по отношению к небольшим изменениям последнего, можно выбрать пределы интегрирования по оценкам их порядков величины, т. е. написать

$$L = \ln(1/\chi_{\min}). \tag{41.9}$$

Эту величину называют *кулоновским логарифмом*. Сразу подчеркнем, что такой способ его определения ограничивает все рассмотрение, как говорят, *логарифмической точностью*: пренебрегается величинами, малыми по сравнению не только с большой величиной $1/\chi_{\min}$, но и с ее логарифмом.

Фактическая оценка $\chi_{\min}$ зависит от того, должно ли рассеяние частиц описываться классически или квантовомеханически (само же по себе выражение (41.8) справедливо в обоих случаях, поскольку чисто кулоновское рассеяние описывается формулой Резерфорда как в классической, так и в квантовой механике[1])).

Экранировка кулоновского поля частицы в плазме происходит на расстояниях порядка величины дебаевского радиуса a. В классическом случае $\chi_{\min}$ определяется как угол рассеяния при пролете на прицельном расстоянии $\sim a$. Соответствующее изменение импульса: $q \sim \dfrac{|ee'|}{a\overline{v}_{\text{отн}}}$ (произведение силы $\sim \dfrac{|ee'|}{a^2}$ на время пролета $\sim \dfrac{a}{\overline{v}_{\text{отн}}}$)[2]). Разделив его на импульс $\sim \mu\overline{v}_{\text{отн}}$, получим $\chi_{\min} \sim \dfrac{|ee'|}{a\mu\overline{v}^2_{\text{отн}}}$. Условие классичности рассеяния дается неравенством $\dfrac{|ee'|}{\hbar v_{\text{отн}}} \gg 1$ (см. III, § 127). Таким образом, имеем

$$L = \ln\frac{a\mu\overline{v}^2_{\text{отн}}}{|ee'|} \quad \text{при} \quad \frac{|ee'|}{\hbar v_{\text{отн}}} \gg 1. \tag{41.10}$$

---

[1]) В квантовом случае при рассеянии одинаковых частиц (электронов) должен учитываться обменный эффект. Этот эффект, однако, не меняет предельного вида сечения на малых углах (41.6).

[2]) Здесь и везде в аналогичных местах ниже $\overline{v}_{\text{отн}}$ — среднее значение относительной скорости двух частиц, $|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|$. Если частицы одного рода, то $\overline{v}_{\text{отн}}$ совпадает со средним значением $\overline{v}$. Если частицы различного рода, то $\overline{v}_{\text{отн}}$ совпадает с бóльшим из $\overline{v}$ и $\overline{v}'$.

В обратном предельном случае, когда $\frac{|ee'|}{\hbar \overline{v}_{\text{отн}}} \ll 1$, рассеяние должно рассматриваться квантовомеханически, в борновском приближении. Сечение рассеяния в этом случае выражается через фурье-компоненту рассеивающего потенциала с волновым вектором $\mathbf{q}/\hbar$. Вклад в эту компоненту, происходящий от экранирующего «облака» зарядов (с размерами $\sim a$), становится малым при $qa/\hbar \gtrsim 1$; именно это есть в данном случае условие чистой кулоновости рассеяния. Поэтому угол $\chi_{\min}$ находится из условия

$$\frac{q_{\min} a}{\hbar} \sim \frac{\mu \overline{v} \chi_{\min} a}{\hbar} \sim 1.$$

Таким образом, в этом случае

$$L = \ln \frac{\mu a \overline{v}_{\text{отн}}}{\hbar} \quad \text{при} \quad \frac{|ee'|}{\hbar \overline{v}_{\text{отн}}} \ll 1. \tag{41.11}$$

При $|ee'| \sim \hbar \overline{v}_{\text{отн}}$ оба выражения (41.10) и (41.11), естественно, совпадают.

Выпишем теперь окончательное выражение для плотностей потоков в импульсном пространстве, подставив (41.8) в (41.3):

$$s_\alpha = \sum 2\pi (ee')^2 L \int \left(f \frac{\partial f'}{\partial p'_\beta} - f' \frac{\partial f}{\partial p_\beta} \right) \times \\ \times \frac{(\mathbf{v} - \mathbf{v}')^2 \delta_{\alpha\beta} - (v_\alpha - v'_\alpha)(v_\beta - v'_\beta)}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^3} \, d^3 p'. \tag{41.12}$$

Соответствующие кинетические уравнения:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}] \right) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = -\operatorname{div}_{\mathbf{p}} \mathbf{s} \tag{41.13}$$

(e — заряд частиц, к которым относится функция f, т. е. для электронов надо писать $-e$, а для ионов ze). Интеграл столкновений в логарифмическом приближении для газа с кулоновским взаимодействием между частицами был установлен *Л.Д. Ландау* (1936).

Применимость интеграла столкновений Ландау связана с выполнением определенных условий. Характерные длины $1/k$, на которых существенно меняется функция распределения, должны быть велики по сравнению с радиусом экранирования a, а характерные интервалы времени $1/\omega$ — велики по сравнению с $a/\overline{v}_{\text{отн}}$; в логарифмическом приближении, однако, фактически достаточно потребовать выполнения этих условий в слабой форме

$$ka < 1, \quad \omega < \frac{\overline{v}_{\text{отн}}}{a} \tag{41.14}$$

со знаком $<$ вместо $\ll$. Дебаевский радиус a играет здесь ту же роль, которую для нейтральных газов играл радиус действия молекулярных сил.

Задача

В § 34 показано, что после того, как возмущения электронной плотности с волновым вектором $\mathbf{k}$ затухнут из-за затухания Ландау, возмущения функции распределения продолжают осциллировать по закону $e^{-i\mathbf{kv}t}$ (34.16). Найти закон затухания этих осцилляций из-за кулоновских столкновений при временах $t \gg 1/(k\overline{v})$.

Решение. Ищем функцию распределения в виде

$$f = f_0 + \delta f, \qquad \delta f = a(t, \mathbf{v})e^{-i\mathbf{kv}t + i\mathbf{kr}}, \tag{1}$$

где δf — возмущение равновесного распределения f_0; a — медленно меняющаяся функция скорости $\left(\text{испытывает заметное изменение лишь на интервалах} \sim \overline{v} \gg \dfrac{1}{kt}\right)$. При подстановке (1) в (41.12) в подынтегральном выражении надо сохранить лишь член

$$-f_0(\mathbf{p}')\frac{\partial \delta f(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \approx \frac{i}{m}\mathbf{k}t\delta f(\mathbf{p})f_0(\mathbf{p}');$$

остальные члены дают малый вклад либо ввиду погашения интеграла, благодаря наличию быстро осциллирующего множителя $\exp(-i\mathbf{kv}'t)$, либо ввиду отсутствия в них множителя $kt \gg 1/\overline{v}$. По последней причине надо и при вычислении $\operatorname{div}_{\mathbf{p}}\mathbf{s}$ дифференцировать только экспоненциальный множитель. В результате кинетическое уравнение дает

$$\frac{\partial a}{\partial t} = -k_\alpha k_\beta b_{\alpha\beta} t^2 a,$$

причем по порядку величины коэффициенты $b_{\alpha\beta} \sim \overline{v}^2\nu$ (ν — частота столкновений). Отсюда

$$a(t, \mathbf{v}) = a_0(\mathbf{v})\exp\left\{-\frac{1}{3}k_\alpha k_\beta b_{\alpha\beta} t^3\right\}, \tag{2}$$

поэтому время затухания колебаний

$$\tau_{\text{зат}} \sim \nu^{-1/3}(k\overline{v})^{-2/3}.$$

Поскольку вся теория затухания Ландау имеет смысл лишь при условии $k\overline{v} \gg \nu$, то $\tau_{\text{зат}} \ll 1/\nu$. Результат (2) справедлив лишь при условии малости показателя в (2) по сравнению с показателем kvt в (1); для этого должно быть $t \ll (\nu k\overline{v})^{-1/2}$. За это время осцилляции затухнут в $\exp\left(-\sqrt{k\overline{v}/\nu}\right)$ раз.

§ 42. Передача энергии между электронами и ионами

Большая разница между массами электронов m и ионов M затрудняет обмен энергией между ними: при столкновении тяжелой и легкой частиц энергия каждой из них почти не меняется. Поэтому установление равновесия между электронами самими по себе и ионами самими по себе происходит значительно быстрее, чем между электронами и ионами. В результате легко возникает ситуация, в которой электронная и ионная компоненты плазмы имеют каждая свое максвелловское распределение с различными температурами T_e и T_i (обычно T_e превосходит T_i).

Разность температур электронов и ионов приводит к передаче энергии между обеими компонентами плазмы; определим эту передачу (*Л.Д. Ландау*, 1936).

Будем временно обозначать величины, относящиеся к ионам и электронам, буквами соответственно без штриха и со штрихом. Изменение энергии ионов (в 1 с в 1 см^3 плазмы) дается интегралом

$$\frac{dE}{dt} = \int \varepsilon \, \mathrm{St}\, f \, d^3p = -\int \varepsilon \, \mathrm{div}_{\mathbf{p}} \mathbf{s} \, d^3p,$$

или, интегрируя по частям,

$$\frac{dE}{dt} = \int \mathbf{s} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} \, d^3p = \int \mathbf{s}\mathbf{v} \, d^3p \tag{42.1}$$

(интеграл по бесконечно удаленной поверхности в импульсном пространстве, как обычно, обращается в нуль).

В суммах (41.3), определяющих потоки электронов и ионов в импульсном пространстве, остаются лишь члены, соответствующие электрон-ионным столкновениям; электрон-электронные и ион-ионные члены для максвелловских распределений обращаются в нуль. Подставив в эти остающиеся члены максвелловские распределения с температурами T' и T, получим для потока ионов:

$$s_\alpha = \int f f' \left(\frac{v_\beta}{T} - \frac{v'_\beta}{T'} \right) B_{\alpha\beta} \, d^3p'.$$

Но в силу (41.5) имеем $B_{\alpha\beta} v'_\beta = B_{\alpha\beta} v_\beta$; сделав эту замену и подставив поток $\mathbf{s}$ в (42.1), найдем

$$\frac{dE}{dt} = \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T'} \right) \int f f' v_\alpha v_\beta B_{\alpha\beta} \, d^3p \, d^3p'. \tag{42.2}$$

Ввиду малости массы электронов, их скорости в среднем велики по сравнению со скоростями ионов. Поэтому в $B_{\alpha\beta}$ можно положить $v'_\alpha - v_\alpha \approx v'_\alpha$. После этого величины $B_{\alpha\beta}$ уже не будут зависеть от v_α и в (42.2) можно произвести интегрирование по d^3p:

$$\int f v_\alpha v_\beta \, d^3p = \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} N \overline{v^2} = \delta_{\alpha\beta} N \frac{T}{M}.$$

Таким образом,

$$\frac{dE}{dt} = \frac{NT}{M} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T'} \right) \int f' B \, d^3p'. \tag{42.3}$$

Наконец, подставив сюда согласно (41.8) $B = 4\pi e^4 z^2 L / v'$ (ze — заряд ионов) и заметив, что для максвелловского распределения

$$\int f' \frac{d^3p'}{v'} = N' \sqrt{\frac{2m}{\pi T'}},$$

получим

$$\frac{dE}{dt} = \frac{4NN'z^2e^4\sqrt{2\pi m}L}{MT'^{3/2}}(T' - T). \tag{42.2}$$

Это же выражение с обратным знаком дает убыль энергии электронной компоненты плазмы, $-dE'/dt$. Выразив энергию электронов в единице объема через их температуру согласно $E' = 3N'T'/2$ и вернувшись к обозначению электронных и ионных величин индексами e и i, напишем окончательно следующее выражение для скорости изменения электронной температуры:

$$\frac{dT_e}{dt} = -\frac{T_e - T_i}{\tau_{ei}^{\varepsilon}}, \qquad \tau_{ei}^{\varepsilon} = \frac{T_e^{3/2}M}{8N_iz^2e^4L_e(2\pi m)^{1/2}}. \tag{42.5}$$

Фигурирующий здесь кулоновский логарифм равен

$$L_e = \begin{cases} \ln\left(\dfrac{aT_e}{ze^2}\right) & \text{при } \dfrac{ze^2}{\hbar v_{Te}} \gg 1, \\ \ln\left(\dfrac{\sqrt{mT_e}a}{\hbar}\right) & \text{при } \dfrac{ze^2}{\hbar v_{Te}} \ll 1. \end{cases} \tag{42.6}$$

Величина τ_{ei}^{ε} представляет собой время релаксации для установления электрон-ионного равновесия.

§ 43. Длина пробега частиц в плазме

Мы видели из изложенного в § 41 вывода, что характеристикой столкновений в кинетическом уравнении служит транспортное сечение σ_t (41.7). Поэтому именно это сечение должно фигурировать и в определении длины свободного пробега.

Для электрон-электронных (ee) и электрон-ионных (ei) столкновений приведенная масса $\mu \sim m$, а поскольку скорости электронов много больше скоростей ионов, то

$$\mu(\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i)^2 \sim mv_{Te}^2 \sim T_e.$$

Для длины пробега электронов получается поэтому оценка

$$l_e \sim \frac{T_e^2}{4\pi e^4 NL_e} \tag{43.1}$$

с L_e из (42.6). Множители z в оценках не пишем; предполагается, что $z_i \sim 1$. Время свободного пробега электронов τ_e (или обратная ей величина — частота столкновений ν_e):

$$\tau_e \sim \frac{1}{\nu_e} \sim \frac{l_e}{v_{Te}} \sim \frac{T_e^{3/2}m^{1/2}}{4\pi e^4 NL_e}. \tag{43.2}$$

Отметим, что

$$\frac{l_e}{a_e} \sim \frac{1}{L_e}\left(\frac{T_e}{N^{1/3}e^2}\right)^{3/2}$$

и в силу условия разреженности плазмы (27.1): $l_e \gg a_e$. Соответственно этому частота столкновений мала по сравнению с плазменной частотой электронов:

$$\nu_e \ll v_{Te}/a_e = \Omega_e. \tag{43.3}$$

Аналогичным образом, длина пробега ионов по отношению к ион-ионным (ii) столкновениям:

$$l_i \sim \frac{T_i^2}{4\pi e^4 N L_i}, \qquad L_i = \ln\left(\frac{aT_i}{e^2}\right), \tag{43.4}$$

где L_i — кулоновский логарифм с ионными величинами вместо электронных. Соответствующее время пробега:

$$\tau_{ii} \sim \frac{1}{\nu_{ii}} \sim \frac{T_i^{3/2} M^{1/2}}{4\pi e^4 N L_i}. \tag{43.5}$$

Величина τ_e определяет, по порядку величины, время релаксации для установления локального теплового равновесия электронной компоненты плазмы, а τ_{ii} — такое же время для ионной компоненты. Но хотя частоты ν_{ee} и ν_{ei} ee- и ei-столкновений одного порядка величины, время τ_e отнюдь не является временем релаксации для установления равновесия между электронами и ионами; оно характеризует лишь скорость передачи импульса от электронов к ионам, но не скорость обмена энергией между ними. Время же релаксации для электрон-ионного равновесия дается определенной в предыдущем параграфе величиной τ_{ei}^{ε}. Сравнение всех этих времен показывает, что

$$\tau_{ee} : \tau_{ii} : \tau_{ei}^{\varepsilon} \sim 1 : (M/m)^{1/2} : (M/m). \tag{43.6}$$

С помощью длины пробега произведем оценку кинетических коэффициентов плазмы.

Для оценки электрической проводимости σ воспользуемся известной элементарной «газокинетической» формулой. Частицы (носители тока) с зарядом e и массой m в своем свободном движении в течение времени τ приобретают под влиянием электрического поля E «упорядоченную» скорость $V \sim \tau e E/m$. Плотность создаваемого этим движением электрического тока есть $j \sim eNV$. Проводимость же (коэффициент пропорциональности между j и E) есть, следовательно,

$$\sigma \sim \frac{e^2 N \tau}{m} \sim \frac{e^2 N l}{m v_T}, \tag{43.7}$$

причем под l, m и v_T следует понимать величины, относящиеся к более легким частицам — электронам. Оценивая с помощью этой формулы, имеем

$$\sigma \sim \frac{T_e^{3/2}}{e^2 m^{1/2} L_e}. \tag{43.8}$$

Коэффициент теплопроводности оценивается аналогичным образом с помощью газокинетической формулы (7.10); основную роль играют электроны. Имеем $\varkappa \sim N_e l_e v_{Te} c_e$ (где $c_e \sim 1$ — электронная теплоемкость), откуда

$$\varkappa \sim \frac{T_e^{5/2}}{e^4 m^{1/2} L_e}. \tag{43.9}$$

В противоположность электро- и теплопроводности, вязкость плазмы связана в основном с движением ионов, поскольку именно в ионной компоненте плазмы в основном сосредоточен ее импульс. Сверх того, импульс иона мало меняется при столкновениях с электронами; по этой причине достаточно рассматривать одни лишь ii-столкновения. Согласно (8.11), коэффициент вязкости оценивается как $\eta \sim N_i M l_i v_{Ti}$, откуда

$$\eta \sim \frac{M^{1/2} T_i^{5/2}}{e^4 L_i}. \tag{43.10}$$

Вычисление коэффициентов в выражениях (43.8)–(43.10) требует решения линеаризованного кинетического уравнения с интегралом столкновений Ландау, что возможно лишь приближенными численными методами. Так, для водородной плазмы ($z = 1$) коэффициенты в выражениях для σ, $\varkappa$, η оказываются равными соответственно 0,6; 0,9; 0,4.

§ 44. Лоренцева плазма

При вычислении электронного вклада в кинетические коэффициенты плазмы надо, вообще говоря, учитывать как ei-, так и ee-столкновения. Если, однако, заряд ионов достаточно велик, роль ei-столкновений может оказаться преобладающей. Действительно, сечение ee-столкновений пропорционально $(e^2)^2$, а частота таких столкновений ν_{ee} — еще и плотности электронов N_e; аналогичным образом, частота ei-столкновений пропорциональна $(ze^2)^2 N_i = e^4 z_i N_e$, так что при $z \gg 1$ будет и $\nu_{ei} \gg \nu_{ee}$. Плазму, в которой можно пренебречь ee- по сравнению с ei-столкновениями, называют *лоренцевой*. Хотя этот случай и не очень реалистичен, он интересен как в методическом отношении, так и по возможным применениям к другим объектам [1]).

Ввиду малости скоростей ионов по сравнению со скоростями электронов, в первом приближении можно ими пренебречь, т. е. считать ионы неподвижными, а их распределение заданным. В задаче о поведении плазмы во внешнем электрическом поле

[1]) Например, к слабо ионизованному газу, где вместо ei-столкновений надо говорить о столкновениях электронов с нейтральными атомами.

имеется выделенное направление — направление поля $\mathbf{E}$. Если электронная функция распределения мало отличается от равновесной, $f = f_0(p) + \delta f$, то малая поправка δf линейна по полю, т. е. имеет вид $\delta f = \mathbf{pE}g(p)$. В этих условиях электрон-ионный интеграл столкновений принимает тот вид, который был придан в § 11 интегралу столкновений в задаче о диффузии примеси легкого газа в тяжелом:

$$\mathrm{St}\, f = -\nu_{ei}(v)\delta f, \tag{44.1}$$

где введена зависящая от скорости *эффективная частота* столкновений

$$\nu_{ei}(v) = N_i v \sigma_i^{(ei)}, \tag{44.2}$$

а $\sigma_t^{(ei)}$ — транспортное сечение рассеяния электронов на ионах. Взяв последнее из (41.7) и заменив $zN_i = N_e$, получим

$$\nu_{ei}(v) = \frac{4\pi z e^4 N_e L}{m^2 v^3}. \tag{44.3}$$

Ниже в этом параграфе мы будем писать просто $\nu(v)$, опуская индексы ei.

Вычислим диэлектрическую проницаемость лоренцевой плазмы в пространственно-однородном (волновой вектор $\mathbf{k} = 0$) переменном $(\propto e^{-i\omega t})$ электрическом поле. Добавка δf к равновесному распределению будет зависеть от времени по тому же закону, и кинетическое уравнение для нее имеет вид

$$-i\omega\delta f - e\mathbf{E}\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} + \nu(v)\delta f = 0. \tag{44.4}$$

Заметив также, что $\partial f_0/\partial \mathbf{p} = -\mathbf{v} f_0/T$, находим отсюда

$$\delta f = -\frac{e}{T}\mathbf{E}\mathbf{v}\frac{f_0}{\nu(v) - i\omega}. \tag{44.5}$$

Диэлектрическая проницаемость определяется соотношением (29.4): $-i\omega\mathbf{P} = \mathbf{j}$, или

$$-i\omega\frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\mathbf{E} = -e\int \mathbf{v}\delta f\, d^3p. \tag{44.6}$$

Подставив (44.5) и произведя усреднение по направлениям $\mathbf{v}$ (согласно $\langle v_\alpha v_\beta\rangle = \delta_{\alpha\beta}v^2/3$), получим

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{4\pi e^2}{3\omega T}\int \frac{v^2 f_0\, d^3p}{\omega + i\nu(v)}. \tag{44.7}$$

В предельном случае $\omega \gg \nu$ [1]) эта формула дает

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{4\pi e^2 N_e}{m\omega^2} + i\frac{4\pi e^2 N_e}{3\omega^3 T}\langle v^2 \nu(v)\rangle, \tag{44.8}$$

где усреднение производится по максвелловскому распределению электронов. Вычислив это среднее для $\nu(v)$ из (44.3), получим

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\Omega_e^2}{\omega^2} + i\frac{4\sqrt{2\pi}}{3}\frac{ze^4 L N_e}{T^{3/2} m^{1/2}}\frac{\Omega_e^2}{\omega^3} \quad (\omega \gg \nu). \tag{44.9}$$

Напомним, однако, что область справедливости этой формулы ограничена также и сверху общим условием (41.14) применимости логарифмического приближения в интеграле столкновений: $\omega \ll v_{Te}/a_e = \Omega_e$ — частота должна быть мала по сравнению с плазменной частотой электронов [2]).

Формула (44.9) имеет особое значение, так как она справедлива при любых (а не только больших) значениях z. Действительно, при $\omega \gg \nu$ роль столкновений сводится к малым поправкам; ei- и ee-столкновения можно, следовательно, учитывать независимо. Но в отсутствие ионов однородное электрическое поле приводило бы лишь к перемещению всей системы электронов как целого и столкновения в такой системе не могут вызвать диссипацию (выражающуюся мнимой частью проницаемости ε''); последняя обуславливается в этих условиях только ei-столкновениями, учтенными в (44.9).

В обратном предельном случае, когда $\omega \ll \nu$, проницаемость имеет вид

$$\varepsilon = i\frac{4\pi\sigma}{\omega}, \quad \sigma = \frac{e^2 N_e}{3T}\left\langle \frac{v^2}{\nu(v)} \right\rangle. \tag{44.10}$$

Величина σ, фигурирующая в этом предельном выражении, есть статическая проводимость плазмы (см. VIII, § 58). Вычисление с $\nu(v)$ из (44.3) дает для нее

$$\sigma = \frac{4\sqrt{2}}{\pi^{3/2}}\frac{T^{3/2}}{ze^2 L m^{1/2}}. \tag{44.11}$$

Этот результат можно было бы получить, конечно, и путем прямого вычисления плотности электрического тока

$$\mathbf{j} = -e\int \mathbf{v}\,\delta f\, d^3p$$

с δf из (44.5) (при $\omega = 0$).

---

[1]) Под ν (без указания аргумента) подразумевается значение $\nu(v)$ при $v = v_T$. В данном случае $\nu = \dfrac{4\pi z e^4 N_e L}{m^{1/2} T_e^{3/2}}$.

[2]) Вычисление ε'' при $\omega \gg \Omega_e$ рассмотрено в § 48.

Вычислим также и другие кинетические коэффициенты лоренцевой плазмы, связанные с ее поведением под влиянием постоянного ($\omega = 0$) электрического поля и градиента температуры. Предварительно напомним определение этих коэффициентов (см. VIII, § 25).

Условия теплового равновесия требуют, как известно, наряду с постоянством температуры также и постоянства вдоль среды суммы $\mu + U$, где μ — химический потенциал частиц, а U — их энергия во внешнем поле. В данном случае речь идет о равновесии по отношению к электронам, так что под μ надо понимать их химический потенциал, а $U = -e\varphi$, где φ — потенциал электрического поля. Соответственно этому электрический ток $\mathbf{j}$ и диссипативный поток энергии $\mathbf{q}'$ обращаются одновременно в нуль лишь при условиях $T = \mathrm{const}$, $\mu - e\varphi = \mathrm{const}$, т. е. при $\nabla T = 0$, $\nabla\mu + e\mathbf{E} = 0$. Выражения для $\mathbf{j}$ и $\mathbf{q}'$ записываются в виде следующих соотношений, удовлетворяющих указанному условию:

$$\mathbf{E} + \frac{1}{e}\nabla\mu = \frac{1}{\sigma}\mathbf{j} + \alpha\nabla T, \tag{44.12}$$

$$\mathbf{q}' = \mathbf{q} - \left(\varphi - \frac{\mu}{e}\right)\mathbf{j} = \alpha T\mathbf{j} - \varkappa\nabla T. \tag{44.13}$$

Здесь σ — электрическая проводимость среды, $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности, α — термоэлектрический коэффициент; соотношение между коэффициентами при ∇T в (44.12) и $\mathbf{j}$ в (44.13) — следствие принципа Онсагера. Величина $(\varphi - \mu/e)\mathbf{j}$, вычтенная из полного потока энергии, представляет собой плотность конвективного потока энергии [1]).

Для вычисления кинетических коэффициентов исходим из кинетического уравнения

$$-e\mathbf{E}\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} + \mathbf{v}\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{r}} = -\nu(v)\delta f. \tag{44.14}$$

Подставив в него равновесное распределение в виде [2])

$$f_0 = \exp\left(\frac{\mu - \varepsilon}{T}\right), \tag{44.15}$$

получим

$$\delta f = -\frac{f_0}{T\nu(v)}(e\mathbf{E} + \nabla\mu)\mathbf{v} + f_0\frac{\mu - \varepsilon}{T^2\nu(v)}\mathbf{v}\nabla T. \tag{44.16}$$

[1]) При записи соотношений (44.12), (44.13) в VIII, § 25, было произведено переобозначение: под φ и $\mathbf{E}$ подразумевались $\varphi - \mu/e$ и $\mathbf{E} + \nabla\mu/e$. Такое определение, допустимое при феноменологическом подходе, нецелесообразно в кинетической теории, где под $-e\mathbf{E}$ надо понимать действующую на электрон силу.

[2]) Обозначение диэлектрической проницаемости и энергии электрона $mv^2/2$ одной и той же буквой ε вряд ли может привести к недоразумениям.

Термоэлектрический коэффициент вычисляется по коэффициенту в равенстве $\mathbf{j} = -\alpha\sigma\nabla T$ при $\mathbf{E} + \nabla\mu/e = 0$. Пишем

$$\mathbf{j} = -e\int \mathbf{v}\delta f\, d^3p = -\frac{e}{T^2}\int f_0 \frac{\mu-\varepsilon}{\nu(v)}\mathbf{v}(\mathbf{v}\nabla T)\, d^3p$$

и после усреднения по направлениям $\mathbf{v}$ находим

$$\alpha = \frac{N_e e}{3\sigma T^2}\left\langle \frac{v^2(\mu-\varepsilon)}{\nu(v)}\right\rangle = \frac{1}{eT}\left\{\mu - \frac{\langle v^2\varepsilon/\nu(v)\rangle}{\langle v^2/\nu(v)\rangle}\right\}. \tag{44.17}$$

Вычисление с $\nu(v)$ из (44.3) дает [1])

$$\alpha = \frac{1}{e}\left(\frac{\mu}{T} - 4\right). \tag{44.18}$$

Для вычисления коэффициента теплопроводности замечаем, что при $\mathbf{j} = 0$ должно быть $\mathbf{E} + \nabla\mu/e = \alpha\nabla T$. Подставив это значение (вместе с α из (44.18)) в (44.16), имеем

$$\delta f = \frac{f}{T\nu(v)}\left(4 - \frac{\varepsilon}{T}\right)\mathbf{v}\nabla T.$$

Вычисляя с этой функцией поток энергии

$$\mathbf{q} = \int \mathbf{v}\varepsilon\delta f\, d^3p,$$

получим

$$\varkappa = \frac{N_e}{3T^2}\left\langle \frac{v^2\varepsilon(4T-\varepsilon)}{\nu(v)}\right\rangle \tag{44.19}$$

и, наконец,

$$\varkappa = \frac{16\sqrt{2}}{\pi^{3/2}}\frac{T^{5/2}}{ze^4Lm^{1/2}}. \tag{44.20}$$

Задача

Найти столкновительную часть затухания электронных плазменных волн.

Решение. Если мнимая часть диэлектрической проницаемости мала, то вклады в нее за счет затухания Ландау и за счет столкновений складываются. С учетом последнего ε дается формулой (44.9); приравняв ε нулю, найдем $\omega = \Omega_e - i\gamma$, где коэффициент затухания

$$\gamma = \frac{\nu_{ei}}{3\sqrt{2\pi}} = \frac{2\sqrt{2\pi}}{3}\frac{ze^4LN_e}{m^{1/2}T_e^{3/2}}.$$

---

[1]) В классической статистике химический потенциал содержит член вида ζT с неопределенной постоянной ζ (соответствующей неопределенной аддитивной постоянной в энтропии). Тем самым возникает и неопределенная постоянная ζ/e в α. Эта неопределенность не отражается, однако, на каких-либо наблюдаемых эффектах; неопределенные члены $(\zeta/e)\nabla T$ сокращаются в обеих частях равенства (44.12).

Отношение

$$\frac{\gamma}{\Omega_e} = \frac{\sqrt{2}zL}{3}\left(\frac{e^2 N_e^{1/3}}{T_e}\right)^{3/2} \ll 1$$

в силу условия разреженности плазмы; этим оправдывается применение (44.9).

§ 45. Убегающие электроны

Быстрое убывание кулоновского сечения с увеличением скорости сталкивающихся частиц приводит, как мы увидим, к тому, что уже в сколь угодно слабом электрическом поле функция распределения достаточно быстрых электронов в плазме оказывается сильно искаженной.

Двигаясь с тепловой скоростью v, за время своего свободного пробега электрон в электрическом поле E приобретает упорядоченную скорость

$$V \sim \frac{eEl}{mv} \sim \frac{eE}{mvN_e\sigma_t(v)} \sim \frac{v^3 mE}{4\pi e^3 L N_e}$$

(сечение σ_t из (41.7)). Уже при $v \sim v_c$, где

$$v_c = \left(\frac{4\pi N_e e^3 L}{mE}\right)^{1/2}, \tag{45.1}$$

скорость $V \sim v$, а при $v > v_c$ длина и время пробега определяются уже скоростью V. Импульс, приобретаемый электроном за время пробега, будет при этом

$$\frac{eEl}{V} \sim \frac{eE}{VN_e\sigma_t(V)} \sim \frac{V^3 m^2 E}{4\pi e^3 L N_e} \sim mV\left(\frac{V}{v_c}\right)^2.$$

Импульс же, отдаваемый электроном при столкновении в конце пробега, $\sim mV$. Отсюда видно, что электроны с достаточно большими скоростями будут неограниченно ускоряться; такие электроны называют *убегающими*. При условии $v_c \gg (T_e/m)^{1/2}$ это явление будет наблюдаться лишь в «хвосте» максвелловского распределения; электрическое поле должно для этого удовлетворять условию

$$E \ll E_c = \frac{4\pi e^3 L N_e}{T_e}. \tag{45.2}$$

В этих условиях задачу об убегающих электронах можно решать как стационарную. Основная масса электронов, распределенных по Максвеллу, играет роль большого резервуара, из

которого «течет» стационарный малый поток в сторону больших энергий [1]).

Уже из происхождения убегающих электронов как результата направленного ускорения их электрическим полем очевидно, что они движутся в основном под малыми углами θ к направлению поля. Если, однако, поставить себе целью вычисление лишь величины потока убегающих электронов, полное определение функции их распределения не требуется; достаточно определить усредненное по углам распределение $\overline{f}$ по энергиям.

Кинетическое уравнение для распределения электронов по импульсам в электрическом поле имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} - e\mathbf{E}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} + \operatorname{div}_{\mathbf{p}} \mathbf{s} = 0, \tag{45.3}$$

где $\mathbf{s}$ — плотность столкновительного потока в импульсном пространстве. В сферических координатах p, θ, φ в импульсном пространстве (с полярной осью вдоль силы $-e\mathbf{E}$) имеем

$$-e\mathbf{E}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = eE\left(\cos\theta\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\sin\theta}{p}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) = $$
$$= eE\left(\frac{\cos\theta}{p^2}\frac{\partial}{\partial p}p^2 f - \frac{1}{p\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin^2\theta\cdot f\right).$$

Дивергенция же потока

$$\operatorname{div}_{\mathbf{p}} \mathbf{s} = \frac{1}{p^2}\frac{\partial}{\partial p}p^2 s_p + \frac{1}{p\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\cdot s_\theta.$$

Усредним уравнение (45.3) по углам, т. е. умножим его на $2\pi\sin\theta\,d\theta/(4\pi)$ и проинтегрируем. Все члены с производными $\partial/\partial\theta$ при этом выпадают; множитель же $\cos\theta$ можно, в первом приближении, заменить единицей. В результате для усредненной функции $\overline{f}$ получим уравнение

$$\frac{\partial\overline{f}}{\partial t} + \frac{eE}{p^2}\frac{\partial}{\partial p}p^2\overline{f} + \frac{1}{p^2}\frac{\partial}{\partial p}p^2\overline{s}_p = 0. \tag{45.4}$$

В нем остается лишь радиальная компонента плотности потока в импульсном пространстве. Эта компонента связана с передачей энергии при столкновениях; вклад ei-столкновений в нее, очевидно, мал по сравнению с вкладом ee-столкновений.

Поскольку убегающие электроны составляют лишь очень малую долю всех электронов, при вычислении потока s_p надо учитывать их столкновения лишь с основной массой максвелловских

[1]) Явление убегающих электронов было указано *Дрейсером* (*H. Dreicer*, 1958), а излагаемая здесь количественная теория дана *А.В. Гуревичем* (1960).

электронов (а не друг с другом); скорости последних малы по сравнению со скоростями убегающих электронов. В этих условиях нет необходимости заново вычислять поток s_p. Для него можно написать выражение

$$s_p = -T_e\nu_{ee}(v)m\left[\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{p}{mT_e}f\right] \tag{45.5}$$

непосредственно по аналогии с ранее выведенной формулой (22.5); здесь $\nu_{ee}(v) = \dfrac{4\pi e^4 N_e L}{m^2 v^3}$ — частота кулоновских столкновений быстрых электронов с медленными (ср. (44.3)) [1]). Поскольку выражение (45.5) относится к электронам со скоростями $v \sim v_c$, то и для кулоновского логарифма полагаем

$$L = \ln(mv_c^2 a/e^2). \tag{45.6}$$

Величина

$$\overline{S}_p = \overline{s}_p + eE\overline{f} \tag{45.7}$$

представляет собой, как это ясно из вида уравнения (45.4), полную (от столкновений и от действия поля) плотность радиального потока в импульсном пространстве. Согласно сказанному выше, распределение убегающих электронов можно искать как стационарное, т. е. пренебрегая производной по времени в кинетическом уравнении (45.4). Тогда

$$4\pi p^2\overline{S}_p = \mathrm{const} \equiv n_{\text{уб}}. \tag{45.8}$$

Это равенство (с $\overline{s}_p$ из (45.5)) представляет собой дифференциальное уравнение, определяющее функцию распределения $\overline{f}$. Постоянная же $n_{\text{уб}}$ дает искомую величину — полное число убегающих (в единицу времени в единице объема) электронов.

Введем безразмерную переменную u и безразмерную постоянную b согласно определению

$$u = p/p_c, \quad b = E/E_c, \quad p_c = (mT_e/b)^{1/2}. \tag{45.9}$$

Тогда уравнение (45.8) принимает вид

$$-\frac{b}{u}\frac{d\overline{f}}{du} - (1-u^2)\overline{f} = C \tag{45.10}$$

(постоянная C отличается от $n_{\text{уб}}$ постоянным множителем). Поскольку предполагается, что поле $E \ll E_c$, то параметр $b \ll 1$;

[1]) При выводе формулы (22.5) были использованы только малость передачи энергии при столкновениях и малость скорости частицы-мишени по сравнению со скоростью налетающего электрона. Для перехода к данному случаю достаточно заменить в (22.5) M на m, а под длиной пробега l понимать длину пробега по отношению к ee-столкновениям.

эта величина играет в рассматриваемой задаче роль малого параметра, характеризующего степень приближения [1]).

Решение уравнения (45.10):

$$\overline{f} = F - CF \int_0^u \frac{u}{F}\, du, \tag{45.11}$$

где

$$F = \frac{N_e}{(2\pi m T_e)^{3/2}} \exp\left\{\frac{1}{2b}\left(\frac{u^4}{2} - u^2\right)\right\} \tag{45.12}$$

— решение однородного уравнения. Нормировочный множитель в F определен из условия, чтобы при $u \to 0$ функция $\overline{f}$ переходила в максвелловское распределение

$$f_0 = \frac{N_e}{(2\pi m T_e)^{3/2}} \exp\left(-\frac{u^2}{2b}\right).$$

При $u \to \infty$ функция F неограниченно возрастает, между тем как $\overline{f}(u)$ должна оставаться конечной. Отсюда получаем условие $\overline{f}/F \to 0$ при $u \to \infty$, из которого определяется постоянная C [2]):

$$C = \frac{N_e}{(2\pi m T_e)^{3/2}} \left[\int_0^\infty \exp\left\{-\frac{1}{2b}\left(\frac{u^4}{2} - u^2\right)\right\} u\, du\right]^{-1}. \tag{45.13}$$

Интеграл вычисляется методом перевала путем разложения показателя экспоненты вблизи точки его максимума, $u = 1$. Таким образом, получается следующий закон зависимости числа убегающих электронов от напряженности поля E:

$$n_{\text{уб}} \sim N_e \nu_{ee}(v_{Te}) \exp\left(-\frac{E_c}{4E}\right). \tag{45.14}$$

Предэкспоненциальный множитель написан здесь лишь по размерности; более точное вычисление лежит вне рассмотренного приближения и требует решения кинетического уравнения с самого начала с большей точностью.

§ 46. Сходящийся интеграл столкновений

Кинетическое уравнение с интегралом столкновений Ландау позволяет решать задачи физики плазмы лишь с логарифми-

[1]) В частности, анализ угловой части кинетического уравнения показывает, что направления движения убегающих электронов лежат в области углов $\theta \sim b^{1/4}$.

[2]) Формулировка граничных условий здесь аналогична формулировке в § 24.

ческой точностью: большой аргумент кулоновского логарифма не вполне определен. Эта неопределенность связана с расходимостью интегралов на больших и малых углах рассеяния. Как уже указывалось, расходимость на больших углах не имеет принципиального характера: она появляется лишь в результате произведенного при выводе разложения по степеням передаваемого импульса $\mathbf{q}$; в самом интеграле столкновений Больцмана эта расходимость отсутствует. Расходимость же на малых углах возникает в результате неучета экранирующего действия плазмы на взаимное рассеяние частиц в ней. Для вычисления интеграла столкновений с более высокой, чем логарифмическая, точностью необходимо последовательно учитывать экранирование с самого начала (а не только при определении области интегрирования в кулоновском логарифме).

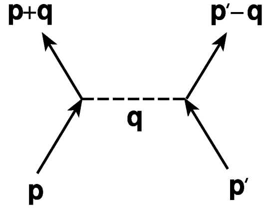
В § 41 было уже указано, что условия применимости интеграла столкновений с экранированным взаимодействием между заряженными частицами требуют, чтобы функции распределения мало менялись за времена $\sim a/\overline{v}_{\text{отн}}$ и на расстояниях $\sim a$. Эти же условия позволяют рассматривать экранировку зарядов макроскопическим образом как результат диэлектрической поляризации плазмы.

Мы рассмотрим поставленную задачу в двух предельных случаях: 1) когда к столкновениям частиц применимо квантовомеханическое борновское приближение и 2) когда процесс столкновения квазиклассичен.

Борновский случай. Начнем с первого случая, имеющего место при условии

$$\frac{|ee'|}{\hbar\overline{v}_{\text{отн}}} \ll 1. \tag{46.1}$$

Влияние, оказываемое диэлектрической средой на рассеяние частиц, наиболее ясным образом формулируется на языке диаграммной техники. В борновском приближении рассеяние двух частиц описывается (в нерелятивистском случае) диаграммой[1])



(46.2)

где штриховой линии отвечает функция $4\pi/\mathbf{q}^2$ — компонента Фу-

---

[1]) Как и в § 41, буквы без штриха и со штрихом относятся к двум сталкивающимся частицам (одного и того же или разных сортов).

рье кулоновского потенциала единичного заряда ($\mathbf{q}$ — передаваемый при рассеянии импульс). Наличие среды сказывается лишь в замене этой функции на компоненту потенциала в среде $\dfrac{4\pi}{q_\alpha q_\beta \varepsilon_{\alpha\beta}}$, где $\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{q}/\hbar)$ — тензор диэлектрической проницаемости среды, причем $\hbar\omega$ совпадает с передаваемой энергией (ср. IX, § 85). Соответственно и в амплитуде рассеяния появится дополнительный множитель $\dfrac{q^2}{q_\alpha q_\beta \varepsilon_{\alpha\beta}}$, а в сечении — квадрат его модуля. Таким образом,

$$d\sigma = d\sigma_{\text{рез}} \frac{q^4}{|\varepsilon_{\alpha\beta} q_\alpha q_\beta|^2}. \tag{46.3}$$

Для простоты мы будем предполагать далее плазму изотропной. Для такой плазмы тензор $\varepsilon_{\alpha\beta}$ сводится к двум скалярам (ε_t и ε_l), причем в произведение

$$\varepsilon_{\alpha\beta} q_\alpha q_\beta = \varepsilon_l q^2$$

входит только один из них; мы будем опускать индекс l, подразумевая под ε продольную проницаемость.

Таким образом, сечение рассеяния принимает вид

$$d\sigma = \frac{d\sigma_{\text{рез}}}{|\varepsilon(\omega, q/\hbar)|^2}, \tag{46.4}$$

где $d\sigma_{\text{рез}}$ — обычное резерфордовское сечение для рассеяния в пустоте [1]). Отметим также, что передаваемая при столкновении энергия связана с передачей импульса равенством

$$\hbar\omega = \mathbf{qV}, \tag{46.5}$$

где $\mathbf{V}$ — скорость центра инерции сталкивающихся частиц [2]). Величина же вектора $\mathbf{q}$ связана с углом рассеяния χ в системе центра инерции обычной формулой

$$q = 2\mu|\mathbf{v} - \mathbf{v}'| \sin\frac{\chi}{2}, \tag{46.6}$$

где $\mu = \dfrac{mm'}{m + m'}$.

---

[1]) Для рассеяния тождественных частиц (на не малые углы) под $d\sigma_{\text{рез}}$ следует понимать сечение кулоновского рассеяния с учетом обменных эффектов (см. III, § 137).

[2]) В этом легко убедиться, выразив скорости частиц $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}'$ через $\mathbf{V}$ и скорость относительного движения $\mathbf{v} - \mathbf{v}'$ и учтя, что при рассеянии V и $|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|$ не меняются.

Интеграл столкновений, автоматически правильно учитывающий большие и малые углы рассеяния и свободный от расходимости, получается подстановкой (46.4) в обычный больцмановский интеграл:

$$\operatorname{St} f = \sum \int \{f(\mathbf{p}+\mathbf{q})f'(\mathbf{p}'-\mathbf{q}) - f(\mathbf{p})f'(\mathbf{p}')\} \frac{|\mathbf{v}-\mathbf{v}'|\, d\sigma_{\text{рез}}}{|\varepsilon(\omega, q/\hbar)|^2}; \quad (46.7)$$

суммирование производится по всем родам частиц, к которым относятся штрихованные величины.

Кинетическое уравнение с интегралом столкновений (46.7) очень сложно — не только в силу невозможности разложения подынтегрального выражения по степеням $\mathbf{q}$, но и ввиду того, что диэлектрическая проницаемость плазмы сама определяется через искомые функции распределения. Существенное упрощение достигается лишь в случае слабого отклонения от равновесия, когда допустима линеаризация кинетического уравнения. Тогда проницаемость должна вычисляться с равновесными функциями распределения и, таким образом, не зависит от искомых поправочных функций.

Квазиклассический случай. Перейдем к обратному предельному случаю, когда

$$\frac{|ee'|}{\hbar \overline{v}_{\text{отн}}} \gg 1 \quad (46.8)$$

и для рассеяния частиц применимо квазиклассическое приближение. В этом случае нельзя учесть влияние среды на рассеяние единым образом при малых и больших углах рассеяния (как это было возможным в борновском случае); поэтому придется рассмотреть эти две области отдельно и затем «сшить» результаты при промежуточных углах.

Поле заряда e, движущегося со скоростью $\mathbf{v}$ в диэлектрической среде, определяется уравнением

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi e \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t).$$

В компонентах Фурье находим отсюда для потенциала поля [1]:

$$\varphi_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi e}{k^2 \varepsilon(\mathbf{k}\mathbf{v}, k)}\, e^{-i\mathbf{k}\mathbf{v}t}. \quad (46.9)$$

[1]) Вывод формулы (46.9) предполагает линейность связи между $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ и тем самым достаточную малость поля. Это условие во всяком случае выполняется (в слабо неидеальном газе) на расстояниях $r \gtrsim a$, от которых как раз и происходит расходимость интеграла, для устранения которой мы имеем в виду воспользоваться формулой (46.9). Этим расстояниям отвечают значения $k \lesssim 1/a$, для которых диэлектрическая проницаемость существенно отличается от 1.

При малых углах рассеяния изменение импульса частицы дается (см. I, § 20) классической формулой

$$\mathbf{q} = -\int \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}\, dt, \tag{46.10}$$

где U — энергия взаимодействия двух частиц, а интегрирование производится вдоль прямолинейной траектории $\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho} + \mathbf{v}'t$ ($\boldsymbol{\rho}$ — вектор прицельного расстояния) [1]. Выразив энергию $U = e'\varphi$ в виде интеграла Фурье

$$U = 4\pi e e' \int \frac{e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}}{k^2\varepsilon(\omega,k)} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tag{46.11}$$

(причем $\omega = \mathbf{kv}$) и подставив в (46.10), получим

$$\mathbf{q} = -4\pi i e e' \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\rho}}{k^2\varepsilon(\omega,k)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{v}-\mathbf{v}')t}\, dt \right\}.$$

Внутренний интеграл дает $\dfrac{2\pi\delta(k_{||})}{|\mathbf{v}-\mathbf{v}'|}$, где $k_{||}$ — проекция вектора $\mathbf{k}$ на направление $\mathbf{v}-\mathbf{v}'$. Устранив затем δ-функцию интегрированием до $dk_{||}$, найдем

$$\mathbf{q} = -\frac{4\pi i e e'}{|\mathbf{v}-\mathbf{v}'|} \int \frac{\mathbf{k}_\perp e^{i\mathbf{k}_\perp \rho}}{k_\perp^2 \varepsilon(\omega,k_\perp)} \frac{d^2k_\perp}{(2\pi)^2}, \tag{46.12}$$

где $\mathbf{k}_\perp$ (как и $\boldsymbol{\rho}$) — двумерный вектор в плоскости, перпендикулярной $\mathbf{v}-\mathbf{v}'$. При этом и частота

$$\omega = \mathbf{k}_\perp \mathbf{v} = \mathbf{k}_\perp \mathbf{V}. \tag{46.13}$$

Ниже в этом параграфе мы будем опускать индекс $\perp$, подразумевая везде под $\mathbf{k}$ указанный двумерный вектор.

Вычислим теперь с помощью (46.12) величины

$$B_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \int q_\alpha q_\beta |\mathbf{v}-\mathbf{v}'|\, d^2\rho, \tag{46.14}$$

входящие в интеграл столкновений, разложенный по степеням малого $\mathbf{q}$ (сечение $d\sigma$ в (41.4) написано здесь в виде прицельной площади $d^2\rho$). Написав произведение двух интегралов (46.12) в виде двойного интеграла (по $d^2k\, d^2k'$), выполняем интегрирование по $d^2\rho$ согласно

$$\int e^{i\rho(\mathbf{k}+\mathbf{k}')}\, d^2\rho = (2\pi)^2 \delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}').$$

[1]) Безразлично, как вычислять величину $\mathbf{q}$: как изменение импульса каждой из сталкивающихся частиц, или как изменение импульса их относительного движения.

После этого интегрирование по d^2k' просто устраняет δ-функцию и остается

$$B_{\alpha\beta} = \frac{2e^2e'^2}{|\mathbf{v}-\mathbf{v}'|}\int \frac{k_\alpha k_\beta\, d^2k}{k^4|\varepsilon(\mathbf{kV},k)|^2} \qquad (46.15)$$

(здесь использовано также, что согласно (28.9) $\varepsilon(-\omega,k) = \varepsilon^*(\omega,k)$). Эти интегралы уже сходятся при малых k (поскольку $|\varepsilon|^{-2}\to 0$ при ω, $k\to 0$) [1]).

В (46.15) входит проницаемость при отличной от нуля частоте $\omega = \mathbf{kV}$; имея в виду это обстоятельство, иногда говорят, что эта формула учитывает эффект *динамического экранирования.*

Обратим внимание на зависимость подынтегрального выражения в (46.15) от направления $\mathbf{V}$ через аргумент $\mathbf{kV}$ функции ε. Эта зависимость исчезает при вычислении интеграла в логарифмическом приближении, когда интегрирование ограничивается областью от $k\sim 1/a$ до $k\sim \mu\bar{v}^2/|ee'|$. Основную роль в интеграле играют значения k, далекие от обоих этих пределов; в этой области значений имеем $|\varepsilon|^2 = 1$ и интеграл сводится к $\int k_\alpha k_\beta\, d^2k/k^4$. Усредняя подынтегральное выражение по всем направлениям $\mathbf{k}$ в плоскости, перпендикулярной $\mathbf{v}-\mathbf{v}'$, мы вернемся к прежнему выражению (41.8) с $L = \int dk/k$.

Для устранения расходимости при больших передачах импульса надо, как уже указывалось, произвести «сшивку» разложенного по степеням $\mathbf{q}$ интеграла столкновений с неразложенным интегралом (*J. Hubbard*, 1961; *O. Aono*, 1962).

Рассмотрим разность

$$\mathrm{St}_{\text{кл}} f - \mathrm{St}_{\text{Б}} f, \qquad (46.16)$$

где $\mathrm{St}_{\text{кл}}$ есть искомый сходящийся интеграл столкновений, а $\mathrm{St}_{\text{Б}}$ дается выражением (46.7), которое в борновском случае представляет собой правильный интеграл столкновений, но здесь играет лишь вспомогательную роль.

Разделим весь интервал изменения угла рассеяния на две области:

$$\text{I)}\ \chi < \chi_1, \quad \text{II)}\ \chi > \chi_1,$$

причем χ_1 выбрано так, что

$$\frac{|ee'|}{\mu a\bar{v}^2_{\text{отн}}} \ll \chi_1 \ll 1. \qquad (46.17)$$

При классическом рассеянии на малые углы в кулоновском поле, угол χ связан с прицельным расстоянием ρ соотношением

$$\rho = \frac{2|ee'|}{\mu(\mathbf{v}-\mathbf{v}')^2\chi}.$$

---

[1]) Устранение расходимости в интеграле столкновений Ландау, связанной с экранировкой кулоновского поля, принадлежит *Балеску* и *Ленарду* (*R. Balescu*, 1960; *A. Lenard*, 1960). Полностью сходящееся выражение (46.7) было написано *А.А. Рухадзе* и *В.П. Силиным* (1961).

Поэтому значению $\chi = \chi_1$ отвечает (при условии (46.17)) значение $\rho = \rho_1 \ll a$, так что на этом расстоянии экранировка несущественна и рассеяние действительно можно считать чисто кулоновским. То же самое относится и ко всей области $\rho < \rho_1$ (т. е. $\chi > \chi_1$). Сечение рассеяния в этой области будет, следовательно, резерфордовским, и соответствующий вклад в интеграл столкновений есть

$$\mathrm{St}^{\mathrm{II}}_{\text{кл}} f = \sum \int\limits_{\chi>\chi_1} [f(\mathbf{p}+\mathbf{q})f'(\mathbf{p}'-\mathbf{q}) - f(\mathbf{p})f'(\mathbf{p}')|\mathbf{v}-\mathbf{v}'|\, d\sigma_{\text{рез}}.$$

Но точно таков же вклад области $\chi > \chi_1$ в интеграл (46.7): в этой области $q > q_1$, причем в силу условия (46.8)

$$\frac{q_1}{\hbar} \sim \frac{\mu\overline{v}_{\text{отн}}\chi_1}{\hbar} \gg \frac{|ee'|}{\hbar\overline{v}_{\text{отн}}a} \gg \frac{1}{a},$$

и потому в (46.7) можно положить $|\varepsilon|^2 = 1$. Таким образом, вклад в разность (46.16) возникает только от области $\chi < \chi_1$ ($\rho > \rho_1$), которую и остается рассмотреть.

Во всей этой области передача импульса мала, так что интеграл столкновений можно разлагать по степеням $\mathbf{q}$. Входящие в разложенный $\mathrm{St}_{\text{кл}}$ величины $B_{\alpha\beta}$ вычисляются как интегралы (46.14) с $\mathbf{q}$ из (46.12). Вклад в эти интегралы от области $\rho > \rho_1$ равен

$$(B_{\alpha\beta})^{\mathrm{I}}_{\text{кл}} = \frac{(ee')^2}{2\pi^2|\mathbf{v}-\mathbf{v}'|}F_{\alpha\beta},$$

$$F_{\alpha\beta} = \int\limits_{\rho_1}^{\infty} d^2\rho \left(\int\limits_0^{\infty} \frac{ik_\alpha e^{i\mathbf{k}\rho}}{k^2\varepsilon}\, d^2k \int\limits_0^{\infty} \frac{ik_\beta e^{i\mathbf{k}\rho}}{k^2\varepsilon}\, d^2k \right), \tag{46.18}$$

где в качестве пределов в двойных интегралах (по $d^2\rho$ и d^2k) условно указаны пределы по ρ и k. Перепишем величины $F_{\alpha\beta}$ тождественным образом в виде

$$\begin{aligned} F_{\alpha\beta} = \int\limits_0^{\infty} d^2\rho \left(\int\limits_0^{q_1/\hbar} \ldots d^2k \right)_\alpha \left(\int\limits_0^{q_1/\hbar} \ldots d^2k \right)_\beta - \\ - \int\limits_0^{\rho_1} d^2\rho \left(\int\limits_0^{q_1/\hbar} \ldots d^2k \right)_\alpha \left(\int\limits_0^{q_1/\hbar} \ldots d^2k \right)_\beta d^2k + \\ + \int\limits_{\rho_1}^{\infty} d^2\rho \left(\int\limits_0^{\infty} \ldots d^2k \right)_\alpha \left(\int\limits_{q_1/\hbar}^{\infty} \ldots d^2k \right)_\beta + \\ + \int\limits_{\rho_1}^{\infty} d^2\rho \left(\int\limits_{q_1/\hbar}^{\infty} \ldots d^2k \right)_\alpha \left(\int\limits_0^{q_1/\hbar} \ldots d^2k \right)_\beta. \end{aligned} \tag{46.19}$$

Первый член в (46.19), будучи преобразован как при выводе (46.15), дает в (46.18) вклад

$$\frac{2(ee')^2}{|\mathbf{v}-\mathbf{v}'|}\int\limits_0^{q_1/\hbar}\frac{k_\alpha k_\beta}{k^4|\varepsilon|^2}\,d^2k.$$

Это выражение как раз совпадает с тем, которое получилось бы при разложении интеграла (46.7), взятого по области $\chi<\chi_1$ [1]); в интересующую нас разность (46.16) оно, следовательно, не дает вклада.

Для преобразования остальных членов в (46.19) замечаем, что в их подынтегральных выражениях можно положить $\varepsilon=1$: интегралы остаются при этом сходящимися, и их значения определяются областью $k\sim q_1/\hbar$, в которой $ka\gg 1$ и потому $|\varepsilon|\approx 1$. Существенно также, что в силу условия (46.8) параметр

$$\frac{q_1\rho_1}{\hbar}=\frac{2|ee'|}{\hbar v_{\text{отн}}}\gg 1; \tag{46.20}$$

поэтому надо сохранить только члены, остающиеся конечными при $q_1\rho_1/\hbar\to\infty$. В этом пределе третий и четвертый члены в (46.19) обращаются в нуль. Таким образом, остается лишь

$$(B_{\alpha\beta})^{\rm I}_{\text{кл}}-(B_{\alpha\beta})^{\rm I}_{\text{Б}}=$$
$$=-\frac{(ee')^2}{2\pi^2|\mathbf{v}-\mathbf{v}'|}\int\limits_0^{\rho_1}d^2\rho\left(\int\limits_0^{q_1/\hbar}ik_\alpha e^{i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}}\frac{d^2k}{k^2}\int\limits_0^{q_1/\hbar}ik_\beta e^{i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}}\frac{d^2k}{k^2}\right), \tag{46.21}$$

где индексы «кл» и «Б» указывают, что значения $B_{\alpha\beta}$ относятся соответственно к разложениям интегралов $\mathrm{St}_{\text{кл}}$ и $\mathrm{St}_{\text{Б}}$.

Каждый из двух интегралов по d^2k направлен вдоль вектора $\boldsymbol{\rho}$; после интегрирования по этим направлениям (в плоскости, перпендикулярной $\mathbf{v}-\mathbf{v}'$) получим для разности (46.21) взятое с обратным знаком выражение вида (41.8) с

$$L=\int\limits_0^{\rho_1}\rho\,d\rho\left[\frac{i}{2\pi}\int\limits_0^{q_1/\hbar}\int\limits_0^{2\pi}\cos\varphi e^{ik\rho\cos\varphi}\,d\varphi\,dk\right]^2.$$

---

[1]) Резерфордовское сечение рассеяния на малые углы, выраженное через $\mathbf{q}$, имеет вид

$$d\sigma_{\text{рез}}=\frac{4(ee')^2}{q^4|\mathbf{v}-\mathbf{v}'|^2}\,d^2q$$

(использовано, что $q\approx\mu|\mathbf{v}-\mathbf{v}'|\chi$, $do\approx\dfrac{d^2q}{\mu^2(\mathbf{v}-\mathbf{v}')^2}$).

Воспользовавшись известным интегральным представлением функций Бесселя и равенством $J_0'(x) = -J_1(x)$, переписываем этот интеграл в виде

$$L = \int_0^{\rho_1} \rho\, d\rho \left[\int_0^{q_1/\hbar} J_1(k\rho)\, dk \right]^2 = \int_0^{\rho_1 q_1/\hbar} [J_0(x) - 1]^2 \frac{dx}{x},$$

или, после интегрирования по частям,

$$L = \ln \frac{q_1\rho_1}{\hbar} + 2\int_0^{\infty} J_1(x)[J_0(x) - 1] \ln x\, dx.$$

Здесь учтено, что параметр $\rho_1 q_1/\hbar$ (уже не содержащий вспомогательной величины χ_1) велик; соответственно этому заменен бесконечностью верхний предел в оставшемся интеграле, а в первом члене положено $J_0(q_1\rho_1/\hbar) \approx 0$. С помощью значений

$$\int_0^{\infty} J_1(x) \ln x\, dx = -C + \ln 2,$$

$$\int_0^{\infty} J_0(x) J_1(x) \ln x\, dx = \frac{1}{2}(\ln 2 - C)$$

(где $C = 0,577\ldots$ — постоянная Эйлера; $\gamma = e^C = 1,78\ldots$) и с учетом (46.20) окончательно найдем

$$L = \ln \frac{\gamma |ee'|}{\hbar |\mathbf{v} - \mathbf{v}'|}. \tag{46.22}$$

Подводя итог произведенным вычислениям, приходим к результату, что в квазиклассическом случае лишенный расходимостей интеграл столкновений может быть представлен в виде

$$\mathrm{St}_{\text{кл}} f = \mathrm{St}_{\text{Б}} f - \mathrm{St}_{\text{Л}} f, \tag{46.23}$$

где $\mathrm{St}_{\text{Б}}$ дается формулой (46.7), а $\mathrm{St}_{\text{Л}}$ — интеграл столкновений Ландау с кулоновским логарифмом (46.22). Подчеркнем, что в последнем $|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|$ — точная переменная величина, а не среднее значение $\overline{v}_{\text{отн}}$.

В силу сделанных при выводе пренебрежений, этот результат справедлив, конечно, лишь с «улучшенной логарифмической точностью»: кинетическое уравнение с интегралом столкновений (46.23) позволяет улучшить точность вычислений лишь в смысле определения точного коэффициента в аргументе большого логарифма (с этой точностью, разумеется, из всех ответов выпадает $\hbar$, играющее в (46.23) лишь роль вспомогательного параметра).

Задачи

1. В борновском случае с улучшенной логарифмической точностью вычислить мнимую часть диэлектрической проницаемости однозарядной ($z=1$) равновесной ($T_i = T_e$) плазмы для частот $\omega \gg \nu_{ei}$.

Решение. При вычислении ε'' при условии $\omega \gg \nu$ надо учитывать только ei-столкновения (как это было объяснено в связи с выводом (44.8)). Поскольку интеграл столкновений (46.7) отличается от обычного интеграла Больцмана только множителем $|\varepsilon|^{-2}$ перед $d\sigma_{\text{рез}}$, искомое ε'' может вычисляться по той же формуле (44.8):

$$\varepsilon''(\omega) = \frac{4\pi e^2 N_i N_e}{3T\omega^3}\langle v_e^3 \langle \sigma_t\rangle_i\rangle_e, \tag{1}$$

где $\langle\ldots\rangle_e$ или $\langle\ldots\rangle_i$ означают усреднение по равновесному распределению скоростей электронов $\mathbf{v}_e$ или ионов $\mathbf{v}_i$. Отличие от произведенных в § 44 вычислений будет состоять лишь в том, что σ_t определяется теперь как

$$\sigma_t = \int (1-\cos\chi)\left|\varepsilon\left(\frac{\mathbf{q}\mathbf{v}_i}{\hbar}, \frac{q}{\hbar}\right)\right|^{-2} d\sigma_{\text{рез}}, \tag{2}$$

и в необходимости усреднения σ_t по скоростям ионов (которыми в этом месте пренебречь, конечно, нельзя); в аргументе $\omega = \mathbf{q}\mathbf{V}/\hbar$ функции ε скорость центра инерции электрона и иона приближенно заменена скоростью иона. Резерфордовское сечение записываем в виде

$$d\sigma_{\text{рез}} = \frac{(ze^2)^2 m^2}{4p_e^4}\frac{2\pi\sin\chi\, d\chi}{\sin^4(\chi/2)} = \frac{8\pi(ze^2)^2m^2}{p_e^2q^3}\,dq, \tag{3}$$

где

$$q = 2p_e\sin\frac{\chi}{2}, \quad 1-\cos\chi = \frac{q^2}{2p_e^2}, \qquad 0 \leqslant q \leqslant 2p_e$$

($p_e = m\mathbf{v}_e$ — импульс электрона).

Функция $\varepsilon(\omega, q/\hbar)-1$ определяется формулой (31.11) и складывается из электронной и ионной частей. Поскольку ее аргумент в (2) $\hbar\omega = \mathbf{q}\mathbf{v}_i \ll qv_e$, то электронную часть можно взять при $\omega = 0$; тогда

$$\varepsilon\left(\frac{\mathbf{q}\mathbf{v}_i}{\hbar}, \frac{q}{\hbar}\right) - 1 = \frac{\hbar^2}{q^2a_e^2}\left\{2 + F\left(\frac{v_{iq}}{\sqrt{2}v_{Ti}}\right)\right\} \tag{4}$$

(v_{iq} — проекция $\mathbf{v}_i$ на $\mathbf{q}$; учтено, что при $z=1$ $a_i = a_e$).

Подставив (3) и (4) в (2), после очевидных замен переменных получаем

$$\langle\sigma_t\rangle_i = \frac{2\sqrt{\pi}\,e^4}{p_e^4}\int\limits_0^{4p_e^2a_e^2/\hbar^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\zeta e^{-\xi^2}\,d\xi\,d\zeta}{[\zeta+2+F'(\xi)]^2+[F''(\xi)]^2}$$

($F = F' + iF''$). Интегрирование по $d\zeta$ выполняется элементарно, а при подстановке пределов надо учесть, что $\hbar^2/(p_e^2a_e^2) \ll 1$, и отбросить все члены $\sim \hbar^2/(p_e^2a_e^2)$ и выше. В результате получается

$$\langle\sigma_t\rangle_i = \frac{4\pi e^4}{m^2v_e^4}\left[\ln\frac{2mv_ea_e}{\hbar} + A\right], \tag{5}$$

где

$$A = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\infty} e^{-\xi^2}\left\{\frac{2+F'}{F''}\left[\operatorname{arctg}\frac{2+F'}{F''} - \frac{\pi}{2}\right] - \frac{1}{2}\ln\left[(2+F')^2 + F''^2\right]\right\}d\xi$$

(учтено, что $F'(\xi)$ — четная, $F''(\xi)$ — нечетная функции ξ); численное вычисление дает $A=-0,69$.

Усреднение в (1) производится с помощью формул

$$\langle v^{-1}\rangle=\left(\frac{2m}{\pi T}\right)^{1/2},\quad \left\langle\frac{\ln v}{v}\right\rangle=\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{1/2}\left[\ln\frac{2T}{m}-C\right]$$

(C — постоянная Эйлера). Окончательно находим

$$\varepsilon''=\frac{4\sqrt{2\pi}}{3}\frac{e^4N_e}{T^{3/2}m^{1/2}}\frac{\Omega_e^2}{\omega^3}L_{\text{Б}},\quad L_{\text{Б}}=\ln\frac{\alpha_{\text{Б}}(mT)^{1/2}a_e}{\hbar},$$
$$\ln\alpha_{\text{Б}}=\frac{3}{2}\ln 2-\frac{C}{2}+A=\ln 1,06 \tag{6}$$

(*В.И. Перель*, *Г.М. Элиашберг*, 1961).

2. То же в квазиклассическом случае.

Р е ш е н и е. Согласно (46.23) выражение для σ_t в квазиклассическом случае получается вычитанием $\ln\left(\dfrac{\gamma e^2}{\hbar v}\right)$ из логарифма в (5):

$$\langle\sigma_t\rangle_i=\frac{2\pi e^4}{m^2v_e^4}\left[\ln\frac{2mv_e^2a_e}{\gamma e^2}+A\right]. \tag{7}$$

Для ε'' получается формула (6) с логарифмом

$$L_{\text{кл}}=\ln\frac{Ta_e\alpha_{\text{кл}}}{e^2},\qquad \ln\alpha_{\text{кл}}=2\ln 2-2C+A=\ln 0,63 \tag{8}$$

вместо $L_{\text{Б}}$.

3. С улучшенной логарифмической точностью определить скорость передачи энергии от электронов к ионам однозарядной ($z=1$) плазмы, считая разность температур электронов и ионов малой ($\delta T=T_e-T_i\ll T_e$) [1]).

Р е ш е н и е. Ввиду малости отношения m/M (а тем самым малости передачи энергии в каждом акте), заранее ясно, что уравнение для функции распределения электронов сводится к уравнению типа Фоккера–Планка. Оно имеет вид (см. § 21)

$$\frac{\partial f_e}{\partial t}=\frac{1}{p_e^2}\frac{\partial}{\partial p_e}\left\{p_e^2B(p_e)\left[\frac{\partial f_e}{\partial p_e}+\frac{v_e}{T_i}f_e\right]\right\}.$$

Умножим это уравнение на $\dfrac{p_e^2}{2m}$ и проинтегрируем по $4\pi p_e^2\,dp_e$. После интегрирования по частям получаем для скорости изменения энергии электронов:

$$\frac{dE_e}{dt}=-\int Bv_e\left[\frac{\partial f_e}{\partial p_e}+\frac{v_e}{T_i}f_e\right]d^3p_e.$$

Считая функцию распределения электронов максвелловской, а разность температур малой, находим

$$\frac{dE_e}{dt}=\left(\frac{1}{T_e}-\frac{1}{T_i}\right)\int Bv_e^2f_e\,d^3p_e\approx-\frac{\delta T}{T^2}N_e\langle Bv_e^2\rangle_e. \tag{9}$$

[1]) Этот вопрос рассматривался *Р.Р. Рамазашвили*, *А.А. Рухадзе* и *В.П. Силиным* (1962).

Коэффициент B, как и в (21.11), выражается через средний квадрат изменения импульса электрона при столкновении с ионом:

$$B = \frac{\sum(\Delta p_e)^2}{2\delta t} = \frac{1}{2} N_i v_e \int \langle(\Delta p_e)^2\rangle_i \, d\sigma. \tag{10}$$

Величину же Δp_e находим из равенства (46.5):

$$\Delta p_e \approx -\frac{\mathbf{Vq}}{v_e} \approx -\frac{\mathbf{v}_i\mathbf{q}}{v_e} \equiv \frac{v_{iq}q}{v_e}.$$

Подставляя в (10), а затем в (9) и используя связь q с углом рассеяния χ из задачи 1, получаем

$$\frac{dE_e}{dt} = -\frac{\delta T}{T^2} N m^2 \langle v_e^3 \langle v_{iq}^2 \sigma_t \rangle_i \rangle_e \quad (N_i = N_e \equiv N). \tag{11}$$

Формула (11) вполне аналогична формуле (1) задачи 1, и дальнейшие вычисления поэтому практически те же самые. В борновском случае имеем

$$\langle v_{iq}^2 \sigma_t \rangle_i = \frac{4\pi e^4 T}{m^2 M v_e^4} \left[\ln \frac{2m v_e a_e}{\hbar} + A_1 \right],$$

где A_1 — интеграл, отличающийся от A задачи 1 дополнительным множителем $2\xi^2$ под знаком интеграла (численный расчет дает $A_1 = -0,52$). Усреднение по скоростям электронов производится, как в задаче 1. Окончательно

$$\frac{dE_e}{dt} = -\frac{4\sqrt{2\pi m}\, N^2 e^2}{M T^{3/2}} L_{\text{Б}} \delta T, \qquad L_{\text{Б}} = \ln\left(\beta_{\text{Б}} (mT)^{1/2} a_e/\hbar\right), \tag{12}$$

где

$$\ln \beta_{\text{Б}} = \frac{3}{2} \ln 2 - \frac{C}{2} + A_1 = \ln 1,26.$$

Аналогично в квазиклассическом случае получаем формулу вида (12), но с заменой $L_{\text{Б}}$ на

$$L_{\text{кл}} = \ln\left(T a_e \beta_{\text{кл}}/e^2\right), \qquad \ln \beta_{\text{кл}} = 2\ln 2 - 2C + A_1 = \ln 0,75. \tag{13}$$

Формулы (12), (13) уточняют результаты § 42, определяя (для случая малой разности температур) численный множитель под знаком логарифма в (42.6).

§ 47. Взаимодействие через плазменные волны

В некоторых случаях учет динамического экранирования кулоновского взаимодействия частиц в плазме приводит не только к уточнению аргумента кулоновского логарифма, но и к качественно новым эффектам. Для их изучения представим интеграл столкновений в виде, точно учитывающем вклад от рассеяния на малые углы и лишь с логарифмической точностью — вклад от рассеяния на большие углы.

В квазиклассическом случае большие углы рассеяния ($\chi \sim 1$) происходят от малых прицельных расстояний:

$$\rho \lesssim \frac{|ee'|}{\mu \bar{v}_{\text{отн}}^2}.$$

Искомый интеграл столкновений имеет вид интеграла Ландау с величинами $B_{\alpha\beta}$ из (46.15):

$$B_{\alpha\beta} = \frac{2(ee')^2}{|\mathbf{v}-\mathbf{v}'|}\int \frac{k_\alpha k_\beta\, d^2k}{k^4|\varepsilon(\mathbf{kV},k)|^2}, \tag{47.1}$$

где интегрирование производится по области до

$$k_{\max} \sim \frac{\mu\overline{v}^2_{\text{отн}}}{|ee'|}. \tag{47.2}$$

В обратном, борновском случае искомая форма интеграла столкновений получается путем разложения подынтегрального выражения в (46.7) по степеням $\mathbf{q}$. В результате снова приходим к интегралу Ландау с величинами $B_{\alpha\beta}$, дающимися той же формулой (47.1) с тем лишь отличием, что теперь

$$k_{\max} \sim \frac{\mu\overline{v}_{\text{отн}}}{\hbar} \tag{47.3}$$

(значение $k = q/\hbar$ при передаче импульса $q \sim \mu\overline{v}_{\text{отн}}$). Напомним снова, что физический смысл обрезания на больших значениях k один и тот же в классическом и борновском случаях — обрезание производится на углах рассеяния $\chi \sim 1$; разная связь между k и χ в этих случаях приводит, однако, к разным выражениям для $k_{\max}$.

Интеграл столкновений Ландау с величинами $B_{\alpha\beta}$ из (47.1) называют интегралом *Балеску–Ленарда* [1]). Перепишем (47.1) в более удобном для последующего виде:

$$B_{\alpha\beta} = 2(ee')^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{k\leqslant k_{\max}} \delta(\omega-\mathbf{kv})\delta(\omega-\mathbf{kv}')\frac{k_\alpha k_\beta\, d^3k\, d\omega}{k^4|\varepsilon(\omega,k)|^2}, \tag{47.4}$$

где теперь интегрирование производится по трехмерным (вместо двумерных) векторам $\mathbf{k}$. Две δ-функции в подынтегральном выражении обеспечивают равенство $\mathbf{kv} = \mathbf{kv}'$, т. е. поперечность $\mathbf{k}$ по отношению к $\mathbf{v}-\mathbf{v}'$. Интегрирование же по $d\omega$ заменяет аргумент ω в $\varepsilon(\omega,k)$ требуемым значением $\omega = \mathbf{kv} = \mathbf{kv}' = \mathbf{kV}$.

Обратим внимание на то, что множитель $|\varepsilon(\omega,k)|^{-2}$ в подынтегральном выражении в (47.4) обращается в бесконечность при тех значениях $\omega = \mathbf{kV}$ и $\mathbf{k}$, для которых $\varepsilon(\omega,k) = 0$, т. е. при значениях, отвечающих закону дисперсии продольных плазменных волн. Эти значения $\mathbf{k}$ могут внести большой вклад в интеграл столкновений. Физически этот вклад можно описать как результат взаимодействия между частицами, осуществляемого путем

---

[1]) Формальный вывод этого интеграла будет дан в конце § 51.

испускания и поглощения ими плазменных волн. Эффект, однако, будет значительным, лишь если в плазме имеется достаточно много частиц, скорости которых сравнимы с фазовой скоростью волн $v_{\text{ф}} = \omega/k$ или превышают ее (только для таких частиц может выполняться требуемое соотношение $\omega = \mathbf{kV}$).

Рассмотрим плазму, в которой электроны и ионы имеют каждый свою температуру T_e и T_i. При $T_e \approx T_i$ в плазме могут распространяться (без заметного затухания) только электронные плазменные волны, фазовая скорость которых $v_{\text{ф}} \gg v_{Te}$; число электронов, могущих «обмениваться» волнами в этом случае, следовательно, экспоненциально мало.

Если же $T_e \gg T_i$, то в плазме могут распространяться также и ионно-звуковые волны, фазовая скорость которых удовлетворяет неравенствам

$$v_{Ti} \ll \frac{\omega}{k} \ll v_{Te}. \tag{47.5}$$

Эти волны могут дать существенный вклад в интеграл столкновений между электронами (*В.П. Силин*, 1962).

Выделим из электрон-электронных величин $B_{\alpha\beta}^{(ee)}$ часть, связанную с этим эффектом; обозначим ее через $B_{\alpha\beta}^{(\text{пл})}$. Она возникает от области интегрирования в (47.4), лежащей в окрестности корня уравнения $\varepsilon(\omega, k) = 0$, отвечающего закону дисперсии ионно-звуковых волн. Сам по себе этот корень $\omega(k)$ комплексен с малой мнимой частью (коэффициент затухания волны); когда ω пробегает вещественные значения в области интегрирования, вещественная часть функции $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$ проходит через нуль, а мнимая остается малой. Имея в виду формулу (30.9), представим множитель $|\varepsilon|^{-2}$ в подынтегральном выражении в (47.4) в виде

$$\frac{1}{|\varepsilon|^2} = \frac{1}{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2} = \frac{\pi}{|\varepsilon''|}\,\delta(\varepsilon').$$

Для электрон-электронного интеграла столкновений скорости $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}'$ в (47.4) относятся к электронам, а в силу неравенства $\omega \ll k v_{Te}$ в аргументах обеих δ-функций можно опустить члены ω. Таким образом, интересующая нас часть $B_{\alpha\beta}^{(ee)}$ принимает вид

$$B_{\alpha\beta}^{(\text{пл})} = 2\pi e^4 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int \delta(\mathbf{kv})\delta(\mathbf{kv}')\delta(\varepsilon') \frac{k_\alpha k_\beta \, d^3k \, d\omega}{k^4 |\varepsilon''(\omega, k)|}, \tag{47.6}$$

причем интегрирование по d^3k производится (при заданном ω) по области (47.5).

Преобразуем интеграл по d^3k к новым переменным

$$\varkappa = \mathbf{kn}, \quad k_1 = \mathbf{kv}, \quad k_2 = \mathbf{kv}',$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении $[\mathbf{vv}']$. Прямым вычислением якобиана преобразования находим, что d^3k заменяется на

$$\frac{d\varkappa\, dk_1\, dk_2}{|[\mathbf{vv}']|}.$$

Интегрирование по $dk_1\, dk_2$ устраняет δ-функции (в силу которых $k_1 = k_2 = 0$), после чего будет $\mathbf{k} = \varkappa\mathbf{n}$. Переменная $\varkappa$ пробегает как положительные, так и отрицательные значения; условившись интегрировать только по положительным значениям, пишем

$$B_{\alpha\beta}^{(\text{пл})} = \frac{2\pi e^4 n_\alpha n_\beta}{|[\mathbf{vv}']|}\cdot 2\int\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\delta[\varepsilon'(\omega,\varkappa)]}{\varkappa^2|\varepsilon''(\omega,\varkappa)|}\,d\omega\, d\varkappa. \tag{47.7}$$

Диэлектрическая проницаемость двухтемпературной плазмы в области ионно-звуковых волн (47.5) дается формулами [1])

$$\begin{aligned} \varepsilon' &= 1 - \frac{\Omega_i^2}{\omega^2} + \frac{1}{k^2 a_e^2}, \\ \varepsilon'' &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega}{k^3}\left\{\frac{\Omega_e^2}{v_{Te}^3} + \frac{\Omega_i^2}{v_{Ti}^3}\exp\left(-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Ti}^2}\right)\right\}. \end{aligned} \tag{47.8}$$

Главный вклад в интеграл по $d\varkappa$ в (47.7) вносит (как это будет подтверждено дальнейшим вычислением) область $a_e\varkappa \gg 1$; поэтому последним членом в $\varepsilon'(\omega,\varkappa)$ можно пренебречь. Заметив, что

$$\delta\left(1 - \frac{\Omega_i^2}{\omega^2}\right) = \frac{\Omega_i}{2}[\delta(\omega - \Omega_i) + \delta(\omega + \Omega_i)];$$

и выполнив в (47.7) интегрирование по $d\omega$, находим

$$B_{\alpha\beta}^{(\text{пл})} = n_\alpha n_\beta \frac{4\pi e^4 \Omega_i}{|[\mathbf{vv}']|}\int\frac{d\varkappa}{\varkappa^2\varepsilon''(\Omega_i,\varkappa)},$$

или, подставив выражение для ε'' и введя переменную $\xi = \varkappa^2 a_i^2$:

$$B_{\alpha\beta}^{(\text{пл})} = n_\alpha n_\beta \frac{2\sqrt{2\pi}\, e^4 v_{Te} a_e^2}{|[\mathbf{vv}']| a_i^2}\int\frac{d\xi}{1 + \exp\left(-1/(2\xi) + L_1/2\right)}, \tag{47.9}$$

где

$$L_1 = \ln\frac{\Omega_i^4 v_{Te}^6}{\Omega_e^4 v_{Ti}^6} = \ln\frac{z^2 M T_e^3}{m T_i^3}. \tag{47.10}$$

[1]) См. (33.3). В (47.8) учтен также и ионный вклад в ε''. Хотя в области (47.5) он экспоненциально мал, но им определяется область интегрирования в интеграле (47.9) ниже.

В силу условий (47.5), интегрирование в (47.9) должно производиться по области $\left(\frac{\Omega_i a_i}{\Omega_e a_e}\right)^2 \ll \xi \ll 1$. Поскольку интеграл сходится на малых ξ, нижний предел можно положить равным нулю.

При $L_1 \to \infty$ интеграл в (47.9) стремится к нулю; предполагая L_1 достаточно большим, вычислим его в логарифмическом приближении, т. е. ограничившись лишь первым членом разложения по $1/L_1$. Основной вклад в интеграл возникает от области, в которой можно пренебречь экспоненциальным членом в знаменателе. Для этого должно быть $-1/(2\xi)+L_1/2 > 1$, т. е. интеграл надо брать в пределах от 0 до $1/(L_1-1) \approx 1/L_1$, что дает просто $1/L_1$ [1]). Таким образом, окончательно имеем

$$B_{\alpha\beta}^{(\text{пл})} = n_\alpha n_\beta \frac{2\sqrt{2\pi}\, e^4 z v_{Te} T_e}{|[\mathbf{v}\mathbf{v}']| T_i L_1}. \tag{47.11}$$

Полное значение величин $B_{\alpha\beta}^{(ee)}$ в электрон-электронном интеграле столкновений получается сложением (47.11) с обычным кулоновским выражением (41.8), причем в аргументе кулоновского логарифма L дебаевский радиус

$$a = (a_e^{-2} + a_i^{-2})^{-1/2} \approx a_i.$$

Вклад плазменных волн (47.11) становится преобладающим при

$$\frac{zT_e}{T_i L L_1} \gg 1. \tag{47.12}$$

§ 48. Поглощение в плазме в высокочастотном пределе

Область частот, в которой справедлива формула (44.9) для мнимой части диэлектрической проницаемости плазмы, ограничена неравенствами $\Omega_e \gg \omega \gg \nu_{ei}$; левое неравенство есть общее условие применимости интеграла столкновений с экранированным кулоновским взаимодействием. Рассмотрим теперь обратный по отношению к последнему условию предельный случай, когда

$$\omega \gg \Omega_e. \tag{48.1}$$

Сразу же отметим, что в этом случае вещественная часть проницаемости, ε', заведомо близка к 1, а мнимая часть, ε'', мала.

---

[1]) В существенной для интеграла области $\xi \sim 1/L_1$, т. е. $\varkappa \sim 1/(a_i L_1^{1/2})$. При этом

$$\varkappa a_e \sim \frac{a_e}{a_i L_1^{1/2}} \sim \left(\frac{T_e}{T_i L_1}\right)^{1/2} \gg 1$$

в соответствии со сделанным выше предположением.

К диссипации энергии внешнего переменного поля приводят ei-столкновения, длительность которых порядка или меньше периода поля. Это значит, что при $\omega \gg \Omega_e$ будут существенны столкновения, происходящие на расстояниях $\sim v_{Te}/\omega \ll v_{Te}/\Omega_e = a_e$. На таких расстояниях кулоновское поле ионов уже не экранировано и, таким образом, столкновения приобретают чисто двухчастичный характер (а не многочастичный, каковыми по существу являются столкновения с экранированным взаимодействием). В этих условиях микроскопические акты поглощения энергии поля становятся процессами, обратными к тормозному излучению при парных столкновениях заряженных частиц. Это обстоятельство позволяет с помощью принципа детального равновесия выразить ε'' через сечение тормозного излучения (*В.Л. Гинзбург*, 1949).

Диссипация Q энергии электромагнитного поля в единице объема среды за единицу времени выражается через ε'' формулой (30.5). Чтобы связать эту величину с сечением тормозного излучения, примем, что поле создается монохроматической плоской волной, в которой плотность энергии равна

$$\mathcal{E} = \frac{\overline{E^2} + \overline{H^2}}{8\pi} = \frac{|\mathbf{E}|^2}{8\pi}$$

(в последнем выражении предполагается, что $\mathbf{E}$ выражено в комплексном виде — ср. примеч. на с. 159); ввиду близости диэлектрической проницаемости к единице полагаем здесь $\varepsilon = 1$. После этого формулу (30.5) можно записать в виде

$$Q = \omega\varepsilon''\mathcal{E}. \tag{48.2}$$

С другой стороны, диссипация равна разности между энергией $Q_{\text{погл}}$, поглощаемой при столкновениях электронов с ионами, и энергией, излучаемой в этих столкновениях. При этом подразумевается именно энергия $Q_{\text{вын}}$ вынужденного (а не спонтанного) излучения, приводящего к появлению фотонов, когерентных с исходным полем и в этом смысле неотличимых от него.

Запишем сечение спонтанного испускания фотона, т. е. обычного тормозного излучения, в виде

$$d\sigma_{\text{сп}} = \frac{w(\mathbf{p}', \mathbf{p})}{v}\delta(\varepsilon - \varepsilon' - \hbar\omega)\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,d^3p'. \tag{48.3}$$

Здесь $\mathbf{k}$ — волновой вектор фотона, $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$ — начальный и конечный импульсы электрона. Произведение $N_i v\, d\sigma_{\text{сп}}$ (где N_i — плотность числа ионов) есть вероятность излучения фотона электроном за единицу времени; функция $w(\mathbf{p}', \mathbf{p})$ зависит также и от поляризации испускаемого фотона. Проинтегрировав по направлениям $\mathbf{p}'$ и $\mathbf{k}$ и просуммировав по поляризациям фотона, получим дифференциальное (по частотам) сечение тормозного

излучения $d\sigma_\omega$; δ-функция в (48.3) устраняется интегрированием по $\varepsilon' = p'^2/(2m)$. Таким образом,

$$d\sigma_\omega = \frac{4m^2 v'}{\pi v c^3} \overline{w} \omega^2 \, d\omega,$$

где $\overline{w}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ — значение функции $w(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$, усредненной по направлениям $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$; это значение не зависит уже от поляризации фотона, и потому суммирование по последним сводится к умножению на 2. Введя «эффективное излучение» $\varkappa_\omega$ по определению

$$\hbar\omega \, d\sigma_\omega = \varkappa_\omega \, d\omega,$$

выразим отсюда $\overline{w}$ в виде

$$\overline{w} = \frac{\pi v c^3}{4m^2 v' \hbar \omega^3} \varkappa_\omega. \tag{48.4}$$

Сечение вынужденного излучения отличается от (48.3) лишь множителем $N_{\mathbf{ke}}$ — числом фотонов в квантовом состоянии с волновым вектором $\mathbf{k}$ и направлением поляризации $\mathbf{e}$ вдоль $\mathbf{E}$ (см. IV, § 44). Поэтому полная энергия вынужденного излучения равна

$$Q_{\text{вын}} = N_i \sum_{\mathbf{e}} \int N_{\mathbf{ke}} \hbar\omega w(\mathbf{p}', \mathbf{p}) f(\mathbf{p}) \delta(\varepsilon - \varepsilon' - \hbar\omega) \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \, d^3 p \, d^3 p',$$

где $f(\mathbf{p})$ — функция распределения электронов. Ниже будем считать эту функцию максвелловской, зависящей только от абсолютной величины p. Усреднив по направлениям $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$ и заметив, что ввиду монохроматичности поля

$$\sum_{\mathbf{e}} \int N_{\mathbf{ke}} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} = \frac{\mathcal{E}}{\hbar\omega},$$

перепишем $Q_{\text{вын}}$ в виде

$$Q_{\text{вын}} = N_i \mathcal{E} \int \overline{w} f(p) \delta(\varepsilon - \varepsilon' - \hbar\omega) \, d^3 p \, d^3 p'. \tag{48.5}$$

Аналогичным образом вычисляется энергия, поглощаемая при обратных переходах с изменением импульса электрона $\mathbf{p}' \to \mathbf{p}$ (неупругое рассеяние электрона в электромагнитном поле). При этом, согласно принципу детального равновесия, функции вероятности w, определяющие сечения прямого и обратного процессов, равны между собой. Поэтому для $Q_{\text{погл}}$ получается выражение, отличающееся от (48.5) лишь заменой функции распределения $f(p)$ на $f(p')$. Диссипация $Q = Q_{\text{погл}} - Q_{\text{вын}}$; сравнив это выражение с (48.2), получим

$$\varepsilon'' = \frac{N_i}{\omega} \int \overline{w} [f(p') - f(p)] \delta(\varepsilon - \varepsilon' - \hbar\omega) \, d^3 p \, d^3 p'. \tag{48.6}$$

Ограничимся частотами, для которых

$$\hbar\omega \ll T. \tag{48.7}$$

Тогда разность $p' - p$ мала и можно положить

$$f(p') - f(p) = -\frac{df}{d\varepsilon}\hbar\omega = \frac{\hbar\omega}{T}f(p),$$

а в остальных множителях $p = p'$. Подставив это в (48.6) и выразив $\overline{w}$ через $\varkappa_\omega$ согласно (48.4), находим окончательно следующее выражение для мнимой части проницаемости:

$$\varepsilon''(\omega) = N_i N_e \frac{\pi^2 c^3}{T\omega^3}\langle v\varkappa_\omega\rangle, \tag{48.8}$$

где угловые скобки означают усреднение по максвелловскому распределению электронов.

Применим эту формулу к двум предельным случаям — квазиклассическому и борновскому. В первом случае, т. е. при

$$\frac{ze^2}{\hbar v} \gg 1, \tag{48.9}$$

ограничим еще область частот $\omega \gg \Omega_e$ более узким интервалом

$$\frac{mv_{Te}^3}{ze^2} \gg \omega \gg \Omega_e \tag{48.10}$$

(слева стоит величина, обратная ко времени пролета электрона на таком расстоянии от иона, на котором угол рассеяния становится ~ 1); легко видеть, что из условий (48.9), (48.10) автоматически следует (48.7). В квазиклассическом случае эффективное излучение на частотах (48.10) при столкновении электрона с неподвижным ионом дается формулой

$$\varkappa_\omega = \frac{16z^2e^6}{3v^2c^3m^2}\ln\frac{2mv^3}{\gamma\omega ze^2}, \tag{48.11}$$

где $\gamma = e^C = 1,78\ldots$, C — постоянная Эйлера (см. II, (70.21)). Подставив в (48.8) и произведя усреднение, получим [1])

$$\varepsilon'' = \frac{4\sqrt{2\pi}}{3}\frac{ze^4N_e}{T^{3/2}m^{1/2}}\frac{\Omega_e^2}{\omega^3}\ln\frac{2^{5/2}T^{3/2}}{\gamma^{5/2}\omega ze^2m^{1/2}}. \tag{48.12}$$

---

[1]) При этом используется значение интеграла

$$\int_0^\infty e^{-x}\ln x\,dx = -C.$$

В борновском случае, т. е. при $\dfrac{ze^2}{\hbar v} \ll 1$, эффективное излучение на частотах $\hbar\omega \ll T$ дается формулой [1])

$$\varkappa_\omega = \frac{16z^2e^6}{3v^2c^3m^2}\ln\frac{2mv^2}{\hbar\omega}. \tag{48.13}$$

Вычисление по (48.8) приводит к выражению

$$\varepsilon'' = \frac{4\sqrt{2\pi}}{3}\frac{ze^4N_e}{m^{1/2}T^{3/2}}\frac{\Omega_e^2}{\omega^3}\ln\frac{4T}{\gamma\hbar\omega}, \tag{48.14}$$

отличающемуся от (44.9) лишь аргументом логарифма.

§ 49. Квазилинейная теория затухания Ландау

Изложенная в § 29–32 теория плазменных колебаний основана на решении кинетического уравнения в линейном приближении теории возмущений. Условие ее применимости состоит в малости поправки к функции распределения δf (29.2) по сравнению с невозмущенной функцией f_0:

$$\frac{e\mathbf{E}}{|\mathbf{kv}-\omega|}\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} \ll f_0. \tag{49.1}$$

Для слабозатухающих плазменных колебаний с частотой $\approx \Omega_e$ и волновым вектором $k \ll \Omega_e/v_{Te}$ необходимо, таким образом, чтобы было

$$\frac{eE}{\Omega_e}\frac{\partial f_0}{\partial p} \ll f_0.$$

Для максвелловской плазмы это условие (после возведения обеих его частей в квадрат) можно записать так:

$$\frac{E^2}{4\pi} \ll N_eT_e. \tag{49.2}$$

В таком виде оно имеет простой физический смысл: плотность энергии волнового поля должна быть много меньше плотности кинетической энергии электронов плазмы.

Условие (49.2) обеспечивает малость поправки δf для основной массы электронов. Но и при его выполнении существует относительно небольшое число частиц, для которых условие (49.1) может нарушаться, — частицы, движущиеся почти в фазе с волной ($\mathbf{kv} \approx \omega$) и тем самым принимающие участие в затухании

[1]) См. IV, (92.16). При переходе от этой формулы к (48.14) учтено также, что при $\hbar\omega \ll T = mv_{Te}^2$ электрон теряет при излучении лишь малую часть своей энергии.

Ландау (*резонансные* частицы); даже слабое поле может существенно изменить их функцию распределения. Это изменение будет нелинейным эффектом, и потому его характер существенно зависит от спектрального (по ω и по $\mathbf{k}$) состава волнового поля; дело в том, что лишь в линейном приближении различные фурье-компоненты поля независимы в своем воздействии на частицы.

Мы будем рассматривать здесь электромагнитные возмущения в плазме, представляющие собой совокупность плазменных волн с волновыми векторами, пробегающими непрерывный ряд значений в некотором интервале $\Delta\mathbf{k}$.

Если начальное возмущение содержит широкий спектр волновых векторов $k \sim \Omega_e/v_{Te}$, то затухание Ландау распространяется на большое число электронов, находящихся (в смысле воздействия на них поля) в одинаковых условиях. В результате искажение функции распределения окажется относительно малым при всех скоростях; линейная теория (при условии (49.2)) будет, следовательно, применима для всего хода эволюции возмущения.

Напротив, если возмущение содержит волновые векторы лишь в узком интервале $\Delta\mathbf{k}$ вокруг некоторого значения k_0, для которого $k_0 \ll \Omega_e/v_{Te}$, то резонансный интервал скоростей электронов

$$|\Delta\mathbf{v}| \sim \Delta\frac{\Omega_e}{k} \sim \frac{v_0}{k_0}|\Delta\mathbf{k}|, \qquad \mathbf{v}_0 = \frac{\Omega_e}{k_0}\frac{\mathbf{k}_0}{k_0} \tag{49.3}$$

тоже мал и расположен вокруг значения $v_0 \gg v_{Te}$. В затухании Ландау будет, следовательно, участвовать сравнительно небольшое число электронов и их функция распределения может в результате сильно измениться.

Количественную теорию этого явления мы изложим для случая, когда возмущение представляет собой почти монохроматическую волну, амплитуда и фаза которой модулированы в пространстве по некоторому статистическому закону. Спектр значений $\mathbf{k}$ начального возмущения узок,

$$\frac{|\Delta\mathbf{k}|}{k_0} \ll 1, \tag{49.4}$$

но и в то же время

$$\frac{|\Delta\mathbf{k}|}{k} \gg \frac{1}{v_0}\left(\frac{e|\varphi_0|}{m}\right)^{1/2}, \tag{49.5}$$

где φ_0 — порядок величины амплитуды потенциала электрического поля волн (смысл этого условия выяснится ниже); отметим, что в силу (49.2) (где $E \sim k\varphi_0$) выражение в правой части неравенства (49.5) мало: $\dfrac{e|\varphi_0|}{mv_0^2} \ll 1$. Мы будем также считать поле в среднем однородным по всему объему плазмы; это значит,

что квадрат $\mathbf{E}^2$, усредненный по статистическому распределению фаз и интенсивностей волн, не зависит от координат (такое усреднение эквивалентно усреднению по участкам пространства с размерами $\Delta x \gg 1/|\Delta\mathbf{k}|$).

Представим поле $\mathbf{E}$ в начальный момент времени в виде интеграла Фурье:

$$\mathbf{E} = \int \mathbf{E}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kr}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \tag{49.6}$$

где в силу условия вещественности $\mathbf{E}_{-\mathbf{k}} = \mathbf{E}^*_{\mathbf{k}}$. Предположение (49.4) о характере начального возмущения означает, что интегрирование в (49.6) фактически ведется лишь в окрестностях точек $\mathbf{k} = \pm\mathbf{k}_0$. Условие же пространственной однородности возмущения легко сформулировать, написав квадратичный тензор $E_\alpha E_\beta$ в виде двойного интеграла:

$$E_\alpha E_\beta = \iint E_{\mathbf{k}\alpha} E_{\mathbf{k}'\beta} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\mathbf{r}} \frac{d^3k\, d^3k'}{(2\pi)^6}.$$

После усреднения по статистическому распределению, это выражение должно оказаться не зависящим от $\mathbf{r}$[1]. Для этого среднее значение $\langle E_{\mathbf{k}\alpha} E_{\mathbf{k}'\beta}\rangle$ должно содержать δ-функцию $\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}')$. Имея также в виду продольность плазменных волн, напишем

$$\langle E_{\mathbf{k}\alpha} E_{\mathbf{k}'\beta}\rangle = (2\pi)^3 \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} (\mathbf{E}^2)_{\mathbf{k}} \delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'). \tag{49.7}$$

Это соотношение надо рассматривать как определение величин, обозначенных здесь символически через $(\mathbf{E}^2)_{\mathbf{k}}$. Отметим, что эти величины вещественны. Выражение (49.7) отлично от нуля лишь при $\mathbf{k} = -\mathbf{k}'$ и симметрично по отношению к перестановкам $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$. Поэтому $(\mathbf{E}^2)_{\mathbf{k}} = (\mathbf{E}^2)_{-\mathbf{k}}$, а перемена знака $\mathbf{k}$ эквивалентна комплексному сопряжению. Средний квадрат $\langle\mathbf{E}^2\rangle$ выражается через эти величины согласно

$$\langle\mathbf{E}^2\rangle = \int (\mathbf{E}^2)_{\mathbf{k}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}. \tag{49.8}$$

Интегрирование в (49.6), а потому и в (49.8), производится, как уже указывалось, по окрестностям точек $\mathbf{k}_0$ и $-\mathbf{k}_0$. Удоб-

[1]) Для возмущений рассматриваемого типа интегралы $\mathbf{E}_{\mathbf{k}} = \int \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{kr}}\, dx^3$ фактически расходятся, поскольку $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ не исчезает на бесконечности. Это обстоятельство, однако, несущественно для формальных выводов, имеющих дело с заведомо конечными средними квадратами.

нее, однако, исключить из рассмотрения вектор $-\mathbf{k}_0$, представив (49.6) в виде

$$\mathbf{E} = \int\limits_{\mathbf{k}\approx\mathbf{k}_0} \mathbf{E}_\mathbf{k} e^{i\mathbf{kr}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} + \text{к.с.}, \tag{49.9}$$

где интегрирование производится уже только по окрестности точки $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$, а к.с. означает комплексно-сопряженное выражение. Соответственно (49.8) запишется как

$$\langle \mathbf{E}^2 \rangle = 2 \int\limits_{\mathbf{k}\approx\mathbf{k}_0} (\mathbf{E}^2)_\mathbf{k} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \tag{49.10}$$

а соотношения (49.7) — в виде

$$\begin{aligned} &\langle E_{\mathbf{k}\alpha} E^*_{\mathbf{k}'\beta} \rangle = (2\pi)^3 (\mathbf{E}^2)_\mathbf{k} \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\, \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \\ &\langle E_{\mathbf{k}\alpha} E_{\mathbf{k}'\beta} \rangle = 0. \end{aligned} \tag{49.11}$$

Дальнейшая эволюция возмущения (49.9) со временем представится выражением

$$\mathbf{E} = \int\limits_{\mathbf{k}\approx\mathbf{k}_0} e^{i(\mathbf{kr} - \omega t)} \mathbf{E}_\mathbf{k}(t) \frac{d^3k}{(2\pi)^3} + \text{к.с.}, \tag{49.12}$$

где $\omega(\mathbf{k}) \approx \Omega_e$ — частота плазменных волн, а коэффициенты $\mathbf{E}_\mathbf{k}(t)$ медленно меняются за счет затухания Ландау. В аналогичном виде представим и функцию распределения электронов

$$f = f_0(t, \mathbf{p}) + \left\{ \int\limits_{\mathbf{k}\approx\mathbf{k}_0} f_\mathbf{k}(t, \mathbf{p}) e^{i(\mathbf{kr} - \omega t)} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} + \text{к.с.} \right\}. \tag{49.13}$$

Выражение в фигурных скобках представляет собой быстро осциллирующую в пространстве и времени «хаотическую» часть изменения функции распределения; она исчезает при статистическом усреднении волн. Член же $f_0(t, \mathbf{p})$ — медленно меняющееся, усредненное распределение [1]).

Наша цель состоит в получении системы уравнений, определяющих эволюцию усредненных характеристик состояния плазмы — функций $(\mathbf{E}^2)_\mathbf{k}$ и $f_0(t, \mathbf{p})$. Для того чтобы такая система могла быть замкнутой, эти характеристики должны охватывать собой все электроны, участвующие в интересующих нас нелинейных эффектах. Для этого в свою очередь интервал скоростей (49.3), отвечающий разбросу волновых векторов $\Delta\mathbf{k}$, во

[1]) Не смешивать его с равновесным максвелловским распределением!

всяком случае должен широко перекрывать амплитуду колебаний скорости электронов под влиянием поля резонансных с ними волн. Именно это условие и выражается неравенством (49.5); $(e|\varphi_0|/m)^{1/2}$ — порядок величины указанной амплитуды. Действительно, в системе координат, движущейся с фазовой скоростью волны, поле последней статично и представляет собой последовательность потенциальных горбов с высотой $|\varphi_0|$. В этой системе резонансный электрон совершает колебания между двумя горбами, причем его скорость меняется в интервале между $\pm(2e|\varphi_0|/m)^{1/2}$.

Одно из уравнений, связывающих $(\mathbf{E}^2)_\mathbf{k}$ с f_0, выражает собой затухание Ландау каждой из фурье-компонент поля:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{E}^2)_\mathbf{k} = -2\gamma_\mathbf{k}(\mathbf{E}^2)_\mathbf{k}, \tag{49.14}$$

где

$$\gamma_\mathbf{k} = 2\pi^2 e^2 \Omega_e \int \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} \frac{\mathbf{k}}{k^2} \delta(\omega - \mathbf{kv})\, d^3p \tag{49.15}$$

есть, согласно (32.6) и (30.1), амплитудный коэффициент затухания волн; множитель 2 в правой части уравнения (49.14) связан с квадратичностью величины $(\mathbf{E}^2)_\mathbf{k}$.

Второе уравнение получим, исходя из кинетического уравнения бесстолкновительной плазмы:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - e\mathbf{E}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0. \tag{49.16}$$

Применим его сначала в линейном приближении к отдельной фурье-компоненте возмущения. В последнем члене уравнения, уже содержащем малую величину $\mathbf{E}_\mathbf{k} e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}$, полагаем $f \approx f_0$. В первом же пренебрегаем медленной зависимостью $f_\mathbf{k}$ от t. В результате получим для $f_\mathbf{k}$ обычное выражение

$$f_\mathbf{k} = \frac{i e \mathbf{E}_\mathbf{k}}{\omega - \mathbf{kv}} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}}, \tag{49.17}$$

причем, как всегда, в дальнейших интегрированиях надо понимать ω как $\omega + i0$.

Далее подставим в (49.16) полные выражения $\mathbf{E}$ и f в виде (49.12) и (49.13) (с $f_\mathbf{k}$ из (49.17)) и произведем усреднение по статистическому распределению волн с помощью (49.11). Все линейные по возмущению члены при этом исчезают, квадратичные же члены определят производную $\partial f_0/\partial t$ в виде

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = e^2 \frac{\partial f_0}{\partial p_\beta} \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \int\limits_{\mathbf{k}\approx\mathbf{k}_0} \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} (\mathbf{E}^2)_\mathbf{k} \left[\frac{i}{\omega - \mathbf{kv} + i0} - \frac{i}{\omega - \mathbf{kv} - i0}\right] \frac{d^3k}{(2\pi)^3}.$$

Заменив разность в квадратных скобках, согласно (29,8), на $2\pi\delta(\omega - \mathbf{kv})$, получим окончательно

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial p_\alpha}\left(D^{(\text{н})}_{\alpha\beta}\frac{\partial f_0}{\partial p_\beta}\right), \qquad (49.18)$$

где

$$D^{(\text{н})}_{\alpha\beta}(\mathbf{p}) = 2\pi e^2 \int\limits_{\mathbf{k}\approx\mathbf{k}_0} (\mathbf{E}^2)_{\mathbf{k}} \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\delta(\omega - \mathbf{kv})\frac{d^3k}{(2\pi)^3}. \qquad (49.19)$$

Уравнения (49.14) и (49.18) составляют искомую полную систему. Основанную на этих уравнениях теорию плазменных волн называют *квазилинейной* [1]).

Уравнение (49.18) имеет вид уравнения диффузии в пространстве скоростей, причем $D^{(\text{н})}_{\alpha\beta}$ играет роль тензора коэффициентов диффузии (индекс (н) напоминает о том, что эта «диффузия» связана с эффектами нелинейности). Эти коэффициенты как функции скорости электронов отличны от нуля в интервале $\Delta\mathbf{v}$ вблизи $\mathbf{v}_0$, связанном с разбросом $\Delta\mathbf{k}$ согласно (49.3). В этой области скоростей и будет происходить диффузия и соответственно возникает искажение функции распределения (остающейся максвелловской для всей остальной массы электронов). Характер этого искажения очевиден из общих свойств всяких диффузионных процессов: диффузия приводит к сглаживанию, т. е. в данном случае — к возникновению в «хвосте» функции $f_0(p)$ (при $v \approx v_0 \gg v_{Te}$) плато ширины $\sim \Delta v$, как это изображено схематически на рис. 13. Отметим, что при таком характере искажения изменяется главным образом производная $\partial f_0/\partial p$, а само значение f_0 остается близким к максвелловскому.

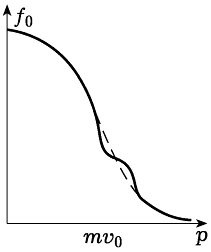


Рис. 13

Оценим время релаксации этого процесса, $\tau_{\text{н}}$. Поскольку речь идет о выравнивании на интервале $\Delta p = m\Delta v$, то

$$\tau_{\text{н}} \sim \frac{m^2(\Delta v)^2}{D^{(\text{н})}}. \qquad (49.20)$$

Для оценки коэффициента диффузии замечаем, что согласно (49.10) $(\mathbf{E}^2)_{\mathbf{k}}\left(\frac{\Delta k}{2\pi}\right)^3 \sim \langle\mathbf{E}^2\rangle$. Наличие же в подынтегральном вы-

[1]) Она была развита *А.А. Веденовым, Е.П. Велиховым* и *Р.З. Сагдеевым* (1961). Уравнения (49.14), (49.18) были независимо сформулированы также *Ю.А. Романовым* и *Г.Ф. Филипповым* (1961) и *Драммондом* и *Пайнсом* (*W.E. Drummond, D. Pines*, 1961).

ражении в (49.19) δ-функции эквивалентно, по порядку величины, умножению интеграла на $1/(v_0 \Delta k)$. Таким образом,

$$D^{(\text{н})} \sim \frac{e^2 \langle \mathbf{E}^2 \rangle}{v_0 \Delta k} \sim \frac{e^2 \langle \mathbf{E}^2 \rangle}{k_0 \Delta v}. \tag{49.21}$$

Наконец, выразив $\langle \mathbf{E}^2 \rangle$ через амплитуду φ_0 колебаний потенциала ($\sim k^2 |\varphi_0|^2$) и подставив (49.21) в (49.20), найдем [1])

$$\tau_{\text{н}} \sim \frac{(\Delta v)^3}{k_0 (e|\varphi_0|/m)^2}. \tag{49.22}$$

В изложенном рассмотрении подразумевается, конечно, что время $\tau_{\text{н}}$ мало по сравнению со временем затухания Ландау: $\tau_{\text{н}} \ll 1/\gamma$; в противном случае волны затухнут, прежде чем успеют проявиться эффекты нелинейности. В то же время применимость уравнения (49.14) предполагает малость времени $1/\gamma$ по сравнению со временем свободного пробега электронов: $1/\gamma \ll 1/\nu_e$, где ν_e — средняя частота столкновений. Последнее условие, однако, не гарантирует еще законности пренебрежения столкновениями в рассматриваемом явлении (т. е. законности использования здесь кинетического уравнения в виде (49.16)): для конкуренции с нелинейными эффектами существенно не общее время столкновительной релаксации, а лишь время столкновительной релаксации в интервале скоростей Δv; обозначим его как $\tau_{\text{ст}}$.

Поскольку речь идет о релаксации в интервале Δv, расположенном вблизи значения $v_0 \gg v_{Te}$ и в котором содержится лишь относительно малая доля всех электронов, то ситуация аналогична той, с которой мы имели дело в задаче об убегающих электронах. Процесс представляет собой диффузию в импульсном пространстве с коэффициентом диффузии

$$D^{(\text{ст})} = m^2 \nu_{ee}(v) v_{Te}^2 = \frac{4\pi e^4 L N_e T_e}{m v^3} \approx \frac{m^2 \nu_{ee}(v_{Te}) v_{Te}^5}{v^3} \tag{49.23}$$

(коэффициент при $\partial f/\partial p$ в плотности потока в импульсном пространстве (45.5)).

Искомое время столкновительной релаксации в интервале Δv отличается от (49.20) заменой $D^{(\text{н})}$ на $D^{(\text{ст})}$:

$$\tau_{\text{ст}} \sim \frac{m^2 (\Delta v)^2}{D^{(\text{ст})}} \sim \frac{(\Delta v)^2}{v_{Te}^2 \nu_{ee}(v_{Te})} \left(\frac{v_0}{v_{Te}} \right)^3. \tag{49.24}$$

---

[1]) При $\Delta v \sim (e|\varphi_0|/m)^{1/2}$, когда изложенная теория уже, строго говоря, неприменима (знак $\sim$ вместо знака $\gg$ в (49.5)), эта оценка дает $\tau_{\text{н}} \sim k_0^{-1} (m/e|\varphi_0|)^{1/2}$. Именно этот результат и следовало ожидать, когда разброс резонансных скоростей Δv совпадает с амплитудой скорости электронов при их колебаниях в поле волны: по порядку величина $\tau_{\text{н}}$ совпадает с периодом этих колебаний.

При
$$\tau_{\text{н}} \gg \tau_{\text{ст}} \tag{49.25}$$
(т. е. $D^{(\text{н})} \ll D^{(\text{ст})}$) нелинейные эффекты не играют роли: столкновения успевают поддерживать максвелловское распределение вблизи $\mathbf{v}_0$, несмотря на возмущение от волнового поля; соответственно коэффициент затухания Ландау будет даваться обычным выражением, отвечающим максвелловскому значению производной $\partial f_0/\partial \mathbf{p}$ в окрестности $\mathbf{v}_0$. Таким образом, неравенство (49.25) есть условие применимости строго линейной теории затухания Ландау. Напомним в то же время, что излагаемая квазилинейная теория справедлива при гораздо более слабом условии (49.2). Условие (49.25) можно представить в виде
$$\frac{E^2}{4\pi} \ll N_e T_e \left[\sqrt{4\pi}\, L\eta^{3/2} \left(\frac{v_{Te}}{v_0}\right)^3 \frac{\Delta v}{v_0}\right],$$
где $\eta = e^2 N^{1/3}/T$ — параметр газовости. Малость множителя, заключенного в квадратные скобки, демонстрирует слабость условия (49.2) по сравнению с (49.25).

В обратном предельном случае, при $\tau_{\text{н}} \ll \tau_{\text{ст}}$, нелинейные эффекты приводят к сильному уменьшению производной $\partial f_0/\partial p$ в указанной области, грубо говоря, в отношении $D^{(\text{ст})}/D^{(\text{н})}$. Соответственно уменьшается коэффициент затухания Ландау.

§ 50. Кинетическое уравнение для релятивистской плазмы

Если скорости частиц (электронов) в плазме не малы по сравнению со скоростью света, кинетическое уравнение должно быть записано с учетом релятивистских эффектов (*С. Т. Беляев, Г. И. Будкер*, 1956).

Покажем предварительно, что функция распределения в фазовом пространстве, $f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$, является релятивистски инвариантной величиной. Для этого заметим, что пространственная плотность частиц и плотность их потока, т. е. интегралы
$$N = \int f\, d^3p, \qquad \mathbf{i} = \int \mathbf{v} f\, d^3p,$$
должны составлять 4-вектор $i^k = (cN, \mathbf{i})$ (ср. II, § 28)[1]. Имея в виду, что в релятивистской механике скорость частицы с импульсом $\mathbf{p}$ и энергией ε есть $\mathbf{v} = \mathbf{p}c^2/\varepsilon$, можно записать этот

[1]) В этом параграфе латинскими буквами k, l обозначаются четырехмерные векторные индексы. Скалярное произведение двух 4-векторов a и b обозначается как $(ab) \equiv a_k b^k$.

4-вектор в виде

$$i^k = c^2 \int p^k f \frac{d^3p}{\varepsilon}, \tag{50.1}$$

где $p^k = (\varepsilon/c, \mathbf{p})$ — 4-импульс. Но выражение d^3p/ε является 4-скаляром (см. II, § 10). Ясно поэтому, что из 4-векторности интеграла (50.1) следует, что функция f — 4-скаляр [1]).

Переходя к выводу кинетического уравнения, замечаем, что произведенные в § 41 вычисления остаются в силе и в релятивистском случае вплоть до выражения (41.3), (41.4) для плотности потока в импульсном пространстве. Необходимо лишь вычислить заново величины

$$B_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \int q_\alpha q_\beta v_{\text{отн}}\, d\sigma. \tag{50.2}$$

Величина $\mathbf{v}_{\text{отн}}$ здесь — по-прежнему относительная скорость двух частиц. Напомним, однако, что в релятивистской механике она определяется как скорость одной частицы в системе покоя другой и, вообще говоря, не сводится к разности $\mathbf{v} - \mathbf{v}'$ (см. II, § 12).

Выясним, прежде всего, трансформационный характер этих величин. Произведение

$$v_{\text{отн}}\, d\sigma \cdot f f'\, d^3p\, d^3p'\, d^3x\, dt$$

есть число актов рассеяния, происходящих в объеме d^3x в течение времени dt между двумя частицами с импульсами в заданных интервалах d^3p и d^3p'; по своему определению это число есть инвариант. Переписав его в виде

$$\varepsilon\varepsilon' v_{\text{отн}}\, d\sigma \cdot f \cdot f' \cdot \frac{d^3p}{\varepsilon} \cdot \frac{d^3p'}{\varepsilon} \cdot d^3x\, dt$$

и заметив, что последние пять множителей (отделенных точками) инвариантны, заключаем, что и первый множитель, $\varepsilon\varepsilon' v_{\text{отн}}\, d\sigma$, есть инвариант. Отсюда в свою очередь следует, что интегралы

$$W^{kl} = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon' \int q^k q^l v_{\text{отн}}\, d\sigma \tag{50.3}$$

образуют симметричный 4-тензор. Величины же (50.2) связаны с пространственными компонентами этого 4-тензора согласно

$$B_{\alpha\beta} = \frac{W^{\alpha\beta}}{\varepsilon\varepsilon'}. \tag{50.4}$$

[1]) Функция же распределения по одним лишь импульсам, т. е. интеграл $f(t, \mathbf{p}) = \int f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})\, d^3x$, уже не является 4-скаляром (именно такая функция рассматривается в II, § 10).

Вычислим сначала 4-тензор (50.3) в системе отсчета, в которой одна из частиц (скажем, частица e) покоится. Релятивистское сечение резерфордовского рассеяния частиц e' на покоящихся (до столкновения) частицах e при малых углах рассеяния χ имеет вид[1])

$$d\sigma = \frac{4(ee')^2\varepsilon'^2}{p'^4\chi^4}\cdot 2\pi\chi\,d\chi. \tag{50.5}$$

Такое же вычисление, как при выводе (41.8), приводит к следующему выражению для пространственных компонент тензора (50.3):

$$W^{\alpha\beta} = 2\pi(ee')^2L(v'^2\delta_{\alpha\beta} - v'_\alpha v'_\beta)mc^2\frac{\varepsilon'}{v'^3}. \tag{50.6}$$

Остальные же компоненты надо считать равными нулю:

$$W^{00} = W^{0\alpha} = 0. \tag{50.7}$$

Действительно, изменение энергии частиц при столкновении (q^0) в рассматриваемой системе отсчета есть величина второго порядка по малому углу рассеяния; поэтому $W^{0\alpha}$ и W^{00} оказались бы величинами третьего или четвертого порядка малости, между тем как весь вывод интеграла столкновений производится лишь с точностью до величин второго порядка.

Из (50.6), (50.7) имеем

$$W_k^k = -W_\alpha^\alpha = -4\pi(ee')^2Lmc^2\frac{\varepsilon'}{v'}.$$

Этот 4-скаляр можно записать в инвариантном виде, заметив, что в системе покоя частицы e имеем

$$(uu') = \frac{\varepsilon'}{m'c^2}, \qquad \frac{[(uu')^2-1]^{1/2}}{(uu')} = \frac{v'}{c},$$

где $u^k = p^k/(mc)$, $u'^k = p'^k/(m'c)$ — 4-скорости обеих частиц. Поэтому

$$W_k^k = -4\pi(ee')^2Lmm'c^4\frac{(uu')^2}{c[(uu')^2-1]^{1/2}}. \tag{50.8}$$

Из (50.6), (50.7) находим также, что

$$W^{kl}u_l = W^{kl}u'_l = 0, \tag{50.9}$$

а ввиду релятивистски инвариантного вида этих равенств они справедливы и в любой системе отсчета.

---

[1]) Это выражение относится к рассеянию электронов как на электронах, так и на ионах. В первом случае оно получается из IV, (81.7), а во втором — из сечения рассеяния на неподвижном кулоновском центре IV, (80.7).

Выражение 4-тензора W^{kl}, справедливое в произвольной системе отсчета, должно, очевидно, быть симметричным по отношению к обеим частицам. Общий вид такого 4-тензора, зависящего только от 4-векторов u^k и u'^k, есть

$$W^{kl} = \alpha g^{kl} + \beta(u^k u^l + u'^k u'^l) + \delta(u^k u'^l + u'^k u^l),$$

где α, β, δ — скаляры. Определив последние из условий (50.8), (50.9), получим

$$W^{kl} = 2\pi(ee')^2 L \frac{mm'c^4(uu')^2}{c[(uu')^2-1]^{3/2}} \times \\ \times \left\{-[(uu')^2-1]g^{kl} - (u^k u^l + u'^k u'^l) + (uu')(u^k u'^l + u'^k u^l)\right\}. \tag{50.10}$$

Наконец, взяв пространственную часть этого 4-тензора в произвольной системе отсчета, получим окончательно следующее выражение для величин $B_{\alpha\beta}$, входящих в интеграл столкновений:

$$B_{\alpha\beta} = 2\pi(ee')^2 L \frac{\gamma\gamma'\left(1-\frac{\mathbf{v}\mathbf{v}'}{c^2}\right)^2}{c\left[\gamma^2\gamma'^2\left(1-\frac{\mathbf{v}\mathbf{v}'}{c^2}\right)^2-1\right]^{3/2}}\left\{\left[\gamma^2\gamma'^2\left(1-\frac{\mathbf{v}\mathbf{v}'}{c^2}\right)^2-1\right]\delta_{\alpha\beta} - \\ - \frac{\gamma^2}{c^2}v_\alpha v_\beta - \frac{\gamma'^2}{c^2}v'_\alpha v'_\beta + \frac{\gamma^2\gamma'^2}{c^2}\left(1-\frac{\mathbf{v}\mathbf{v}'}{c^2}\right)(v_\alpha v'_\beta + v'_\alpha v_\beta)\right\}, \tag{50.11}$$

где

$$\gamma = \frac{\varepsilon}{mc^2} = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}, \quad \gamma' = \frac{\varepsilon'}{m'c^2} = \left(1-\frac{v'^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

— лоренцевы множители для обеих частиц. Отметим, что, несмотря на свой более сложный (чем в нерелятивистском случае) вид, трехмерный тензор (50.11) по-прежнему удовлетворяет соотношениям

$$B_{\alpha\beta}v_\beta = B_{\alpha\beta}v'_\beta. \tag{50.12}$$

Для оценки кулоновского логарифма заметим, что в релятивистском случае имеет место борновская ситуация; $ze^2/(\hbar v) \sim ze^2/(\hbar c) \ll 1$. Поэтому для ee- и ei-столкновений

$$L \approx \ln\frac{pa}{\hbar} \approx \ln\frac{T_e a}{\hbar c}. \tag{50.13}$$

Для ii-столкновений надо заменить T_e на T_i (если ионы тоже релятивистские) или же пользоваться обычными нерелятивистскими выражениями.

Кинетическое уравнение с кулоновским интегралом столкновений имеет смысл до тех пор, пока резерфордовское рассеяние является главной причиной изменения импульса и энергии электрона. Конкурирующим процессом здесь является тормозное излучение (а при наличии в плазме заметного числа фотонов — также и эффект Комптона). Сечение (транспортное) резерфордовского рассеяния имеет порядок величины

$$\sigma_{\text{рез}} \sim z^2 \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \left(\frac{mc^2}{\varepsilon}\right)^2 L \sim z^2 \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \left(\frac{mc^2}{T_e}\right)^2 L. \tag{50.14}$$

Сечение же тормозного испускания фотонов с энергией $\hbar\omega \sim T_e$:

$$\sigma_{\text{торм}} \sim \frac{z^2}{137} \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \ln \frac{T_e}{mc^2} \tag{50.15}$$

(ср. IV, (93.17)). Эти сечения сравниваются при

$$\frac{T_e}{mc^2} \sim \left(\frac{137L}{\ln 137L}\right)^{1/2}.$$

Задачи

1. Найти скорость передачи энергии от электронов с температурой $T_e \gg mc^2$ к ионам с температурой $T_i \ll Mc^2$.

Решение. Вплоть до (42.3), произведенные в § 42 вычисления остаются в силе. Величины же $B_{\alpha\beta}^{(ei)}$ берем из (50.4), (50.6), положив $v' \approx c$:

$$B_{\alpha\alpha}^{(ei)} = 4\pi e^4 z^2 \frac{L}{c}.$$

В результате находим

$$\frac{dE_i}{dt} = -\frac{dE_e}{dt} = \left(1 - \frac{T_i}{T_e}\right) \frac{4\pi z^2 e^4 N_i N_e L}{Mc}.$$

Выразив энергию ультрарелятивистских электронов через их температуру согласно $E_e = 3T_eN_e$ (см. задачу в V, § 44), получим

$$\frac{dT_e}{dt} = -(T_e - T_i)\frac{4\pi z^2 e^4 N_i L}{3McT_e}.$$

2. Найти электропроводность релятивистской лоренцевой плазмы.

Решение. После пренебрежения ee-столкновениями и перехода к пределу $M \to \infty$, ход решения в релятивистском случае совпадает с решением нерелятивистской задачи в § 44. Для поправки к функции распределения в постоянном ($\omega = 0$) электрическом поле снова получается

$$\delta f = -\frac{e\mathbf{E}\mathbf{v}}{T_e \nu_{ei}(p)} f_0$$

(ср. (44.5)), с той лишь разницей, что частота столкновений определяется теперь релятивистским сечением резерфордовского рассеяния:

$$\nu_{ei}(p) = N_i v \sigma_t, \qquad \sigma_t \approx \int \frac{\chi^2}{2}\, d\sigma = \frac{4\pi z^2 e^4 L}{v^2 p^2}.$$

Вычислив ток как интеграл $-e\int \mathbf{v}\delta f\, d^3p$, получим для электропроводности

$$\sigma = \frac{\langle v^3p^2\rangle}{12\pi ze^2T_eL}.$$

В ультрарелятивистском случае $v \approx c$, $\langle p^2\rangle = 12(T_e/c)^2$, так что

$$\sigma = \frac{cT_e}{\pi ze^2L}.$$

§ 51. Флуктуации в плазме

Теория флуктуаций в плазме строится в принципе так же, как и в обычном газе (§ 19, 20). Разновременные корреляторы, например

$$\langle\delta f_a(t_1,\mathbf{r}_1,\mathbf{p}_1)\delta f_b(t_2,\mathbf{r}_2,\mathbf{p}_2)\rangle, \quad \langle\delta\varphi(t_1,\mathbf{r}_1)\delta f_a(t_2,\mathbf{r}_2,\mathbf{p}_2)\rangle$$

(φ — потенциал электрического поля; индексы a, b отличают сорта частиц), удовлетворяют при $t = t_1 - t_2 > 0$ той же системе уравнений — линеаризованных кинетического уравнения и уравнения Пуассона, что и функции распределения $\overline{f}_a$ и потенциал $\overline{\varphi}$. Для решения этой системы необходимо знать, в качестве начального условия, соответствующие одновременные корреляторы. Но в отличие от равновесного газа нейтральных частиц, в плазме имеется одновременная корреляция между положениями различных частиц, связанная с их кулоновским взаимодействием и простирающаяся на большое ($\sim a$) расстояние. В равновесном случае эта корреляция описывается корреляторами плотности, вычисленными в V, § 79. В неравновесных же случаях определение одновременных корреляторов является трудной задачей.

Эту трудность, однако, можно преодолеть в общем виде в случае бесстолкновительной плазмы. Заметим, что именно для бесстолкновительной плазмы задача о флуктуациях в стационарном неравновесном состоянии ставится в особенности естественным образом, поскольку в такой плазме в отсутствие внешнего поля любые функции распределения $\overline{f}_a(\mathbf{p})$, зависящие только от импульсов частиц, являются стационарным решением кинетического уравнения. Коррелятор флуктуаций относительно такого распределения, как и в равновесном случае, будет зависеть от координат двух точек и от двух моментов времени только через разности $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ и $t = t_1 - t_2$. Бесстолкновительность плазмы означает при этом, что рассматриваются времена t, малые по сравнению с $1/\nu$, где ν — эффективная частота столкновений. Излагаемый ниже метод применим именно в этих условиях; бесстолкновительность используется в нем с самого начала. Он основан на непосредственном усреднении произведений точных

флуктуирующих функций распределения $f_a(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ [1]).

Эти функции удовлетворяют уравнениям

$$\frac{df_a}{dt} = \frac{\partial f_a}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{r}} - e_a\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}}\frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}} = 0, \qquad (51.1)$$

где φ — точный потенциал электрического поля, удовлетворяющий уравнению

$$\Delta\varphi = -4\pi\sum_a e_a \int f_a\, d^3p. \qquad (51.2)$$

Уравнения (51.1) выражают собой аналог теоремы Лиувилля. Подчеркнем, что в этих точных уравнениях еще не пренебрежено столкновениями. Точные функции распределения

$$f_a(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = \sum \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)]\delta[\mathbf{p} - \mathbf{p}_a(t)] \qquad (51.3)$$

(суммирование по всем частицам сорта a) учитывают движение частиц по траекториям $\mathbf{r} = \mathbf{r}_a(t)$, являющимся точными решениями уравнений движения системы взаимодействующих частиц. Уравнения (51.1) легко проверить прямым дифференцированием выражений (51.3) с учетом уравнений движения частиц в самосогласованном поле.

Уравнения (51.1), (51.2) сами по себе довольно бесполезны; пользоваться функциями распределения в виде (51.3) — все равно, что следить за каждой частицей в отдельности. Если же усреднить их по физически бесконечно малым объемам [2]), получатся обычные кинетические уравнения. Положив $f_a = \overline{f}_a + \delta f_a$, $\varphi = \overline{\varphi} + \delta\varphi$ и усреднив уравнения (не производя при этом никаких пренебрежений!), получим

$$\frac{\partial \overline{f}_a}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial \overline{f}_a}{\partial \mathbf{r}} - e_a\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial \mathbf{r}}\frac{\partial \overline{f}_a}{\partial \mathbf{r}} = e_a\left\langle \frac{\partial \delta\varphi}{\partial \mathbf{r}}\frac{\partial \delta f_a}{\partial \mathbf{p}}\right\rangle, \qquad (51.4)$$

$$\Delta\overline{\varphi} = -4\pi\sum_a e_a \int \overline{f}_a\, d^3p. \qquad (51.5)$$

Правая часть в (51.4) есть интеграл столкновений [3]).

Вычтя (51.4), (51.5) из точных уравнений (51.1), (51.2), получим уравнения для флуктуирующих частей функций распреде-

[1]) Этот метод принадлежит *Ростокеру* (*N. Rostoker*, 1961) и *Ю.Л. Климонтовичу* и *В.П. Силину* (1962).

[2]) Или, что то же, по начальным условиям точной механической задачи, отвечающим заданному макроскопическому состоянию.

[3]) Мы еще вернемся к этому выражению в конце параграфа, а пока отметим лишь, что оно соответствует правой части уравнения (16.7) в случае, когда взаимодействие частиц — кулоновское.

ления и потенциала. При этом квадратичные по $\delta\varphi$ и δf_a члены в кинетическом уравнении описывают влияние столкновений на флуктуации. Пренебрегая этими членами и рассматривая пространственно-однородный случай, т. е. положив

$$\overline{f}_a = \overline{f}_a(\mathbf{p}), \quad \overline{\varphi} = 0, \tag{51.6}$$

получим уравнения

$$\frac{\partial \delta f_a}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial \delta f_a}{\partial \mathbf{r}} - e_a \frac{\partial \delta\varphi}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \overline{f}_a}{\partial \mathbf{p}} = 0, \tag{51.7}$$

$$\Delta\delta\varphi = -4\pi \sum_a e_a \int \delta f_a \, d^3p. \tag{51.8}$$

Эти уравнения позволяют выразить функции $\delta f_a(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ в произвольный момент времени t через их значения в некоторый начальный момент $t = 0$; тем самым оказывается возможным выразить и коррелятор

$$\langle \delta f_a(t_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1) \delta f_b(t_2, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2) \rangle \tag{51.9}$$

через его значение при $t_1 = t_2 = 0$. Это начальное значение коррелятора (обозначим его через $g_{ab}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$) есть в значительной степени (см. ниже) произвольная функция. Сразу же подчеркнем, что оно отнюдь не является тем одновременным коррелятором, нахождение которого (вместе с полным разновременным коррелятором) составляет нашу цель. Центральный пункт, обеспечивающий эффективность излагаемого метода, состоит в том, что при произвольном выборе функции g вычисленный таким образом коррелятор (51.9) с течением времени (t_1, t_2 порядка времени затухания Ландау) сведется к функции только от разности $t = t_1 - t_2$, не зависящей от выбора g. Тем самым задача будет решена: эта предельная функция и будет искомым разновременным коррелятором, а его значение при $t_1 - t_2 = 0$ — одновременным коррелятором.

Переходя к проведению указанной программы, введем компоненты разложения Фурье по координатам и одностороннего разложения Фурье по времени:

$$\delta f^{(+)}_{a\omega\mathbf{k}}(\mathbf{p}) = \int d^3x \int_0^\infty dt \cdot e^{-i(\mathbf{kr} - \omega t)} \delta f_a(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}), \tag{51.10}$$

и аналогично для $\varphi^{(+)}_{\omega\mathbf{k}}$. Умножив уравнения (51.7), (51.8) на $e^{-i(\mathbf{kr} - \omega t)}$ и интегрируя по dt от 0 до ∞ и по d^3x, получим

$$i(\mathbf{kv} - \omega)\delta f^{(+)}_{a\omega\mathbf{k}} - ie_a \mathbf{k} \frac{\partial \overline{f}_a}{\partial \mathbf{p}} \delta\varphi^{(+)}_{\omega\mathbf{k}} = \delta f_{a\mathbf{k}}(0, \mathbf{p}),$$

$$-k^2 \delta\varphi^{(+)}_{\omega\mathbf{k}} = 4\pi \sum_a e_a \int \delta f^{(+)}_{a\omega\mathbf{k}} \, d^3p. \tag{51.11}$$

С подобными уравнениями мы уже неоднократно встречались (ср. (34.10), (34.11)); из них находим

$$\delta\varphi^{(+)}_{\omega\mathbf{k}} = -\frac{4\pi}{k^2\varepsilon_l(\omega,k)}\sum_a e_a\int\frac{\delta f_{a\mathbf{k}}(0,\mathbf{p})}{i(\mathbf{kv}-\omega)}\,d^3p, \tag{51.12}$$

где ε_l — диэлектрическая проницаемость плазмы с распределением $\overline{f}(p)$ [1]). Перемножение таких двух выражений и статистическое усреднение дают

$$\langle\delta\varphi^{(+)}_{\omega\mathbf{k}}\delta\varphi^{(+)}_{\omega'\mathbf{k}'}\rangle = \frac{16\pi^2}{k^4\varepsilon_l(\omega,k)\varepsilon_l(\omega',k')}\times$$
$$\times\sum_{a,b}e_ae_b\int\frac{\langle\delta f_{a\mathbf{k}}(0,\mathbf{p})\delta f_{b\mathbf{k}'}(0,\mathbf{p}')\rangle}{i(\mathbf{kv}-\omega)i(\mathbf{k}'\mathbf{v}'-\omega')}\,d^3p\,d^3p'. \tag{51.13}$$

Среднее значение в числителе подынтегрального выражения связано с фурье-компонентой $g_{ab\mathbf{k}}(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2)$ «начального» коррелятора $g_{ab}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2,\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2)$ формулой

$$\langle\delta f_{a\mathbf{k}}(0,\mathbf{p})\delta f_{b\mathbf{k}'}(0,\mathbf{p}')\rangle = (2\pi)^3\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}')g_{ab\mathbf{k}}(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2)$$

(ср. (19.13)). Как и всякая одновременная корреляционная функция, начальный коррелятор должен содержать δ-функционный член, выражающий те случаи, когда всего одна частица находится в совпадающих элементах фазового пространства:

$$\delta_{ab}\overline{f}(p)\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\delta(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)$$

(см. (19.6)). Фурье-образ этого члена есть $\delta_{ab}\overline{f}(p)\delta(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)$. Таким образом, в (51.13) надо положить

$$\langle\delta f_{a\mathbf{k}}(0,\mathbf{p})\delta f_{b\mathbf{k}'}(0,\mathbf{p}')\rangle =$$
$$= (2\pi)^3\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}')[\delta_{ab}\overline{f}_a(p)\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')+\mu_{\mathbf{k}}(\mathbf{p},\mathbf{p}')], \tag{51.14}$$

где $\mu_{\mathbf{k}}(\mathbf{p},\mathbf{p}')$ есть произвольная гладкая (без особенностей при вещественных $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$) функция — фурье-образ некоторой функции $\mu(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2,\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2)$, стремящейся к нулю при $|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|\to\infty$.

[1]) Лишь для упрощения записи последующих формул будем считать, что функция $\overline{f}(p)$ изотропна, так что соответствующий ей тензор диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{\alpha\beta}$ сводится к скалярам ε_l и ε_t.

При подстановке в (51.13) член с этой произвольной функцией в (51.14) дает

$$\frac{4(2\pi)^5\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}')}{k^4\varepsilon_l(\omega,k)\varepsilon_l(\omega',k')}\sum_{a,b}\int\frac{\mu_{\mathbf{k}}(\mathbf{p},\mathbf{p}')\,d^3p\,d^3p'}{i(\mathbf{kv}-\omega)i(\mathbf{kv}'-\omega')}. \tag{51.15}$$

Покажем, что это выражение отвечает во временном представлении функции, быстро затухающей с увеличением t или t'.

Переход от лапласовского (см. примеч. на с. 173) образа $\langle\delta\varphi^{(+)}_{\omega\mathbf{k}}\delta\varphi^{(+)}_{\omega'\mathbf{k}'}\rangle$ к функции времени t_2 и $t_1=t_2+t$ осуществляется формулой обращения

$$\langle\delta\varphi_{\mathbf{k}}(t_1)\delta\varphi_{\mathbf{k}'}(t_2)\rangle=\int e^{-i\omega t_1-i\omega't_2}\langle\delta\varphi^{(+)}_{\omega\mathbf{k}}\delta\varphi^{(+)}_{\omega'\mathbf{k}'}\rangle\frac{d\omega\,d\omega'}{(2\pi)^2}, \tag{51.16}$$

где интегрирование производится по путям в плоскостях комплексных переменных ω и ω', проходящим выше всех особых точек подынтегрального выражения. Нас интересует асимптотика выражения (51.16) при $t_1,t_2\to\infty$. Для ее нахождения надо смещать контуры интегрирования вниз до тех пор, пока они не «зацепятся» за особые точки; так, особенность в точке $\omega=\omega_c$ приведет к асимптотической зависимости интеграла по $d\omega$ от времени вида $\exp(-i\omega_c t)$. Легко видеть, что выражение (51.15) имеет особенности лишь в нижних полуплоскостях ω или ω' (но не на вещественных осях этих переменных) и потому асимптотика интеграла (51.16) с (51.15) в качестве $\langle\delta\varphi^{(+)}_{\omega\mathbf{k}}\delta\varphi^{(+)}_{\omega'\mathbf{k}'}\rangle$ содержит только затухающие члены.

Рассмотрим, например, интеграл по ω. Множитель $1/\varepsilon_l(\omega,k)$ в (51.15) имеет полюсы в нулях функции $\varepsilon_l(\omega,k)$, расположенных лишь в нижней полуплоскости ω [1]. Таким же свойством обладает и интеграл по d^3p в (51.15). Действительно, этот интеграл имеет вид

$$\int\frac{\psi(z)\,dz}{z-\omega/k-i0},$$

где $z\equiv p_x$ — проекция вектора $\mathbf{p}$ на направление $\mathbf{k}$, причем (согласно предположенным свойствам функции $\mu_{\mathbf{k}}(\mathbf{p},\mathbf{p}')$) множитель $\psi(z)$ мог бы иметь особые точки лишь при комплексных значениях z. Интеграл такого вида был уже рассмотрен в конце § 29 и было показано, что он может иметь полюсы лишь в нижней полуплоскости ω.

[1] Подразумевается, что распределение $\bar{f}(p)$ отвечает устойчивому состоянию плазмы, так что плазменные волны затухают. Очевидно, что только в таком случае имеет вообще смысл постановка задачи о стационарных флуктуациях.

Таким образом, интересующая нас незатухающая часть коррелятора возникает только от вклада от первого члена в (51.14) в интеграл (51.13):

$$\langle \delta\varphi^{(+)}_{\omega\mathbf{k}} \delta\varphi^{(+)}_{\omega'\mathbf{k}'} \rangle =$$
$$= -\frac{4(2\pi)^5 \delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}')}{k^4 \varepsilon_l(\omega,k)\varepsilon_l(\omega',k')} \sum_a e_a^2 \int \frac{\overline{f}_a(p)\, d^3p}{(\omega - \mathbf{kv} + i0)(\omega' + \mathbf{kv} + i0)}. \quad (51.17)$$

Преобразуем подынтегральное выражение, написав

$$[(\omega - \mathbf{kv} + i0)(\omega' + \mathbf{kv} + i0)]^{-1} = \frac{1}{\omega + \omega' + i0}\left[\frac{1}{\omega - \mathbf{kv} + i0} + \frac{1}{\omega' + \mathbf{kv} + i0}\right].$$

При дальнейшем интегрировании по ω' в (51.16) незатухающий при $t \to \infty$ вклад возникает от вычета в полюсе $\omega' = -\omega - i0$, который обходится контуром интегрирования, как это показано на рис. 14; в этом смысле множитель $1/(\omega + \omega')$ надо понимать как $-2\pi i \delta(\omega + \omega')$. Смысл же множителей $1/(\omega \pm \mathbf{kv})$ при последующем интегрировании по ω определяется формулой (29.8), согласно которой

$$\frac{1}{\omega - \mathbf{kv} + i0} - \frac{1}{\omega - \mathbf{kv} - i0} = -2\pi i \delta(\omega - \mathbf{kv})$$

(это обозначение подразумевает, что интегрирования по ω и ω' производятся уже по вещественной оси).

Таким образом, для вычисления коррелятора в асимптотическом пределе больших времен t, в интеграле (51.17) надо заменить

$$[(\omega - \mathbf{kv} + i0)(\omega' + \mathbf{kv} + i0)]^{-1} \to -(2\pi)^2 \delta(\omega + \omega')\delta(\omega - \mathbf{kv}). \quad (51.18)$$

В результате получим [1])

$$\langle \delta\varphi^{(+)}_{\omega\mathbf{k}} \delta\varphi^{(+)}_{\omega'\mathbf{k}'} \rangle = (2\pi)^4 \delta(\omega + \omega')\delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}')(\delta\varphi^2)_{\omega\mathbf{k}}, \quad (51.19)$$

где

$$(\delta\varphi^2)_{\omega\mathbf{k}} = \frac{32\pi^3}{k^4 |\varepsilon_l(\omega,k)|^2} \sum_a e_a^2 \int \overline{f}_a(p)\delta(\omega - \mathbf{kv})\, d^3p. \quad (51.20)$$

[1]) Во избежание недоразумений напомним, что это — не все выражение, а только его особая по $\omega + \omega'$ часть, определяющая асимптотическое поведение коррелятора. В полном выражении отнюдь не все члены содержали бы $\delta(\omega + \omega')$, поскольку соответствующая функция от t_1, t_2 зависит от разности $t = t_1 - t_2$ лишь асимптотически, при больших t_1, t_2.

Из определения (51.19) видно (ср. (19.13)), что величины $(\delta\varphi^2)_{\omega\mathbf{k}}$ представляют собой искомый фурье-образ корреляционный функции — спектральный коррелятор. Таким образом, формула (51.20) решает поставленную задачу для флуктуаций потенциала.

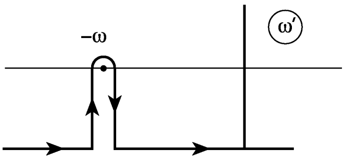


Рис. 14

Аналогичным образом определяются и другие корреляторы. Так, выразив из (51.11) $\delta f^{(+)}_{a\omega'\mathbf{k}'}$ через $\delta\varphi^{(+)}_{\omega'\mathbf{k}'}$, умножив на $\delta\varphi^{(+)}_{\omega\mathbf{k}}$ из (51.12) и усреднив, получим коррелятор потенциала и функции распределения[1]:

$$(\delta\varphi\delta f_a)_{\omega\mathbf{k}} = \frac{e_a\mathbf{k}}{\mathbf{k}\mathbf{v}-\omega+i0}\frac{\partial \overline{f}_a}{\partial \mathbf{p}}(\delta\varphi^2)_{\omega\mathbf{k}} + \frac{8\pi^2 e_a}{k^2\varepsilon_l(\omega,k)}\overline{f}_a(p)\delta(\omega-\mathbf{k}\mathbf{v}). \tag{51.21}$$

Напомним, что порядок, в котором написаны $\delta\varphi$ и δf_a в символе $(\delta\varphi\delta f_a)_{\omega\mathbf{k}}$, существен: по определению (ср. V, (122.11)), (51.21) есть фурье-образ пространственно-временного коррелятора

$$\langle\delta\varphi(t,\mathbf{r})\delta f_a(0,0)\rangle.$$

Если же определить коррелятор как $\langle\delta f_a(t,\mathbf{r})\delta\varphi(0,0)\rangle$, то будет

$$(\delta f_a\delta\varphi)_{\omega\mathbf{k}} = (\delta\varphi\delta f_a)_{-\omega-\mathbf{k}} = (\delta\varphi\delta f_a)^*_{\omega\mathbf{k}} \tag{51.22}$$

(ср. V, (122.13)).

Наконец, спектральный коррелятор функций распределения

$$\begin{aligned}(df_a\delta f_b)_{\omega\mathbf{k}} = 2\pi\delta_{ab}\delta(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)\overline{f}_a(p_1)\delta(\omega-\mathbf{k}\mathbf{v}_1)+\\ + \frac{e_a e_b(\delta\varphi^2)_{\omega\mathbf{k}}}{(\omega-\mathbf{k}\mathbf{v}_1+i0)(\omega-\mathbf{k}\mathbf{v}_2-i0)}\left(\mathbf{k}\frac{\partial\overline{f}_a}{\partial\mathbf{p}_1}\right)\left(\mathbf{k}\frac{\partial\overline{f}_b}{\partial\mathbf{p}_2}\right) -\\ - \frac{8\pi^2 e_a e_b}{k^2}\left\{\left(\mathbf{k}\frac{\partial\overline{f}_a}{\partial\mathbf{p}_1}\right)\overline{f}_b\frac{\delta(\omega-\mathbf{k}\mathbf{v}_2)}{\varepsilon_l(\omega,k)(\omega-\mathbf{k}\mathbf{v}_1+i0)}+\right.\\ \left.+\left(\mathbf{k}\frac{\partial\overline{f}_b}{\partial\mathbf{p}_2}\right)\overline{f}_a\frac{\delta(\omega-\mathbf{k}\mathbf{v}_1)}{\varepsilon_l^*(\omega,k)(\omega-\mathbf{k}\mathbf{v}_2-i0)}\right\}.\end{aligned} \tag{51.23}$$

[1]) Обратим внимание па обратное правило обхода в первом члене ($\omega - i0$ вместо $\omega + i0$). Оно возникло из-за того, что при $\omega = -\omega'$, $\mathbf{k} = -\mathbf{k}'$

$$(\mathbf{k}'\mathbf{v}-\omega'-i0)^{-1} = -(\mathbf{k}\mathbf{v}-\omega+i0)^{-1}.$$

Это — фурье-образ коррелятора

$$\langle \delta f_a(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}_1) \delta f_b(0, 0, \mathbf{p}_2) \rangle.$$

Если в формулах (51.20)–(51.23) выбрать в качестве $\overline{f}_a$ максвелловские функции f_{0a}, получим корреляторы флуктуаций в равновесной бесстолкновительной плазме.

Рассмотрим, например, флуктуации потенциала. Для максвелловской плазмы мнимую часть продольной диэлектрической проницаемости можно представить в виде

$$\varepsilon_l''(\omega, k) = \frac{4\pi^2\omega}{k^2 T} \sum_a e_a^2 \int f_{0a}(p) \delta(\omega - \mathbf{kv})\, d^3p \tag{51.24}$$

(см. (30.1); обобщение на несколько сортов частиц очевидно). Введя это выражение в (51.20), получим

$$(\delta\varphi^2)_{\omega\mathbf{k}} = \frac{8\pi T \varepsilon_l''(\omega, k)}{\omega k^2 |\varepsilon_l(\omega, k)|^2}. \tag{51.25}$$

Коррелятор же напряженности продольного электрического поля

$$(E_\alpha E_\beta)_{\omega\mathbf{k}} = k_\alpha k_\beta (\delta\varphi^2)_{\omega\mathbf{k}}. \tag{51.26}$$

Этот результат можно было бы, конечно, получить и из общей макроскопической теории равновесных электромагнитных флуктуаций, изложенной в IX, § 75–77. Согласно этой теории, спектральный коррелятор напряженности электрического поля выражается через запаздывающую гриновскую функцию формулой, которая в классическом пределе ($\hbar\omega \ll T$) принимает вид

$$(E_\alpha E_\beta)_{\omega\mathbf{k}} = -\frac{2\omega T}{\hbar c^2} \operatorname{Im} D_{\alpha\beta}^R(\omega, \mathbf{k}) \tag{51.27}$$

(см. IX, (76.3), (77.2)). В среде с пространственной дисперсией гриновская функция [1])

$$D_{\alpha\beta}^R(\omega, \mathbf{k}) = \frac{4\pi\hbar}{\omega^2 \varepsilon_t / c^2 - k^2} \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right) + \frac{4\pi\hbar c^2}{\omega^2 \varepsilon_l} \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}. \tag{51.28}$$

Подстановка продольной части этой функции (второй член) в (51.27) и даст (51.25), (51.26).

Наконец, вернемся к уравнению (51.4) и покажем, что стоящее в его правой части выражение

$$e_a \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \left\langle \frac{\partial \delta\varphi(t, \mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \delta f_a(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) \right\rangle \tag{51.29}$$

[1]) Это выражение получается из IX, (75.20), если разделить последнее на поперечную и продольную части и заменить ε в этих частях соответственно на $\varepsilon_t(\omega, k)$ и $\varepsilon_l(\omega, k)$.

действительно совпадает с известным выражением интеграла столкновений в плазме. Величина (51.29) получается из корреляционной функции $\langle \delta\varphi(t,\mathbf{r})\delta f_a(0,0)\rangle$ дифференцированием по $\mathbf{r}$, после чего надо положить в ней $\mathbf{r} = 0$. Таким образом, найдем

$$\left\langle \frac{\partial \delta\varphi}{\partial \mathbf{r}}\,\delta f_a \right\rangle = \int i\mathbf{k}(\delta\varphi\delta f_a)_{\omega\mathbf{k}}\frac{d\omega\, d^3k}{(2\pi)^4} = -\int \mathbf{k}\,\mathrm{Im}\,(\delta\varphi\delta f_a)_{\omega\mathbf{k}}\frac{d\omega\, d^3k}{(2\pi)^4} \tag{51.30}$$

(в последнем равенстве учтено (51.22)). Но из (51.21) имеем (используя также (51.20) и (51.24))

$$\mathrm{Im}\,(\delta\varphi\delta f_a)_{\omega\mathbf{k}} = \left\{-\pi\mathbf{k}\frac{\partial \overline{f}_a}{\partial \mathbf{p}_a}(\delta\varphi^2)_{\omega\mathbf{k}} - \frac{8\pi^2\varepsilon''}{k^2|\varepsilon|^2}\overline{f}_a\right\} e_a\delta(\omega - \mathbf{k}v_a) =$$
$$= -\frac{32\pi e_a}{k^4|\varepsilon_l|^2}\sum_b e_b^2\int \mathbf{k}\left\{\frac{\partial \overline{f}_a}{\partial \mathbf{p}_a}\overline{f}_b - \overline{f}_a\frac{\partial \overline{f}_b}{\partial \mathbf{p}_b}\right\}\times$$
$$\times\, \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_b)\, d^3p_b \cdot \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_a).$$

Подставив это выражение в (51.30), легко приводим (51.29) к виду интеграла столкновений Балеску–Ленарда (§ 47).

В связи с приведенным выводом может показаться странным, что для вычисления интеграла столкновений оказалось достаточным рассматривать флуктуации в бесстолкновительной плазме. Это, однако, связано с тем, что при столкновениях в плазме существенны компоненты Фурье электрического поля с $k \gtrsim 1/a \gg 1/l$, что и позволяет пренебречь столкновениями. Ситуация здесь вполне аналогична той, которая имела место при выводе кинетического уравнения Больцмана в § 16. Действительно, уравнение (16.10) как раз и означает пренебрежение влиянием столкновений на парную корреляционную функцию.

ГЛАВА V

ПЛАЗМА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

§ 52. Диэлектрическая проницаемость бесстолкновительной холодной плазмы

Эта глава посвящена изучению свойств плазмы, находящейся во внешнем магнитном поле; такую плазму называют *магнитоактивной*. Заставляя заряженные частицы двигаться по спиральным траекториям вдоль силовых линий, магнитное поле оказывает глубокое влияние на поведение плазмы. Оно влияет, в частности, и на ее диэлектрические свойства.

Напомним предварительно некоторые общие свойства тензора диэлектрической проницаемости в присутствии магнитного поля с индукцией **B** (см. VIII, § 82). Как и в отсутствие поля, имеет место равенство (28.6):

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(-\omega, -\mathbf{k}; \mathbf{B}) = \varepsilon^*_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}; \mathbf{B}). \qquad (52.1)$$

Согласно же принципу Онсагера, этот тензор симметричен при условии одновременного изменения знака поля и волнового вектора:

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}; \mathbf{B}) = \varepsilon_{\beta\alpha}(\omega, -\mathbf{k}; -\mathbf{B}). \qquad (52.2)$$

Если среда инвариантна относительно пространственной инверсии, что во всяком случае справедливо для равновесной плазмы, то $\varepsilon_{\alpha\beta}$ являются четными функциями **k** и (52.2) принимает вид

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}; \mathbf{B}) = \varepsilon_{\beta\alpha}(\omega, \mathbf{k}; -\mathbf{B}). \qquad (52.2a)$$

Подчеркнем, однако, что эти свойства относятся только к термодинамически равновесной среде — в отличие от свойства (52.1), являющегося следствием уже самого определения $\varepsilon_{\alpha\beta}$ [1]).

В общем случае тензор $\varepsilon_{\alpha\beta}$ может быть разделен на эрмитову, $(\varepsilon_{\alpha\beta} + \varepsilon^*_{\beta\alpha})/2$, и антиэрмитову, $(\varepsilon_{\alpha\beta} - \varepsilon^*_{\beta\alpha})/2$, части. Последняя определяет диссипацию энергии поля в среде (ср. (30.3)).

Изучение магнитоактивной плазмы мы начнем с простейшего случая «холодной» бесстолкновительной плазмы. Температура

---

[1]) Подчеркнем также, что речь идет о проницаемости для переменного электрического поля. На статическую ($\omega = 0$) диэлектрическую проницаемость, являющуюся чисто термодинамической величиной, в рамках классической теории магнитное поле вообще не влияет (ср. V, § 52); конечные (при $\mathbf{k} \neq 0$) величины $\varepsilon_{\alpha\beta}(0, \mathbf{k}; \mathbf{B})$ совпадают с $\varepsilon_{\alpha\beta}(0, \mathbf{k}; 0)$.

такой плазмы предполагается настолько низкой, что тепловым движением частиц можно пренебречь (необходимые для этого условия сформулированы ниже). В этом приближении пространственная дисперсия отсутствует и диэлектрическая проницаемость зависит только от частоты электрического поля. Отсутствует также и диссипация, так что тензор $\varepsilon_{\alpha\beta}$ эрмитов,

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega; \mathbf{B}) = \varepsilon^*_{\beta\alpha}(\omega; \mathbf{B}). \tag{52.3}$$

Вместе с равенством (52.1) отсюда следует, что

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega; \mathbf{B}) = \varepsilon_{\beta\alpha}(-\omega; \mathbf{B}). \tag{52.4}$$

Разделив эрмитов тензор на вещественную и мнимую части, $\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon'_{\alpha\beta} + i\varepsilon'_{\alpha\beta}$, в силу (52.2), (52.3) будем иметь

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{\alpha\beta}(\omega; \mathbf{B}) &= \varepsilon'_{\beta\alpha}(\omega; \mathbf{B}) = \varepsilon'_{\alpha\beta}(\omega; -\mathbf{B}), \\ \varepsilon''_{\alpha\beta}(\omega; \mathbf{B}) &= -\varepsilon''_{\beta\alpha}(\omega; \mathbf{B}) = -\varepsilon''_{\alpha\beta}(\omega; -\mathbf{B}). \end{aligned} \tag{52.5}$$

Таким образом, в бездиссипативной среде $\varepsilon'_{\alpha\beta}$ — четные, а $\varepsilon''_{\alpha\beta}$ — нечетные функции поля.

Будем считать, что анизотропия плазмы связана только с присутствием постоянного однородного магнитного поля (индукцию которого внутри плазмы обозначим через $\mathbf{B}_0$). В таком случае общая линейная зависимость между индукцией и напряженностью слабого монохроматического электрического поля имеет вид

$$\mathbf{D} = \varepsilon_\perp \mathbf{E} + (\varepsilon_\parallel - \varepsilon_\perp)\mathbf{b}(\mathbf{bE}) + ig[\mathbf{Eb}], \tag{52.6}$$

где $\mathbf{b} = \mathbf{B}_0/B_0$, а $\varepsilon_\perp$, $\varepsilon_\parallel$, g — функции от ω и B_0. В тензорном виде это соотношение записывается как $D_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta}E_\beta$, где

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_\perp\delta_{\alpha\beta} + (\varepsilon_\parallel - \varepsilon_\perp)b_\alpha b_\beta + ig\, e_{\alpha\beta\gamma}b_\gamma. \tag{52.7}$$

Если выбрать ось z в направлении $\mathbf{B}_0$, то компоненты этого тензора будут

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \varepsilon_{yy} = \varepsilon_\perp, & \varepsilon_{zz} &= \varepsilon_\parallel, \\ \varepsilon_{xy} &= -\varepsilon_{yx} = ig, & \varepsilon_{xz} &= \varepsilon_{yz} = 0. \end{aligned} \tag{52.8}$$

Из условия эрмитовости тензора (52.7) следует, что функции $\varepsilon_\perp$, $\varepsilon_\parallel$, g вещественны, а из (52.4) следует, что $\varepsilon_\perp$ и $\varepsilon_\parallel$ — четные, а g — нечетная функции частоты. Принцип Онсагера удовлетворяется выражением (52.7) автоматически.

В слабых полях тензор $\varepsilon_{\alpha\beta}$ должен разлагаться по целым степеням вектора $\mathbf{B}_0$. Поэтому при $\mathbf{B}_0 \to 0$ коэффициент $\varepsilon_\perp$ стремится к конечному пределу — диэлектрической проницаемости в отсутствие магнитного поля. Разность же $\varepsilon_\perp - \varepsilon_\parallel \sim B_0^2$, а коэффициент $g \sim B_0$.

Вычисление тензора $\varepsilon_{\alpha\beta}$ в рассматриваемом приближении может быть произведено непосредственно исходя из уравнений движения частиц в переменном поле $\mathbf{E}$ и постоянном $\mathbf{B}_0$ — подобно тому, как была выведена в § 31 формула (31.9). Так, для электронов имеем

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\mathbf{E} - \frac{e}{c}[\mathbf{v}\mathbf{B}_0]. \tag{52.9}$$

Скорость $\mathbf{v}$ меняется со временем по тому же закону ($e^{-i\omega t}$), что и поле $\mathbf{E}$; пренебрегая пространственным изменением последнего в области движения частицы, имеем из (52.9)

$$i\omega\mathbf{v} = \frac{e}{m}\mathbf{E} + \frac{e}{mc}[\mathbf{v}\mathbf{B}_0].$$

Решение этого алгебраического векторного уравнения содержит члены, направленные вдоль $\mathbf{E}$, $\mathbf{b}$ и $[\mathbf{E}\mathbf{b}]$; подбирая соответствующим образом коэффициенты в этих членах, получим

$$\mathbf{v} = -\frac{ie\omega}{m(\omega^2 - \omega_{Be}^2)}\left\{\mathbf{E} - \frac{\omega_{Be}^2}{\omega^2}\mathbf{b}(\mathbf{E}\mathbf{b}) - i\frac{\omega_{Be}}{\omega}[\mathbf{E}\mathbf{b}]\right\}, \tag{52.10}$$

где $\omega_{Be} = eB_0/(mc)$. Вызванная движением электронов поляризация $\mathbf{P}$, а с нею и индукция $\mathbf{D}$, связаны с их скоростью соотношением (29.4):

$$-i\omega\mathbf{P} = -i\omega\frac{\mathbf{D} - \mathbf{E}}{4\pi} = \mathbf{j} = -eN_e\mathbf{v}.$$

Таким же образом вычисляется ионный вклад в поляризацию, причем оба вклада складываются. В результате находим

$$\begin{aligned} \varepsilon_\perp &= 1 - \frac{\Omega_e^2}{\omega^2 - \omega_{Be}^2} - \frac{\Omega_i^2}{\omega^2 - \omega_{Bi}^2}, \\ \varepsilon_\parallel &= 1 - \frac{\Omega_e^2 + \Omega_i^2}{\omega^2}, \\ g &= \frac{\omega_{Be}\Omega_e^2}{\omega(\omega^2 - \omega_{Be}^2)} - \frac{\omega_{Bi}\Omega_i^2}{\omega(\omega^2 - \omega_{Bi}^2)}. \end{aligned} \tag{52.11}$$

Здесь

$$\omega_{Be} = \frac{eB_0}{mc}, \quad \omega_{Bi} = \frac{zeB_0}{Mc} \tag{52.12}$$

— так называемые *ларморовы частоты* электронов и ионов [1]); значения этих параметров являются важной характеристикой магнитоактивной плазмы (напомним, что это — частота обращения заряженных частиц по круговым орбитам в магнитном поле).

[1]) Их называют также *циклотронными* или *гиромагнитными*.

Отношения

$$\frac{\omega_{Bi}}{\omega_{Be}} = \frac{zm}{M}, \quad \frac{\Omega_i}{\Omega_e} = \left(\frac{zm}{M}\right)^{1/2} \tag{52.13}$$

— малые величины. Что же касается отношения частот Ω_e и ω_{Be} (или Ω_i и ω_{Bi}), зависящих от совершенно различных параметров (от плотности плазмы и от поля B_0), то оно может меняться в очень широких пределах.

Отметим, что ионный вклад в диэлектрическую проницаемость магнитоактивной плазмы, несмотря на большую массу ионов, может быть (при достаточно малых частотах ω) сравним или даже превышать электронный вклад. При $\omega \to 0$ два члена в g взаимно сокращаются и $g \to 0$; в этом легко убедиться, заметив, что

$$\frac{\Omega_e^2}{\omega_{Be}} = \frac{\Omega_i^2}{\omega_{Bi}} \tag{52.14}$$

в силу электронейтральности плазмы ($N_e = zN_i$). Оба члена в g остаются одинакового порядка величины при $\omega \sim \omega_{Bi}$, а пренебрежение ионной частью в g возможно при $\omega \gg \omega_{Bi}$. В поперечной же проницаемости, $\varepsilon_\perp$, оба члена сравниваются лишь в области

$$\omega \sim \omega_{Bi}\left(\frac{M}{m}\right)^{1/2} \sim (\omega_{Bi}\omega_{Be})^{1/2}.$$

Пренебрежение ионным вкладом возможно здесь лишь при

$$\omega \gg (\omega_{Bi}\omega_{Be})^{1/2}. \tag{52.15}$$

Наконец, в продольной проницаемости $\varepsilon_\parallel$ (куда Ω_e^2 и Ω_i^2 входят в виде суммы) ионной частью можно пренебречь всегда. Отметим, кстати, что независимость $\varepsilon_\parallel$ от $\mathbf{B}_0$ — следствие того, что поле $\mathbf{E}$ рассматривалось как однородное: в скрещенных однородных полях магнитное поле не меняет движения частиц вдоль направления $\mathbf{B}_0$.

Остановимся, наконец, на условиях применимости полученных формул. Применив к движению частиц уравнение (52.9), мы пренебрегли пространственным изменением поля $\mathbf{E}$ в области локализации частицы. Размеры этой области в направлении постоянного поля $\mathbf{B}_0$ определяются расстоянием v_T/ω, проходимым частицей, движущейся со средней тепловой скоростью v_T за время изменения переменного поля. В направлениях же, перпендикулярных полю $\mathbf{B}_0$, эти размеры при $\omega < \omega_B$ определяются величиной

$$r_B \sim \frac{v_T}{\omega_B} \tag{52.16}$$

— радиусом круговых орбит частиц, движущихся со скоростью v_T в магнитном поле $\mathbf{B}_0$ (*ларморов радиус* частиц). Указанное

выше пренебрежение требует малости этих расстояний по сравнению с расстояниями, на которых меняется (в соответствующих направлениях) поле **E**:

$$\frac{v_T|k_z|}{\omega} \ll 1, \quad \frac{v_T k_\perp}{\omega_B} \ll 1, \tag{52.17}$$

где $k_z \equiv k_\parallel$ и $k_\perp$ — составляющие волнового вектора вдоль и поперек поля $\mathbf{B}_0$. Эти неравенства должны выполняться для каждого рода частиц в плазме.

Мы увидим ниже, что, кроме того, частота ω не должна быть слишком близкой к какой-либо из частот ω_{Be}, ω_{Bi}, или их кратным (условия (53.17)). Вблизи этих частот пространственная дисперсия должна учитываться даже при соблюдении условий (52.17). Как мы увидим в § 55, это устраняет полюсы, которые выражения (52.11) имеют при $\omega^2 = \omega_{Be}^2$ или $\omega^2 = \omega_{Bi}^2$.

§ 53. Функция распределения в магнитном поле

Тензор диэлектрической проницаемости бесстолкновительной магнитоактивной плазмы с учетом пространственной дисперсии вычисляется по функциям распределения электронов и ионов, определяемым кинетическим уравнением.

Будем, для определенности, писать все формулы для электронов. Кинетические уравнения бесстолкновительной плазмы были написаны уже в § 27. Для электронов оно имеет вид [1])

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - e\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{vB}]\right)\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0. \tag{53.1}$$

Пусть плазма находится в постоянном однородном магнитном поле $\mathbf{B}_0$ произвольной величины и слабом переменном электромагнитном поле, в котором

$$\mathbf{E}, \mathbf{B}' \sim e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}. \tag{53.2}$$

При этом, в силу уравнений Максвелла,

$$\frac{\omega}{c}\mathbf{B}' = [\mathbf{kE}]. \tag{53.3}$$

Подставим в (53.1) $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}'$, а функцию распределения представим в виде $f = f_0 + \delta f$, где f_0 — стационарное и однородное распределение в отсутствие переменного поля; малая

[1]) Строго говоря, в присутствии магнитного поля фазовое пространство частицы должно определяться как пространство $\mathbf{r}$, $\mathbf{P}$, где $\mathbf{P} = \mathbf{p} - e\mathbf{A}(t, \mathbf{r})/c$ — обобщенный импульс. Но $d^3x\, d^3P = d^3x\, d^3p$, так как добавление $\mathbf{A}$ только меняет начало отсчета импульса в каждой точке пространства. Поэтому можно относить функцию распределения по-прежнему к $d^3x\, d^3p$.

добавка δf зависит от t и $\mathbf{r}$ по тому же закону (53.2), что и поля $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}'$, которым она пропорциональна. Отделив в уравнении члены нулевого и первого порядков по слабому полю, получим[1])

$$\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}}[\mathbf{v}\mathbf{B}_0] = 0, \tag{53.4}$$

$$i(\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega)\delta f - \frac{e}{c}[\mathbf{v}\mathbf{B}_0]\frac{\partial \delta f}{\partial \mathbf{p}} = e\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}}\left\{\mathbf{E} + \frac{1}{\omega}[\mathbf{v}[\mathbf{k}\mathbf{E}]]\right\}. \tag{53.5}$$

Обозначим через v_z, k_z составляющие векторов $\mathbf{v}$, $\mathbf{k}$ вдоль поля $\mathbf{B}_0$, а через $\mathbf{v}_\perp$, $\mathbf{k}_\perp$ — составляющие в перпендикулярной $\mathbf{B}_0$ плоскости; пусть φ — угол между $\mathbf{v}_\perp$ и плоскостью $\mathbf{k}_\perp$, $\mathbf{B}_0$ (отсчитываемый в направлении вращения буравчика, ввинчиваемого вдоль вектора $\mathbf{B}_0$); переменные v_z, $v_\perp$, φ составляют цилиндрические координаты в $\mathbf{v}$-пространстве. В этих переменных уравнение (53.5) принимает вид

$$i(k_z v_z + k_\perp v_\perp \cos\varphi - \omega)\delta f + \omega_{Be}\frac{\partial \delta f}{\partial \varphi} = e\left\{\mathbf{E} + \frac{1}{\omega}[\mathbf{v}[\mathbf{k}\mathbf{E}]]\right\}\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}}. \tag{53.6}$$

Из уравнения же (53.4) следует, что $\partial f_0/\partial\varphi = 0$, т. е. f_0 может быть любой функцией, зависящей только от p_z и $p_\perp$:

$$f_0 = f_0(p_z, p_\perp) \tag{53.7}$$

(этот результат заранее очевиден для бесстолкновительной плазмы, поскольку p_z и $p_\perp$ — те переменные, на которые не влияет магнитное поле).

Для упрощения записи формул введем обозначения

$$\alpha = \frac{k_z v_z - \omega}{\omega_{Be}}, \quad \beta = \frac{k_\perp v_\perp}{\omega_{Be}}, \tag{53.8}$$

$$Q(v_z, v_\perp, \varphi) = \frac{e}{\omega_{Be}}\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}}\left\{\mathbf{E} + \frac{1}{\omega}[\mathbf{v}[\mathbf{k}\mathbf{E}]]\right\}. \tag{53.9}$$

Если f_0 зависит только от энергии электронов $\varepsilon = p^2/(2m)$, то производная $\partial f_0/\partial \mathbf{p} = \mathbf{v}\, df_0/d\varepsilon$ и ее произведение со вторым членом в скобках обращается в нуль, так что

$$Q = \frac{e}{\omega_{Be}}\frac{df_0}{d\varepsilon}\mathbf{v}\mathbf{E}. \tag{53.10}$$

---

[1]) В холодной плазме лоренцеву силу со стороны слабого поля $\mathbf{B}'$ не надо было учитывать, так как при пренебрежении собственным (в отсутствие поля) движением частиц эта сила второго порядка малости.

С этими обозначениями уравнение (53.6) примет вид

$$\frac{\partial\,\delta f}{\partial\varphi}+i(\alpha+\beta\cos\varphi)\delta f=Q(\varphi) \tag{53.11}$$

(аргументы v_z, $v_\perp$ в функции Q не выписываем). Его решение:

$$\delta f=e^{-i(\alpha\varphi+\beta\sin\varphi)}\int\limits_C^{\varphi}e^{i(\alpha\varphi'+\beta\sin\varphi')}Q(\varphi')\,d\varphi',$$

или, после замены переменной интегрирования $\varphi'=\varphi-\tau$,

$$\delta f=e^{-i\beta\sin\varphi}\int\limits_0^{\varphi-C}e^{i\beta\sin(\varphi-\tau)-i\alpha\tau}Q(\varphi-\tau)\,d\tau.$$

Постоянная C определяется требованием, чтобы функция δf была периодична по φ с периодом 2π. Поскольку подынтегральная функция (как и множитель перед интегралом) периодична по φ, то поставленное требование удовлетворится, если пределы интегрирования не будут зависеть от φ; для этого надо положить $C=\infty$ или $C=-\infty$. Выбор между этими двумя возможностями определяется правилом обхода Ландау (29.6): интегрирование должно производиться при $\omega\to\omega+i0$, т. е. $\alpha\to\alpha-i0$; такой интеграл сходится лишь при $C=-\infty$ [1]). Окончательно имеем

$$\delta f=e^{-i\beta\sin\varphi}\int\limits_0^{\infty}\exp\{i\beta\sin(\varphi-\tau)-i\alpha\tau\}\,Q(\varphi-\tau)\,d\tau=$$
$$=\int\limits_0^{\infty}\exp\left\{-i\alpha\tau-2i\beta\cos\left(\varphi-\frac{\tau}{2}\right)\sin\frac{\tau}{2}\right\}Q(\varphi-\tau)\,d\tau. \tag{53.12}$$

В пределе $B_0\to 0$ это выражение должно переходить в (29.2). Для выполнения предельного перехода замечаем, что при $\alpha\gg 1$ в интеграле существенна область $\tau\ll 1$. Тогда $\sin(\varphi-\tau)\approx\sin\varphi-\tau\cos\varphi$ и интеграл принимает вид

$$\delta f=Q(\varphi)\int\limits_0^{\infty}e^{-i(\alpha+\beta\cos\varphi)\tau}\,d\tau=Q(\varphi)\int\limits_0^{\infty}\exp\left\{-i\tau\frac{\mathbf{kv}-\omega}{\omega_{Be}}\right\}d\tau.$$

Взяв интеграл при $\omega\to\omega+i0$, получим

$$\delta f=\frac{Q\omega_{Be}}{i(\mathbf{kv}-\omega)}, \tag{53.13}$$

что и требовалось.

[1]) Этот вывод зависит от знака, с которым ω входит в показатель степени. В случае ионов заряд $-e$ заменяется на ze, так что $\omega_{Be}\to-\omega_{Bi}$. Тогда при $\omega\to\omega+i0$ было бы $\alpha\to\alpha+i0$ и для C надо было бы выбрать значение ∞.

Если частота поля совпадает с ларморовой частотой ω_{Be} или кратна ей, то говорят о *простом* или *кратном циклотронном резонансе* (электронов). Для исследования диэлектрических свойств плазмы вблизи таких резонансов удобен другой способ решения уравнения (53.11), основанный на разложении искомой функции в ряд Фурье по переменной φ.

Произведя в (53.11) замену

$$\delta f = e^{-i\beta \sin\varphi} g, \tag{53.14}$$

получим для функции g уравнение

$$\frac{\partial g}{\partial \varphi} + i\alpha g = e^{i\beta\sin\varphi} Q(v_z, v_\perp, \varphi).$$

Его решение ищем в виде ряда Фурье

$$g = \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{is\varphi} g_s(v_z, v_\perp) \tag{53.15}$$

и для коэффициентов g_s находим

$$g_s = \frac{Q_s}{i(\alpha + s)}, \tag{53.16}$$

$$Q_s(v_z, v_\perp) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(\beta\sin\tau - s\tau)} Q(v_z, v_\perp, \tau)\, d\tau.$$

Разложение (53.15) автоматически обеспечивает периодичность функции δf по φ.

Отметим прежде всего, что выражение δf в виде ряда (53.14), (53.15) позволяет сразу сформулировать условия допустимости пренебрежения пространственной дисперсией. Волновой вектор входит в члены ряда через параметры

$$\beta = \frac{k_\perp v_\perp}{\omega_B}, \quad \alpha + s = -\frac{\omega - s\omega_B - k_z v_z}{\omega_B}.$$

Диэлектрическая проницаемость плазмы определяется функцией распределения при скоростях $v \sim v_T$. Волновой вектор выпадает из этой функции, если

$$k_\perp v_\perp \ll \omega_B, \qquad |\omega - s\omega_B| \gg |k_z| v_T. \tag{53.17}$$

Первое из неравенств (53.17) и второе с $s = 0$ совпадают с условиями (52.17). Мы видим, что помимо этих условий требуется еще, чтобы частота ω не лежала слишком близко к какому-либо из циклотронных резонансов.

В окрестности циклотронных резонансов функция распределения может выражаться, при выполнении определенных условий, всего одним членом ряда Фурье. Именно, должно быть

$$|k_z|v_T \ll \omega_B, \qquad |\omega - n\omega_B| \ll \omega_B, \tag{53.18}$$

где n — какое-либо из чисел 0, ±1, ±2, ... Легко видеть, что при этом n-й член в разложении (53.15) велик по сравнению с остальными. Действительно,

$$g_n \sim \frac{Q_n\omega_B}{|k_z v_T| + |\omega - n\omega_B|} \gg Q_n,$$

между тем как для $s \neq n$ будет $g_s \lesssim Q_s$ (так как $|s\omega_B - \omega| \gtrsim \omega_B$). Ограничившись этим одним членом, получим для функции распределения электронов:

$$\begin{gathered}\delta f = Q_n \frac{\omega_{Be} \exp\left[i\left(n\varphi - \dfrac{k_\perp v_\perp}{\omega_{Be}}\sin\varphi\right)\right]}{i[k_z v_z - (\omega - n\omega_{Be})]}, \\ Q_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \exp\left[-i\left(n\tau - \frac{k_\perp v_\perp}{\omega_{Be}}\sin\tau\right)\right] Q(v_z, v_\perp, \tau)\, d\tau.\end{gathered} \tag{53.19}$$

Зависимость функции распределения от угла φ этой формулой определяется в явном виде. В частности, при $n = 0$ и $k_\perp \to 0$ распределение вообще не зависит от φ. Происхождение этого свойства очевидно из условия $\omega \ll \omega_{Be}$ ((53.18) с $n = 0$): частота ларморова вращения велика по сравнению с частотой изменения поля, что и приводит к «усреднению» функции распределения по углу вращения [1]).

§ 54. Диэлектрическая проницаемость магнитоактивной максвелловской плазмы

Электронный вклад в тензор диэлектрической проницаемости вычисляется по функции распределения согласно формуле

$$P_\alpha = \frac{\varepsilon_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}}{4\pi} E_\beta = \frac{e}{i\omega}\int v_\alpha \delta f\, d^3p \tag{54.1}$$

(и аналогично, с заменой $e \to -ze$ — ионный вклад). Для максвелловской плазмы интегрирование по d^3p в этом выражении может быть выполнено в явном виде.

[1]) Соответствующие рассуждения изложены более подробно по аналогичному поводу в § 1.

Функция δf дается интегралом (53.12), причем согласно определению (53.10):

$$Q = -\frac{e\mathbf{E}\mathbf{v}}{\omega_{Be}T} f_0. \tag{54.2}$$

Перепишем этот интеграл в более компактном виде, введя вместо векторов $\mathbf{k} = (k_z, \mathbf{k}_\perp)$ и $\mathbf{E} = (E_z, \mathbf{E}_\perp)$ векторы

$$\mathbf{K} = \left(k_z\tau, 2\widetilde{\mathbf{k}}_\perp \sin\frac{\tau}{2}\right), \quad \widetilde{\mathbf{E}} = (E_z, \widetilde{\mathbf{E}}_\perp), \tag{54.3}$$

где $\widetilde{\mathbf{k}}_\perp$ — вектор $\mathbf{k}_\perp$, повернутый на угол $\tau/2$ (в плоскости, перпендикулярной $\mathbf{B}_0$), а $\widetilde{\mathbf{E}}_\perp$ — вектор $\mathbf{E}_\perp$, повернутый на угол τ. Тогда δf примет вид

$$\delta f = -\frac{e}{T\omega_{Be}} \int\limits_0^\infty \exp\left\{\frac{i}{\omega_{Be}}(\omega\tau - \mathbf{K}\mathbf{v})\right\} f_0(p)(\widetilde{\mathbf{E}}\mathbf{v})\, d\tau,$$

где $f_0(p)$ — максвелловская функция распределения.

Это выражение подставим в (54.1) и заменим переменную интегрирования $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ согласно

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} - \frac{i\mathbf{K}T}{m\omega_{Be}}.$$

Интегрирование по d^3u производится элементарно, и в результате находим

$$\mathbf{P} = \frac{ie^2N_e}{m\omega\omega_{Be}} \int\limits_0^\infty \left(\widetilde{\mathbf{E}} - \frac{T}{m\omega_{Be}^2}(\widetilde{\mathbf{E}}\mathbf{K})\mathbf{K}\right) \exp\left[-\frac{i\omega\tau}{\omega_{Be}} - \frac{\mathbf{K}^2T}{2m\omega_{Be}^2}\right] d\tau. \tag{54.4}$$

При этом, согласно определению (54.3):

$$\mathbf{K}^2 = k_z^2\tau^2 + 4k_\perp^2 \sin^2\frac{\tau}{2}.$$

Расписав выражение (54.4) в компонентах, найдем компоненты тензора $\varepsilon_{\alpha\beta}$. При этом условимся о выборе осей координат: ось z — по $\mathbf{B}_0$, ось x — по $\mathbf{k}_\perp$, ось y — по $[\mathbf{B}_0\mathbf{k}_\perp]$ (рис. 15). После простых вычислений получим

$$\varepsilon_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta} = \frac{i\Omega_e^2}{\omega\omega_{Be}} \int\limits_0^\infty \varkappa_{\alpha\beta} \times$$
$$\times \exp\left\{i\tau\frac{\omega + i0}{\omega_{Be}} - \frac{1}{2}k_z^2 r_{Be}^2 \tau^2 - 2k_\perp^2 r_{Be}^2 \sin^2\frac{\tau}{2}\right\} d\tau, \tag{54.5}$$

где

$$\begin{aligned}
\varkappa_{xx} &= \cos\tau - (k_\perp r_{Be})^2 \sin^2\tau,\\
\varkappa_{yy} &= \cos\tau + 4(k_\perp r_{Be})^2 \sin^4\frac{\tau}{2},\\
\varkappa_{zz} &= 1 - (k_z r_{Be})^2\tau^2,\\
\varkappa_{xy} = -\varkappa_{yx} &= -\sin\tau + 2(k_\perp r_{Be})^2 \sin\tau \sin^2\frac{\tau}{2},\\
\varkappa_{xz} = \varkappa_{zx} &= -k_z k_\perp r_{Be}^2 \tau \sin\tau,\\
\varkappa_{yz} = -\varkappa_{zy} &= -2k_z k_\perp r_{Be}^2 \tau \sin^2\frac{\tau}{2}
\end{aligned} \tag{54.6}$$

($r_{Be} = v_{Te}/\omega_{Be}$ — ларморов радиус электронов).

Отметим, что равенства

$$\varepsilon_{xy} = -\varepsilon_{yx}, \quad \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx}, \quad \varepsilon_{yz} = -\varepsilon_{zy} \tag{54.7}$$

заранее очевидны. Действительно, при фиксированной системе координат согласно принципу Онсагера должно быть $\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{B}_0) = \varepsilon_{\beta\alpha}(-\mathbf{B}_0)$. При условленном же выше выборе осей, связанных с направлениями $\mathbf{B}_0$ и $\mathbf{k}_\perp$, направления осей y и z при замене $\mathbf{B}_0 \to -\mathbf{B}_0$ меняются на обратные. Поэтому в таких осях будет

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xy}(\mathbf{B}_0) &= -\varepsilon_{yx}(-\mathbf{B}_0),\\
\varepsilon_{xz}(\mathbf{B}_0) &= -\varepsilon_{zx}(-\mathbf{B}_0),\\
\varepsilon_{yz}(\mathbf{B}_0) &= \varepsilon_{zy}(-\mathbf{B}_0).
\end{aligned} \tag{54.8}$$

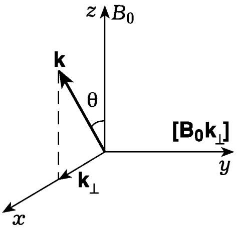


Рис. 15

С другой стороны, $\mathbf{B}_0$ (направление оси z) — псевдовектор, а $\mathbf{k}_\perp$ и $[\mathbf{B}_0\mathbf{k}_\perp]$ (направления осей x и y) — истинные векторы. Поэтому, в силу требования инвариантности по отношению к инверсии координат, компоненты ε_{xz} и ε_{yz} (содержащие индекс z один раз) должны быть нечетными, а все остальные компоненты — четными функциями $\mathbf{B}_0$. Отсюда и из (54.8) следует (54.7).

Отметим, что ввиду соотношений (54.7) эрмитовы и антиэрмитовы части различных компонент $\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon'_{\alpha\beta} + i\varepsilon''_{\alpha\beta}$ выражаются по-разному через их вещественную и мнимую части. Именно, разбиение на эрмитову и антиэрмитову части дается следующей суммой:

$$(\varepsilon_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \varepsilon'_{xx} & i\varepsilon''_{xy} & \varepsilon'_{xz} \\ -i\varepsilon''_{xy} & \varepsilon'_{yy} & i\varepsilon''_{yz} \\ \varepsilon'_{xz} & -i\varepsilon''_{yz} & \varepsilon'_{zz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i\varepsilon''_{xx} & \varepsilon'_{xy} & i\varepsilon''_{xz} \\ -\varepsilon'_{xy} & i\varepsilon''_{yy} & \varepsilon'_{yz} \\ i\varepsilon''_{xz} & -\varepsilon'_{yz} & i\varepsilon''_{zz} \end{pmatrix}. \tag{54.9}$$

Хотя мы производили все вычисления для электронной части проницаемости, но вполне аналогичные формулы справедливы и

для ионного вклада. Переход к случаю ионов совершается заменой $\Omega_e, v_{Te} \to \Omega_i, v_{Ti}$; $\omega_{Be} \to -\omega_{Bi}$ и одновременной заменой верхнего предела интеграла в (54.5) на $-\infty$ (см. примеч. на с. 271). Заменив затем переменную интегрирования $\tau \to -\tau$, мы вернемся к прежним выражениям (54.5), (54.6) с Ω_i, v_{Ti}, ω_{Bi} вместо Ω_e, v_{Te}, ω_{Be} и с тем лишь отличием, что изменится знак $\varkappa_{xy}$ и $\varkappa_{yz}$. Таким образом, правило перехода от электронного к ионному вкладу в проницаемость состоит в замене электронных параметров ионными с одновременным изменением знака компонент ε_{xy} и ε_{yz}.

§ 55. Затухание Ландау в магнитоактивной плазме

Учет теплового движения частиц плазмы приводит к появлению у тензора $\varepsilon_{\alpha\beta}$ антиэрмитовой части. В бесстолкновительной плазме, ввиду отсутствия истинной диссипации энергии, эта часть тензора связана с затуханием Ландау.

Мы видели в § 30, что механизм затухания Ландау связан с передачей энергии электромагнитного поля частицам, движущимся в фазе с волной: в затухании участвуют частицы, для которых $\omega = \mathbf{kv}$, т. е. проекция скорости $\mathbf{v}$ на направление $\mathbf{k}$ совпадает с фазовой скоростью волны ω/k. В магнитоактивной плазме это условие несколько меняется: должны совпадать проекции скорости частицы и фазовой скорости волны на направление постоянного поля $\mathbf{B}_0$:

$$v_z k_z = \omega. \tag{55.1}$$

Действительно, поперечное по отношению к $\mathbf{B}_0$ движение частицы происходит по круговым траекториям и не может сопровождаться систематической передачей энергии от поля к частице: если на одной части круговой траектории частица движется в фазе с волной и получает от нее энергию, то на противоположной части траектории такая же энергия будет отдана частицей полю.

В магнитоактивной плазме, однако, существует еще и другой механизм бесстолкновительной диссипации, связанный именно с ларморовым вращением частиц. В системе координат, движущейся вдоль поля $\mathbf{B}_0$ вместе с частицей (со скоростью v_z), последняя движется по круговой орбите с частотой ω_B. Такая частица представляет собой, в электродинамическом отношении, осциллятор, излучающий на частоте ω_B (магнитотормозное излучение). Напротив, будучи помещен в переменное внешнее поле, осциллятор поглощает на этой же частоте. Частота электромагнитной волны в движущейся (относительно плазмы) системе координат, измененная эффектом Допплера, равна $\omega' = \omega - k_z v_z$.

Поэтому в указанном поглощении будут принимать участие частицы, для которых

$$\omega - k_z v_z = \omega_B.$$

Если $\mathbf{k}_\perp = 0$, то поле волны однородно в поперечных (к $\mathbf{B}_0$) направлениях, т. е. действующая на осциллятор вынуждающая сила не зависит от его координат. Именно в таких условиях осциллятор поглощает только на своей частоте ω_B. Если же $\mathbf{k}_\perp \neq 0$, то вынуждающая сила зависит от координат осциллятора, в результате чего появляется поглощение также и на кратных частотах, т. е. при условиях

$$\omega - k_z v_z = m\omega_B, \tag{55.2}$$

где n — любое (положительное или отрицательное) целое число. Описанный механизм диссипации называют *циклотронным затуханием Ландау*; в зависимости от значения n говорят о затухании на простом ($n = \pm 1$) или кратном циклотронном резонансе.

Таким образом, значительное затухание может иметь место в областях частот, в которых

$$|\omega - n\omega_B| \lesssim |k_z| v_T, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{55.3}$$

(значение $n = 0$ отвечает условию (55.1)). Эти линии резонансного поглощения существуют как на электронных, так и на ионных частотах ω_{Be} и ω_{Bi}.

С математической точки зрения условиям (55.1), (55.2) отвечают полюсы, которые в этих точках имеют различные члены разложения функции распределения в ряд Фурье (53.14)–(53.16). Антиэрмитовы части тензора $\varepsilon_{\alpha\beta}$ возникают от вычетов при обходе этих полюсов в интеграле (54.1) по правилу Ландау. Переход к пределу $B_0 \to 0$ имеет математически своеобразный характер. В магнитном поле «полюсные» значения v_z (при заданном k_z) образуют дискретную последовательность, определяемую уравнением (55.2). По мере уменьшения поля полюсы сближаются и в пределе $B_0 = 0$ полюсные значения v_z зависят уже не от дискретного номера n, а от непрерывного параметра $\mathbf{k}_\perp \mathbf{v}_\perp$, в соответствии с условием

$$\omega = \mathbf{kv} = k_z v_z + \mathbf{k}_\perp \mathbf{v}_\perp$$

(как это показано при переходе от (53.12) к (53.13)).

Вычислим, для примера, тензор диэлектрической проницаемости в области простого ($n = 1$) циклотронного резонанса электронов. Будем считать также, что

$$\frac{|k_z| v_{Te}}{\omega_{Be}} \ll 1, \qquad \frac{k_\perp v_{Te}}{\omega_{Be}} \ll 1. \tag{55.4}$$

Тогда можно воспользоваться для функции распределения всего одним членом ряда Фурье — выражением (53.19), соответствующим данному значению n. При этом, в силу второго условия

(55.4), эта функция может быть разложена по степеням $k_\perp$. В случае $n = 1$ в таком разложении можно ограничиться нулевым членом — в соответствии с тем, что циклотронное поглощение на частоте ω_{Be} не требует неоднородности внешнего поля в плоскости xy.

Таким образом, пишем функцию распределения в виде

$$\delta f = Q_1 \frac{\omega_{Be} e^{i\varphi}}{i[k_z v_z - (\omega - \omega_{Be})]}, \tag{55.5}$$

причем

$$Q_1 = -\frac{e f_0}{2\pi T \omega_{Be}} \int\limits_0^{2\pi} \mathbf{E}\mathbf{v} e^{-i\tau}\, d\tau.$$

Написав

$$\mathbf{E}\mathbf{v} = E_x v_\perp \cos\tau + E_y v_\perp \sin\tau + E_z v_z$$

и выполнив интегрирование, получим

$$Q_1 = -\frac{e v_\perp}{2T\omega_{Be}} f_0 (E_x - iE_y). \tag{55.6}$$

С этой функцией распределения вектор поляризации (54.1) имеет лишь x- и y-компоненты. После выполнения интегрирования по $v_\perp\, dv_\perp\, d\varphi$ они принимают вид

$$P_x = -iP_y = (E_x - iE_y) \frac{e^2 N_e}{2\omega m k_z} \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{1/2} \times \\ \times \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{m v_z^2}{2T}\right) \frac{dv_z}{v_z - (\omega - \omega_{Be})/k_z - i0 \operatorname{sign} k_z}.$$

Интеграл такого вида выражается через определенную согласно (31.3) функцию F. Окончательно находим для компонент диэлектрического тензора [1]):

$$\varepsilon_{xx} - 1 = \varepsilon_{yy} - 1 = i\varepsilon_{xy} = \frac{\Omega_e^2}{2\omega(\omega - \omega_{Be})} F\left(\frac{\omega - \omega_{Be}}{\sqrt{2}\, v_{Te} |k_z|}\right), \\ \varepsilon_{zz} - 1 = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0. \tag{55.7}$$

Антиэрмитова часть этого тензора, описывающая затухание:

$$\varepsilon''_{xx} = \varepsilon''_{yy} = \varepsilon'_{xy} = \frac{\pi^{1/2} \Omega_e^2}{2^{3/2} \omega |k_z| v_{Te}} \exp\left\{-\frac{(\omega - \omega_{Be})^2}{2 v_{Te}^2 k_z^2}\right\}. \tag{55.8}$$

---

[1]) Полюс $v_z = (\omega - \omega_{Be})/k_z$ обходится снизу или сверху в зависимости от знака k_z; это обстоятельство и приводит к появлению знака модуля у k_z в аргументе функции.

Эрмитова же часть в непосредственной близости к точке $\omega = \omega_{Be}$ имеет вид

$$\varepsilon'_{xx} - 1 = \varepsilon'_{yy} - 1 = -\varepsilon''_{xy} = -\frac{\Omega_e^2(\omega - \omega_{Be})}{2\omega v_{Te}^2 k_z^2}, \quad \frac{|\omega - \omega_{Be}|}{v_{Te}|k_z|} \ll 1. \quad (55.9)$$

В самой этой точке она меняет знак, обращаясь в нуль. Мы видим здесь, каким образом учет пространственной дисперсии устраняет полюсы диэлектрической проницаемости холодной плазмы (52.11): разрывная зависимость, изображенная на рис. 16 штриховыми линиями, заменяется непрерывной зависимостью, изображенной сплошной линией [1]).

В пределе $|k_z| \to 0$ выражение (55.8) сводится к δ-функции:

$$\varepsilon''_{xx} = \varepsilon''_{yy} = \varepsilon'_{xy} \to \frac{\pi\Omega_e^2}{2\omega}\,\delta(\omega - \omega_{Be}) \quad (55.10)$$

(действительно, при $\omega - \omega_{Be} \neq 0$ функция (55.8) обращается в пределе в нуль; в то же время интеграл этой функции по $d\omega$ равен $\pi\Omega_e^2/(2\omega)$ независимо от значения k_z). Этот результат вполне ясен: в отсутствие пространственной дисперсии ($k \to 0$) ширина линии поглощения обращается в нуль и затухание остается лишь при точном совпадении ω с ω_{Be}. Формулу (55.10) можно использовать вместо (55.8) в интегральных по ω выражениях.

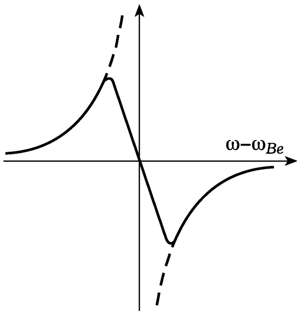


Рис. 16

Отметим, что формула (55.10) может быть получена и непосредственно из выражений (52.11) диэлектрической проницаемости холодной плазмы с помощью правила обхода Ландау. Согласно этому правилу, при наличии полюса по частоте ω последняя должна пониматься как $\omega + i0$. Поэтому фигурирующие в (52.11) полюсные множители надо в действительности понимать в следующем смысле:

$$\frac{1}{\omega^2 - \omega_{Be}^2} \to \frac{1}{2\omega_{Be}}\left[\frac{1}{\omega - \omega_{Be} + i0} - \frac{1}{\omega + \omega_{Be} + i0}\right]$$

и по правилу (29.8):

$$\frac{1}{\omega^2 - \omega_{Be}^2} \to \mathrm{P}\frac{1}{\omega^2 - \omega_{Be}^2} - \frac{i\pi}{2\omega_{Be}}[\delta(\omega - \omega_{Be}) - \delta(\omega + \omega_{Be})]. \quad (55.11)$$

Произведя в (52.11) такую замену, получим (55.10).

[1]) Выражение (55.7) не обладает, естественно, свойством (52.1). Это свойство появилось бы лишь при учете наряду с линией поглощения вблизи $\omega = \omega_{Be}$ также и линии вблизи частоты $\omega = -\omega_{Be}$.

При $k_z = 0$ (т. е. при $\mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0$) затухание Ландау в магнитоактивной плазме отсутствует: скорость частиц выпадает из условий (55.1), (55.2), и они не могут быть выполнены (кроме как при точном совпадении ω с каким-либо $n\omega_B$) [1]. Подчеркнем, что это свойство связано с нерелятивистским приближением; в релятивистской плазме затухание Ландау (циклотронное) может существовать и при $k_z = 0$. Частота обращения вокруг направления $\mathbf{B}_0$ для релятивистской заряженной частицы с энергией ε равна

$$\omega_B \frac{mc^2}{\varepsilon} = \omega_B \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

(с прежним определением ω_B). Это значение должно фигурировать в правой части условия (55.2) вместо ω_B. В частности, при $k_z = 0$ будем иметь

$$\omega = n\omega_B \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}; \tag{55.12}$$

для возможности выполнения этого условия требуется лишь, чтобы было $\omega < n\omega_B$.

Затухание Ландау в магнитоактивной релятивистской плазме может существовать и в пределе $\mathbf{k} \to 0$ (в отличие не только от магнитоактивной нерелятивистской плазмы, но и от релятивистской плазмы в отсутствие магнитного поля). Оно осуществляется за счет частиц, находящихся в простом циклотронном резонансе с однородным переменным полем (условие (55.12) с $n = 1$) и существует, следовательно, при частотах $\omega < \omega_B$ (см. задачу 2).

Задачи

1. Найти тензор диэлектрической проницаемости магнитоактивной плазмы при $\omega \lesssim |k_z| v_{Te}$; предполагаются выполненными также условия (55.4).

Решение. В нулевом приближении по малому параметру $k_\perp v_{Te}/\omega_{Be}$ функция распределения для этого случая (член $s = 0$ ряда Фурье (53.14), (53.15)):

$$\delta f = Q_0 \frac{\omega_{Be}}{i(k_z v_z - \omega)},$$

где

$$Q_0 = -\frac{ef_0}{\omega_{Be} T} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{E}\mathbf{v}\, d\tau = -\frac{ev_z E_z}{\omega_{Be} T} f_0.$$

С этой функцией δf вектор поляризации $\mathbf{P}$ имеет только z-компоненту, и из всех компонент тензора $\varepsilon_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}$ отлична от нуля лишь одна:

$$\varepsilon_{zz} - 1 = \frac{4\pi e^2}{\omega T} \int \frac{f_0(p) v_z^2\, d^3p}{k_z v_z - \omega - i0}.$$

[1]) В пределе $B_0 \to 0$, разумеется, затухание появляется вновь — за счет электронов, удовлетворяющих условию $\omega = \mathbf{k}\mathbf{v} \equiv \mathbf{k}_\perp \mathbf{v}_\perp$.

После тождественной замены

$$v_z^2 = \frac{1}{k_z}(k_z v_z - \omega)v_z + \frac{\omega}{k_z}v_z$$

интеграл от первого члена обращается в нуль (при интегрировании по dp_z); второй же член приводит к результату

$$\varepsilon_{zz} - 1 = \frac{\Omega_e^2}{k_z^2 v_{Te}^2}\left[F\left(\frac{\omega}{\sqrt{2}|k_z|v_{Te}}\right) + 1\right].$$

Мнимая часть этого выражения:

$$\varepsilon''_{zz} = \frac{\pi^{1/2}\omega\Omega_e^2}{2^{1/2}|k_z|^3 v_{Te}^3}\exp\left(-\frac{\omega^2}{2k_z^2 v_{Te}^2}\right).$$

2. Найти антиэрмитову часть тензора диэлектрической проницаемости ультрарелятивистской магнитоактивной электронной плазмы в пределе $\mathbf{k}\to 0$.

Р е ш е н и е. В релятивистском случае кинетическое уравнение (53.5) остается тем же, но при его преобразовании к виду (53.6) релятивистское соотношение $\mathbf{p} = \varepsilon\mathbf{v}/c^2$ (ε — энергия электрона) вместо $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ приводит к замене ω_{Be} на $\omega_{Be}mc^2/\varepsilon$; с этой заменой остаются справедливыми и все последующие формулы в § 53.

При $k = 0$ затухание происходит только от простого циклотронного резонанса; поэтому для вычисления антиэрмитовой части $\varepsilon_{\alpha\beta}$ достаточно учесть лишь член $s = 1$ в (53.14), (53.15). Аналогично (55.5), (55.6) найдем

$$\delta f = -\frac{iep_\perp c^2 e^{i\varphi} f_0}{2T\varepsilon(\omega - \omega_{Be}mc^2/\varepsilon)}(E_x - iE_y).$$

Ультрарелятивистская ($T \gg mc^2$) функция f_0 [1]):

$$f_0 = \frac{N_e c^3}{8\pi T^3}e^{-\varepsilon/T}.$$

Вектор поляризации вычисляется как

$$\mathbf{P} = \frac{e}{i\omega}\int \frac{\mathbf{p}c^2}{\varepsilon}\,\delta f\,d^3p,$$

причем d^3p надо записать в виде $p^2\,dp\,do = p\varepsilon\,d\varepsilon\,do/c^2$. После выполнения интегрирования по do и замены $cp = (\varepsilon^2 - m^2c^4)^{1/2}$ получается

$$\varepsilon_{xx} - 1 = \varepsilon_{yy} - 1 = i\varepsilon_{xy} = -\frac{\Omega_e^2 mc^2}{12\omega^2 T^4}\int\limits_{mc^2}^{\infty}\frac{(\varepsilon^2 - m^2c^4)^{3/2}e^{-\varepsilon/T}\,d\varepsilon}{\varepsilon - \omega_{Be}mc^2/\omega + i0}.$$

Интеграл имеет мнимую часть, если полюс $\varepsilon = \omega_{Be}mc^2/\omega$ лежит в области интегрирования, т. е. если $\omega < \omega_{Be}$. В этом случае окончательно находим

$$\varepsilon''_{xx} = \varepsilon''_{yy} = \varepsilon'_{xy} = \frac{\pi\Omega_e^2\omega_{Be}^3}{12\omega^5}\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{Be}^2}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{mc^2\omega_{Be}}{\omega T}\right).$$

---

[1]) В этом выражении с ультрарелятивистской точностью написан нормировочный коэффициент; полагать $\varepsilon \approx cp$ еще нельзя ввиду дальнейшего интегрирования по p от 0 до ∞.

§ 56. Электромагнитные волны в магнитоактивной холодной плазме

Выведем общее уравнение, определяющее зависимость частоты от волнового вектора (или, как говорят, закон дисперсии) для свободных монохроматических волн, распространяющихся в среде с произвольным диэлектрическим тензором $\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k})$.

Для электромагнитного поля, зависящего от времени и координат по закону $\exp(-i\omega t + i\mathbf{kr})$, уравнения Максвелла (28.2) принимают вид [1]

$$[\mathbf{kE}] = \frac{\omega}{c}\mathbf{B}, \qquad [\mathbf{kB}] = -\frac{\omega}{c}\mathbf{D}, \tag{56.1}$$

$$\mathbf{kB} = 0, \qquad \mathbf{kD} = 0. \tag{56.2}$$

Подставив первую из формул (56.1) во вторую, получим

$$\frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{D} = -[\mathbf{k}[\mathbf{kE}]] = \mathbf{E}k^2 - \mathbf{k}(\mathbf{kE}),$$

или, в компонентах,

$$E_\alpha k^2 - k_\alpha k_\beta E_\beta = \frac{\omega^2}{c^2}D_\alpha = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{\alpha\beta}E_\beta. \tag{56.3}$$

Условие совместности этой системы линейных однородных уравнений выражается равенством нулю определителя:

$$\left| k^2\delta_{\alpha\beta} - k_\alpha k_\beta - \frac{\omega^2}{c^2}\,\varepsilon_{\alpha\beta} \right| = 0. \tag{56.4}$$

Это и есть искомое *дисперсионное уравнение* [2]. При заданном (вещественном) $\mathbf{k}$ оно определяет частоты $\omega(\mathbf{k})$ (вообще говоря, комплексные), или, как говорят, спектр *собственных колебаний среды*. В общем случае наличия частотной и пространственной дисперсий уравнение (56.4) определяет бесконечное множество ветвей функции $\omega(\mathbf{k})$.

Рассмотрим электромагнитные волны в холодной магнитоактивной плазме с тензором диэлектрической проницаемости, даваемым формулами (52.7) и (52.11) [3]. Ввиду эрмитовости этого тензора заранее ясно, что определяемые уравнением (56.4) значения k^2c^2/ω^2 вещественны.

---

[1] Не смешивать переменное магнитное поле волны $\mathbf{B}$ с постоянным полем $\mathbf{B}_0$!

[2] В кристаллооптике его называют *уравнением Френеля.*

[3] Электромагнитные волны в холодной магнитоактивной плазме были впервые исследованы, в пренебрежении ролью ионов, *Эпплтоном* (*E. V. Appleton*, 1928) и *Лассеном* (*H. Lassen*, 1927).

Поскольку в отсутствие пространственной дисперсии $\varepsilon_{\alpha\beta}$ зависят только от ω, то по отношению к $\mathbf{k}$ дисперсионное уравнение (56.4) — алгебраическое. Раскрыв определитель, получим после простого вычисления [1])

$$A\left(\frac{kc}{\omega}\right)^4 + B\left(\frac{kc}{\omega}\right)^2 + C = 0, \tag{56.5}$$

где

$$A = \frac{1}{k^2}\varepsilon_{\alpha\beta}k_\alpha k_\beta = \varepsilon_\perp \sin^2\theta + \varepsilon_{||}\cos^2\theta \equiv \varepsilon_l, \tag{56.6}$$

$$B = -\varepsilon_\perp\varepsilon_{||}(1+\cos^2\theta) - (\varepsilon_\perp^2 - g^2)\sin^2\theta, \tag{56.7}$$

$$C = \varepsilon_{||}(\varepsilon_\perp^2 - g^2) \tag{56.8}$$

(θ — угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{B}_0$). При заданных значениях ω и θ уравнение (56.5) дает два значения k^2, т. е. в плазме могут распространяться, вообще говоря, два типа волн [2]).

Рассмотрим сначала случаи распространения волн строго вдоль ($\theta = 0$) и строго поперек ($\theta = \pi/2$) магнитного поля, представляющие специфические особенности.

При $\theta = 0$ корни дисперсионного уравнения дают

$$\left(\frac{kc}{\omega}\right)^2 = \varepsilon_\perp \pm g = 1 - \frac{\Omega_e^2}{\omega(\omega \pm \omega_{Be})} - \frac{\Omega_i^2}{\omega(\omega \mp \omega_{Bi})}. \tag{56.9}$$

Из уравнений (56.3) легко видеть, что эти волны поперечны ($E_z = 0$) и поляризованы по кругу ($E_y/E_x = \mp i$). Обращение выражений (56.9) в бесконечность при $\omega = \omega_{Be}$ или при $\omega = \omega_{Bi}$ отвечает резонансу — совпадению частоты и направления вращения вектора $\mathbf{E}$ с частотой и направлением ларморовского вращения электронов или ионов. На рис. 17 показан, для иллюстрации, примерный ход величины $n^2 = (ck/\omega)^2$ как функции ω. При $\omega \to 0$ значения n^2 стремятся к предельному значению

$$1 + \frac{\Omega_i^2}{\omega_{Bi}^2} = 1 + \frac{c^2}{u_A^2}$$

(пренебрежено ω_{Bi} по сравнению с ω_{Be}; u_A определено ниже формулой (56.18)). Распространению незатухающих волн отвечают, конечно, лишь те части кривых (показанные на рисунке сплошными линиями), на которых $n^2 > 0$.

---

[1]) При вычислении целесообразно выбрать одну из координатных плоскостей (скажем, плоскость xz) проходящей через $\mathbf{B}_0$ и $\mathbf{k}$.

[2]) Соответствующие им волны принято различать названиями *обыкновенной* и *необыкновенной*. Эти термины, однако, не имеют здесь того смысла, как в оптике одноосных кристаллов, — ни одна из этих волн не ведет себя как волна в изотропной среде.

При $\theta = 0$ уравнение (56.5) удовлетворяется также и при $\varepsilon_{\|} = 0$, что соответствует обычным продольным плазменным волнам с независящей от $\mathbf{k}$ частотой $\omega \approx \Omega_e$.

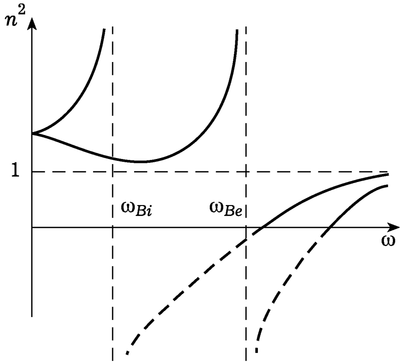


Рис. 17

При $\theta = \pi/2$ два корня дисперсионного уравнения:

$$\left(\frac{ck}{\omega}\right)^2 = \varepsilon_{\|}, \qquad \left(\frac{ck}{\omega}\right)^2 = \varepsilon_{\perp} - \frac{g^2}{\varepsilon_{\perp}}. \tag{56.10}$$

Первому отвечает волна с независящим от $\mathbf{B}_0$ законом дисперсии

$$\omega^2 \approx c^2k^2 + \Omega_e^2.$$

Эта волна поперечна ($\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$) и линейно поляризована, причем $\mathbf{E} \parallel \mathbf{B}_0$. Второму корню (56.10) отвечает волна с полем $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}_0$, имеющим составляющие как продольную, так и поперечную по отношению к $\mathbf{k}$. Если частота настолько велика, что вкладом ионов в $\varepsilon_{\alpha\beta}$ можно пренебречь ($\omega \gg (\omega_{Be}\omega_{Bi})^{1/2}$ — условие (52.15)), то в этой волне[1])

$$\left(\frac{ck}{\omega}\right)^2 = 1 - \frac{\Omega_e^2(\omega^2 - \Omega_e^2)}{\omega^2(\omega^2 - \omega_{Be}^2 - \Omega_e^2)}. \tag{56.11}$$

В общем случае произвольных углов θ (отличных от 0 или $\pi/2$) замечаем прежде всего, что для каждого значения существуют частоты, при которых коэффициент A в уравнении (56.5) обращается в нуль:

$$\varepsilon_l \equiv \varepsilon_{\perp}\sin^2\theta + \varepsilon_{\|}\cos^2\theta =$$
$$= 1 - \frac{\Omega_e^2 + \Omega_i^2}{\omega^2}\cos^2\theta - \left[\frac{\Omega_e^2}{\omega^2 - \omega_{Be}^2} + \frac{\Omega_i^2}{\omega^2 - \omega_{Bi}^2}\right]\sin^2\theta = 0. \tag{56.12}$$

Если для определяемых этим уравнением частот (так называемые *частоты плазменных резонансов*) выполняется также условие «медленности» $\omega \ll kc$, то согласно § 32 им отвечают продольные собственные колебания плазмы. В то же время обращение в нуль коэффициента при k^4 в квадратном (относительно k^2) уравнении (56.5) означает обращение одного из его корней в бесконечность; при $A \to 0$ эти корни равны $-C/B$ и $-B/A$.

---

[1]) Колебания плазмы, в которых ионы не играют роли, принято вообще называть *высокочастотными*; колебания же, в которых влияние ионов существенно, называют *низкочастотными*.

Уравнение (56.12) — кубическое относительно ω^2 и имеет три вещественных корня. Их легко определить, использовав малость отношений Ω_i/Ω_e и ω_{Bi}/ω_{Be}. Два корня получаются при пренебрежении в (56.12) вкладом ионов и равны

$$\omega_{1,2}^2 \approx \frac{1}{2}(\Omega_e^2 + \omega_{Be}^2) \pm \frac{1}{2}[(\Omega_e^2 + \omega_{Be}^2)^2 - 4\Omega_e^2\omega_{Be}^2 \cos^2\theta]^{1/2}. \quad (56.13)$$

Учет ионов, однако, необходим в области $\omega \approx \omega_{Bi}$, в которой лежит третий корень; для этого корня легко получить выражение

$$\omega_3^2 \approx \omega_{Bi}^2\left(1 - z\frac{m}{M}\operatorname{tg}^2\theta\right) \quad (56.14)$$

(здесь предположено $\Omega_e \gg \omega_{Bi}$). Формулы (56.13) и (56.14) для $\omega_2(\theta)$ и $\omega_3(\theta)$ неприменимы при углах θ, настолько близких к $\pi/2$, что $\cos\theta \ll m/M$. В этой области

$$\omega_2^2 \equiv \omega_{2\text{г}}^2 = \frac{\omega_{Be}^2(\Omega_i^2 + \omega_{Bi}^2)}{\Omega_e^2 + \omega_{Be}^2}, \quad \omega_3^2 = \frac{\Omega_e^2\omega_{Bi}^2\cos^2\theta}{\Omega_e^2 + \omega_{Be}^2}. \quad (56.15)$$

Ролью ионов нельзя пренебречь не только для ω_3, но и для ω_2.

На рис. 18 изображен схематически характер зависимости частот ω_1, ω_2, ω_3 от угла θ [1]). Кривые $\omega_1(\theta)$ и $\omega_2(\theta)$ никогда не пересекаются друг с другом. Первая из них начинается (при $\theta = 0$) от большей, а вторая — от меньшей из частот Ω_e и ω_{Be}. При $\theta = \pi/2$ они достигают соответственно значений

$$\omega_{1\text{г}} = (\Omega_e^2 + \omega_{Be}^2)^{1/2} \quad (56.16)$$

и $\omega_{2\text{г}}$. Частоты $\omega_{1\text{г}}$ и $\omega_{2\text{г}}$ называют соответственно *верхней* и *нижней гибридными* частотами. При $\Omega_e^2 \gg \omega_{Be}^2$ (а потому и заведомо $\Omega_i^2 \gg \omega_{Bi}^2$) вторая из них: $\omega_{2\text{г}} = (\omega_{Be}\omega_{Bi})^{1/2}$.

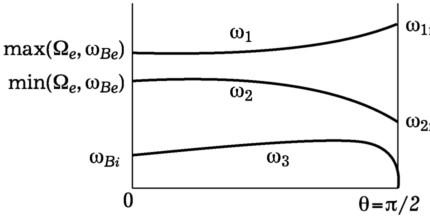


Рис. 18

Положение частот ω_1, ω_2, ω_3 в значительной степени задает расположение различных ветвей спектра, определяемого дисперсионным уравнением (56.5). Как квадратное по $(ck/\omega)^2$ уравнение оно имеет при заданных ω и θ два корня. Проследив (при заданном θ) за изменением и обращением в бесконечность этих корней как функций ω, легко прийти к рис. 19, на котором схематически показан ход этих функций. Точки пересечения кривых

[1]) Сразу же отметим, что колебания с частотой ω_3 фактически существуют лишь именно в узком интервале углов вблизи $\pi/2$. В остальной же области углов эти колебания сильно затухают из-за циклотронного поглощения на простом ионном резонансе.

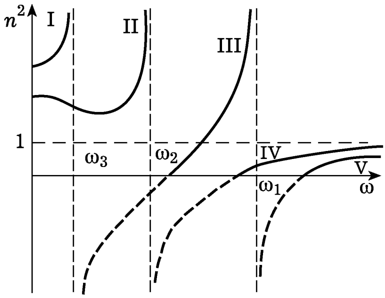


Рис. 19

с осью абсцисс определяются уравнением $C = 0$, т. е. $\varepsilon_{\|} = 0$ или $\varepsilon_{\perp}^2 = g^2$. Положение этих точек не зависит от угла θ; одна из них (корень уравнения $\varepsilon_{\|} = 0$) есть всегда $\omega \approx \Omega_e$.

Спектр собственных колебаний холодной магнитоактивной плазмы содержит, таким образом, всего пять ветвей. Две из них (ветви I и II на рис. 19) достигают области низкочастотных колебаний; предельные (при $\omega \to 0$) значения фазовой скорости в этих ветвях равны

$$\left(\frac{\omega}{k}\right)_{\mathrm{I}} = \frac{u_A|\cos\theta|}{(1+u_A^2/c^2)^{1/2}}, \qquad \left(\frac{\omega}{k}\right)_{\mathrm{II}} = \frac{u_A}{(1+u_A^2/c^2)^{1/2}}, \tag{56.17}$$

где

$$u_A = c\frac{\omega_{Bi}}{\Omega_i} = \frac{B_0}{(4\pi N_i M)^{1/2}}; \tag{56.18}$$

эту величину называют *альвеновской скоростью.* Выражения (56.17) легко найти из уравнения (56.5), воспользовавшись предельными выражениями

$$\varepsilon_{\perp} \approx 1 + \frac{u_A^2}{c^2}, \quad \varepsilon_{\|} \approx -\frac{\Omega_e^2}{\omega^2}, \quad g \sim O(\omega).$$

При $u_A \ll c$ фазовые скорости (56.17) равны соответственно $u_A|\cos\theta|$ и u_A. Эти предельные значения соответствуют волнам, которые существуют в холодной плазме согласно обычным уравнениям магнитной гидродинамики (см. VIII, § 52). Действительно, спектр магнитогидродинамических волн содержит три ветви. Во всех трех ветвях функция $\omega(\mathbf{k})$ линейна, но, вообще говоря, зависит от направления $\mathbf{k}$:

$$\begin{gathered}(\omega/k)_A^2 = u_A^2\cos^2\theta,\\ (\omega/k)_{\text{б}}^2 = \frac{1}{2}\{u_s^2 + u_A^2 + [(u_s^2+u_A^2)^2 - 4u_s^2u_A^2\cos^2\theta]^{1/2}\},\\ (\omega/k)_{\text{м}}^2 = \frac{1}{2}\{u_s^2 + u_A^2 - [(u_s^2+u_A^2)^2 - 4u_s^2u_A^2\cos^2\theta]^{1/2}\}\end{gathered} \tag{56.19}$$

(u_s — скорость звука, формально вычисленная по адиабатической сжимаемости среды). Фазовая скорость первой из этих ветвей (их называют *альвеновскими волнами*) прямо совпадает с предельным значением скорости первой из ветвей (56.17). Для того чтобы перейти к холодной плазме во второй формуле, следует положить в ней $u_s = 0$ (поскольку в газе $u_s \sim (T/M)^{1/2}$).

При этом $(\omega/k)_б$ (соответствующие волны называют *быстрыми магнитозвуковыми*) совпадает с предельным значением $(\omega/k)_{II}$. Что касается третьей ветви, $(\omega/K)_м$ (она называется *медленной магнитозвуковой* волной), то ее скорость обращается в нуль при $u_s \to 0$ и потому она в холодной плазме отсутствует. Отметим, что предположение о холодности плазмы позволяет пренебрегать тепловым разбросом скоростей ионов и описывать их гидродинамически даже в отсутствие столкновений. Условие $u_A \ll c$ оправдывает пренебрежение токами смещения в уравнениях магнитной гидродинамики.

В обратном случае больших частот фазовые скорости двух ветвей (IV и V) стремятся к значениям $\omega/k = c$, отвечающим поперечным высокочастотным волнам в изотропной плазме, — как и должно было быть, поскольку при $\omega \gg \omega_{Be}$ магнитное поле не играет роли.

Наконец, остановимся на интересном случае волн, которые могут иметь место при $\Omega_e \gg \omega_{Be}$; при этом резонансная частота $\omega_2 \approx \omega_{Be}\cos\theta$. Рассмотрим в этом случае область частот, промежуточных (на ветви II) между ω_2 и $\omega_3 \approx \omega_{Bi}$, определяемую неравенствами

$$\omega_{Bi} \ll \omega \ll \omega_{Be}\cos\theta, \quad \omega \ll \frac{\Omega_e^2}{\omega_{Be}}. \tag{56.20}$$

Условие $\omega \gg \omega_{Bi}$ позволяет пренебречь в g вкладом ионов, а в силу условия $\omega \ll \omega_{Be}$ будет

$$\varepsilon_{xy} = ig = -i\frac{\Omega_e^2}{\omega\omega_{Be}}. \tag{56.21}$$

При условиях (56.20) будет также $\varepsilon_{||} \gg g \gg \varepsilon_\perp$.

Искомое решение дисперсионного уравнения получается более прямым образом, если записать последнее в виде

$$\left|k^2\varepsilon^{-1}_{\alpha\beta} - k_\alpha k_\gamma \varepsilon^{-1}_{\gamma\beta} - \frac{\omega^2}{c^2}\,\delta_{\alpha\beta}\right| = 0, \tag{56.22}$$

перейдя в (56.4) от тензора $\varepsilon_{\alpha\beta}$ к его обратному (т. е. выразив в уравнениях (57.3) $\mathbf{E}$ через $\mathbf{D}$). Компоненты обратного тензора:

$$\varepsilon^{-1}_{xx} = \varepsilon^{-1}_{yy} \approx \frac{-\,\varepsilon_\perp}{g^2}, \quad \varepsilon^{-1}_{zz} = \frac{1}{\varepsilon_{||}}, \quad \varepsilon^{-1}_{xy} = -\varepsilon^{-1}_{yx} \approx \frac{i}{g},$$

и наибольшей из них будет ε^{-1}_{xy}. Пренебрегая остальными компонентами (и выбрав плоскость xz проходящей через $\mathbf{B}_0$ и $\mathbf{k}$), получим дисперсионное уравнение

$$\begin{vmatrix} -\dfrac{\omega^2}{c^2} & \dfrac{ik_z^2}{g} \\ -\dfrac{ik^2}{g} & -\dfrac{\omega^2}{c^2} \end{vmatrix} = 0,$$

откуда

$$\omega = k^2c^2\frac{\omega_{Be}}{\Omega_e^2}|\cos\theta| = \frac{cB_0|\cos\theta|}{4\pi eN_e}k^2. \qquad (56.23)$$

Эти волны называют *геликоидальными* [1]; они имеют чисто электронное происхождение.

Название этих волн связано с характером их поляризации. Из равенства $\mathbf{kD} = 0$ (56.2) при сделанном выборе координатных осей имеем

$$D_x\sin\theta + D_z\cos\theta = 0. \qquad (56.24)$$

Из уравнений же (56.3), написанных в виде

$$[k^2\varepsilon^{-1}_{\alpha\beta} - k_\alpha k_\gamma\varepsilon^{-1}_{\gamma\beta}]D_\beta = \frac{\omega^2}{c^2}D_\alpha, \qquad (56.25)$$

находим $D_x = -i|\cos\theta|D_y$. В том же приближении (т. е. при сохранении из всех $\varepsilon^{-1}_{\alpha\beta}$ лишь ε^{-1}_{xy}) электрическое поле волны лежит целиком в плоскости xy, перпендикулярной $\mathbf{B}_0$: $E_z = \varepsilon^{-1}_{z\beta}D_\beta = 0$. Компоненты же

$$E_x = \varepsilon^{-1}_{xy}D_y, \quad E_y = \varepsilon^{-1}_{yx}D_x = -\varepsilon^{-1}_{xy}D_x,$$

и из (56.24) следует

$$E_y = i|\cos\theta|E_x. \qquad (56.26)$$

Таким образом, волна эллиптически поляризована в плоскости, перпендикулярной $\mathbf{B}_0$; при $\theta = \pi/2$ поляризация становится линейной. В системе же координат $\xi y\zeta$, с осью ζ вдоль $\mathbf{k}$, имеем

$$E_\xi = -i\frac{|\cos\theta|}{\cos\theta}E_y, \quad E_\zeta = E_\xi\operatorname{tg}\theta. \qquad (56.27)$$

Вектор $\mathbf{E}$ вращается вокруг направления $\mathbf{k}$, описывая круговой конус.

Отметим, что выражение (56.21) для ε_{xy} имеет простой физический смысл. При $\omega_{Be} \gg \omega$ (вместе с подразумевающимся везде условием (52.17) $k_\perp v_{Te}/\omega_{Be} = k_\perp r_{Be} \ll 1$) можно считать, что поперечное (по отношению к $\mathbf{B}_0$) движение электронов происходит в постоянном и однородном поле $\mathbf{E}$. Но при движении заряда в постоянных и однородных скрещенных полях $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}_0$ его средняя поперечная скорость (скорость электрического дрейфа) есть

$$\overline{\mathbf{v}}_\perp = c\frac{[\mathbf{EB}_0]}{B_0^2} \qquad (56.28)$$

(см. II, § 22). Именно этой скорости и отвечает выражение (56.21). Таким образом, геликоидальные волны связаны с электрическим дрейфом электронов в плазме.

---

[1] В геофизике их называют *свистящими атмосфериками*.

§ 57. Влияние теплового движения на распространение электромагнитных волн в магнитоактивной плазме

При учете теплового движения частиц дисперсионное уравнение становится, вообще говоря, трансцендентным и приводит к бесчисленному множеству ветвей функции $\omega(\mathbf{k})$. Подавляющее большинство этих колебаний, однако, сильно затухает. Лишь в исключительных случаях затухание оказывается слабым и колебания могут распространяться в виде волн. К этим случаям относятся, прежде всего, рассмотренные в предыдущем параграфе волны, для которых тепловое движение приводит (при соблюдении условий (52.17) и (53.17)) лишь к малым поправкам в законе дисперсии и к малому коэффициенту затухания Ландау.

Мы видели, однако, что для волн в холодной плазме существуют области частот, в которых отношение kc/ω становится сколь угодно большим (окрестности плазменных резонансов). Но при $k \to \infty$ условия (52.17) заведомо нарушаются, так что учет теплового движения становится необходимым. Покажем теперь, что учет теплового движения уже как малой поправки в диэлектрической проницаемости устраняет расходимость корней дисперсионного уравнения и приводит к некоторым качественно новым свойствам спектра колебаний плазмы (*Б.Н. Гершман*, 1956). При этом, как мы увидим, все еще могут быть выполнены условия, обеспечивающие экспоненциальную малость затухания Ландау, так что антиэрмитовой частью $\varepsilon_{\alpha\beta}$ можно по-прежнему пренебречь. Будем для определенности говорить об окрестности высокочастотных плазменных резонансов, где достаточно учесть тепловое движение лишь электронов.

Поправочные члены в $\varepsilon_{\alpha\beta}$ пропорциональны $(kv_{Te})^2$ [1]). Такие же поправки возникнут и в коэффициентах A, B, C дисперсионного уравнения (56.5). Имея в виду исследовать лишь расходящийся корень этого уравнения, достаточно учесть поправочные члены только в коэффициенте A, обращающемся (без поправок) в точке резонанса в нуль.

Представим этот коэффициент в окрестности резонансной частоты (пусть это будет ω_1) в виде

$$A = a_r(\omega - \omega_1) - A_{1r}\left(\frac{v_{Te}k}{\omega_1}\right)^2. \tag{57.1}$$

Второй член представляет собой поправку от теплового движения. Коэффициенты a_r и A_{1r} берутся в точке $\omega = \omega_1$, так что от переменной ω уже не зависят (но зависят, конечно, от направления $\mathbf{k}$, т. е. от угла θ). Положив $\omega = \omega_1$ также и в коэффициентах

[1]) Они получаются из членов первого порядка в разложении подынтегрального выражения в (54.5) по степеням k^2.

B и C (и обозначив эти их значения через B_r и C_r), получим дисперсионное уравнение в окрестности резонансной частоты в виде

$$\left[a_r(\omega-\omega_1) - A_{1r}\frac{v_{Te}^2}{c^2}\left(\frac{kc}{\omega_1}\right)^2\right]\left(\frac{kc}{\omega_1}\right)^4 + B_r\left(\frac{kc}{\omega_1}\right)^2 + C_r = 0. \quad (57.2)$$

Нас интересует тот корень этого уравнения, который при $v_{Te}\to 0$ переходит в

$$\left(\frac{kc}{\omega_1}\right)^2 \approx -\frac{B_r}{a_r(\omega-\omega_1)},$$

т. е.

$$\omega-\omega_1 = -\frac{B_r\omega_1^2}{a_r c^2 k^2}. \quad (57.3)$$

Поскольку в этом решении $(kc/\omega_1)^2$ велико, то для его отыскания следует опустить в (57.2) не содержащий этой большой величины член C_r. Тогда получим следующий закон дисперсии:

$$\omega-\omega_1 = \frac{A_{1r}}{a_r}\left(\frac{kv_{Te}}{\omega_1}\right)^2 - \frac{B_r}{a_r}\left(\frac{\omega_1}{kc}\right)^2. \quad (57.4)$$

Здесь надо различать два случая в зависимости от знака A_{1r} (величины же a_r и B_r всегда положительны)[1]).

На рис. 20 сплошной линией изображен закон дисперсии (57.4) при $A_{1r}>0$. Кривая пересекает ось абсцисс в точке[2])

$$k^2 = \frac{\omega_1^2}{cv_{Te}}\sqrt{\frac{B_r}{A_{1r}}}. \quad (57.5)$$

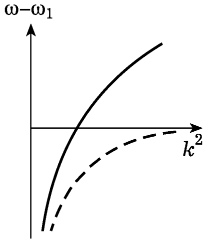


Рис. 20

При $v_{Te}\to 0$ эта точка уходит вправо на бесконечность и мы возвращаемся к кривой, отвечающей закону дисперсии (57.3) для холодной плазмы (штриховая линия на рис. 20).

Обратим внимание на то, что учет теплового движения приводит, таким образом, к продлению ветви спектра колебаний в область $\omega>\omega_1$. В пределе равного нулю внешнего поля именно эта часть ветви отвечает обычным продольным плазменным колебаниям: в отсутствие поля коэффициент $B_r=0$, частота ω_1 совпадает с Ω_e и вся кривая

---

[1]) В положительности B_r легко убедиться из выражений (56.6), (56.7): исключив $\varepsilon_\parallel$ с помощью условия $A=0$, находим $B_r=\varepsilon_\perp^2\operatorname{tg}^2\theta+g^2\sin^2\theta>$ >0. Из выражения (56.6) для A и выражений (52.11) для $\varepsilon_\perp$ и $\varepsilon_\parallel$ следует, что $\partial A/\partial\omega>0$; поэтому положительно и $a_r=(\partial A/\partial\omega)_{\omega=\omega_1}$.

[2]) Отметим, что для этого значения k отношение kv_{Te}/ω_1 содержит $(v_{Te}/c)^{1/2}$ и потому мало. Это и есть упомянутое выше условие малости затухания Ландау.

зависимости $\omega - \Omega_e$ от k^2 сводится к выходящей из начала координат прямой, уравнение которой совпадает с (32.5) [1]).

В пренебрежении тепловым движением колебания в плазменных резонансах продольны. Подчеркнем, что при учете пространственной дисперсии это свойство, строго говоря, исчезает: величина $A = \varepsilon_{\alpha\beta}k_\alpha k_\beta/k^2 \equiv \varepsilon_l$ становится зависящей от k, и равенство $\varepsilon_l = 0$ (условие продольности колебаний) делается несовместимым со связью между теми же переменными ω, k, θ, даваемой дисперсионным уравнением. Как в самих точках плазменных резонансов (вообще теряющих свою выделенность), так и в их окрестностях волны остаются, однако, почти продольными: ввиду малости A и медленности волны (малости ω/kc), поперечная компонента $E^{(t)}$ мала (согласно (32.10)) по сравнению с $E^{(l)}$.

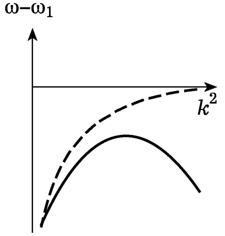


Рис. 21

Обратимся к случаю $A_{1r} < 0$. Характер зависимости $\omega - \omega_1$ от k для этого случая изображен на рис. 21. Кривая не выходит в область $\omega > \omega_1$, загибаясь обратно в точке максимума с координатами

$$k^2 = \frac{\omega_1^2}{cv_{Te}}\left(\frac{B_r}{|A_{1r}|}\right)^{1/2}, \quad \omega - \omega_1 = \frac{2v_{Te}}{a_r c}(|A_{1r}|B_r)^{1/2}. \tag{57.6}$$

При $v_{Te} \to 0$ эта точка уходит вправо на бесконечность, одновременно приближаясь к оси абсцисс, и мы снова возвращаемся к кривой закона (57.3).

В качестве еще одного примера рассмотрим поперечные волны вблизи электронного циклотронного резонанса, распространяющиеся вдоль магнитного поля. В пренебрежении тепловым движением закон дисперсии этих волн дается формулой (56.9) (с нижними знаками), причем в окрестности точки $\omega = \omega_{Be}$ [2])

$$\omega = \omega_{Be}\left(1 - \frac{\Omega_e^2}{k^2c^2}\right) \tag{57.7}$$

(при этом $kc \gg \Omega_e$), весь этот спектр лежит при $\omega < \omega_{Be}$.

---

[1]) В связи с этим волны, отвечающие (в магнитоактивной плазме) верхней части сплошной линии на рис. 20, принято называть плазменными, в отличие от обыкновенных или необыкновенных волн, отвечающих нижней части этой кривой. Подчеркнем, однако, условность этой терминологии: в действительности мы имеем здесь дело с единой ветвью спектра колебаний, точка пересечения которой с осью абсцисс (точка $\omega = \omega_1$) ничем не замечательна.

[2]) Для большей определенности считаем, что не только $\omega_{Be} - \omega \ll \omega_{Be}$, но и что $\Omega_e > \omega_{Be}$, так что единицей в правой части (56.9) можно заведомо пренебречь.

Для исследования этих волн с учетом теплового движения электронов надо составить дисперсионное уравнение с тензором диэлектрических проницаемостей (55.7), как раз относящимся к области циклотронного резонанса [1]). Раскрыв определитель (56.4) (с вектором **k**, направленным вдоль оси z), получим

$$\frac{k^2c^2}{\omega^2} = 1 + \frac{\Omega_e^2}{\omega(\omega - \omega_{Be})} F\left(\frac{\omega - \omega_{Be}}{\sqrt{2}\,kv_{Te}}\right). \tag{57.8}$$

Вне линии резонансного поглощения, т. е. при $|\omega_{Be} - \omega| \gg kv_{Te}$ (но, конечно, по-прежнему $|\omega_{Be} - \omega| \ll \omega_{Be}$), это соотношение принимает вид

$$\frac{k^2c^2}{\omega_{Be}^2} = -\frac{\Omega_e^2}{\omega_{Be}(\omega - \omega_{Be})} + i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\Omega_e^2}{\omega_{Be}kv_{Te}} \exp\left(-\frac{(\omega - \omega_{Be})^2}{2k^2v_{Te}^2}\right).$$

Отсюда снова получается закон дисперсии (57.7) для вещественной части частоты и выражение

$$\gamma = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\omega_{Be}\frac{\omega_{Be}}{kv_{Te}}\left(\frac{\Omega_e}{ck}\right)^4 \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\Omega_e}{ck}\right)^4\left(\frac{\omega_{Be}}{kv_{Te}}\right)^2\right\} \tag{57.9}$$

для коэффициента затухания Ландау.

При дальнейшем приближении ω к ω_{Be}, в области $|\omega_{Be} - \omega| \ll kv_{Te}$, коэффициент затухания растет, становясь сравнимым с самой частотой ω; в этой области уже нельзя говорить о распространении волн.

§ 58. Уравнения гидродинамики магнитоактивной плазмы

Если характерные пространственные размеры L в движущейся плазме велики по сравнению с длинами свободного пробега,

$$L \gg l, \tag{58.1}$$

то можно считать, что благодаря столкновениям в каждом небольшом участке плазмы устанавливается термодинамическое равновесие со своими местными значениями температуры (одинаковыми для электронов и ионов), давления и т. п. В таких случаях движение плазмы может описываться макроскопическими гидродинамическими уравнениями.

Уравнения магнитной гидродинамики были написаны в VIII, § 51. При этом, однако, подразумевалось, что кинетические коэффициенты среды (ее вязкость, теплопроводность) не зависят

[1]) Напомним, что формулы (55.7) предполагают также и соблюдение условия (55.4): $\omega_{Be} \gg kv_{Te}$.

от магнитного поля. В плазме для этого должны быть выполнены условия

$$\nu_i \gg \omega_{Bi}, \quad \nu_e \gg \omega_{Be}$$

(втрое условие следует из первого). Эти условия часто оказываются слишком жесткими, в связи с чем возникает необходимость в составлении гидродинамических уравнений, свободных от указанного ограничения [1]).

Уравнение непрерывности для массовой плотности ρ сохраняет, конечно, свой обычный вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{V} = 0, \tag{58.2}$$

где $\mathbf{V}$ — макроскопическая скорость. Остается прежним также и общий вид уравнения Навье–Стокса

$$\rho \left[\frac{\partial V_\alpha}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla) V_\alpha \right] + \frac{\partial P}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{c}[\mathbf{jB}]_\alpha = -\frac{\partial \sigma'_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} \tag{58.3}$$

и уравнение сохранения энергии

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho V^2}{2} + \rho U + \frac{B^2}{8\pi} \right) = \\ = -\operatorname{div}\left[\rho \mathbf{V} \left(\frac{V^2}{2} + W \right) - (\sigma' \mathbf{V}) + \frac{c}{4\pi}[\mathbf{EB}] + \mathbf{q} \right], \tag{58.4}$$

где $\sigma^*_{\alpha\beta}$ — тензор вязких напряжений; $(\sigma'\mathbf{V})$ обозначает вектор с составляющими $\sigma'_{\alpha\beta} V_\beta$; $\mathbf{q}$ — плотность потока энергии, включающая в себя как диссипативную часть, связанную с теплопроводностью и термоэлектрическими явлениями, так и конвективный перенос энергии током (см. ниже определение (58.8)); U и W — внутренняя энергия и тепловая функция среды, отнесенные к единице ее массы. Тензор $\sigma'_{\alpha\beta}$ и вектор $\mathbf{q}$ должны быть выражены через градиенты термодинамических величин и скорости; вид этих выражений как раз и зависит от магнитного поля.

В связи с уравнением (58.3) необходимо сделать следующее замечание. В этом уравнении учтена сила, действующая на плазму со стороны магнитного поля (последний член слева), но опущена сила

$$e(zN_i - N_e)\mathbf{E},$$

действующая со стороны электрического поля. Это пренебрежение в данном случае оправдано: из условия (58.1) следует, что и

[1]) Кроме того, в VIII, § 51, были опущены члены в уравнениях, описывающие термоэлектрический эффект.

подавно $L \gg a$, а потому плазма квазинейтральна, так что можно положить $zN_i = N_e$ и некомпенсированные заряды в плазме отсутствуют [1]).

К уравнениям (58.2)–(58.4) надо добавить уравнения Максвелла для квазистационарного электромагнитного поля (уравнения без тока смещения):

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}. \tag{58.5}$$

Напомним, что квазистационарность поля означает малость частоты его изменения ω в смысле $\omega \ll c/L$. При этом электрическое поле, индуцируемое переменным магнитным полем, $E \sim \omega LB/c \ll B$; именно поэтому в (58.4) надо учитывать плотность энергии лишь магнитного, но не электрического, поля. Отметим также, что пренебрежение током смещения находится в соответствии с предположением о квазинейтральности плазмы: из последнего уравнения (58.5) следует $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$.

Наконец, надо присоединить уравнение, выражающее «обобщенный закон Ома», вида

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{VB}] = \mathbf{F}, \tag{58.6}$$

где $\mathbf{F}$ — некоторая линейная комбинация тока $\mathbf{j}$ и градиентов термодинамических величин. Напомним (ср. VIII, § 49), что происхождение комбинации из $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ в левой части (58.6) связано с преобразованием $\mathbf{E}$ при переходе от системы покоя данного элемента объема среды к системе отсчета, в которой он движется со скоростью $\mathbf{V}$.

В квазинейтральной плазме относительная концентрация ее компонент (электроны и ионы) есть заданная неизменная величина ($N_e/N_i = z$). Поэтому независимыми термодинамическими переменными являются лишь температура и давление; вопрос о выражении $\mathbf{F}$ и $\mathbf{q}$ через градиенты этих величин (и ток $\mathbf{j}$) формально совпадает с таким же вопросом в теории термогальваномагнитных эффектов в металлах (см. VIII, § 25) [2]).

Соотношения между $\mathbf{j}$ и $\mathbf{q}$, с одной стороны, и полем и градиентами термодинамических величин — с другой, записываются

[1]) Это рассуждение основано на неравенстве $l \gg a$. Напомним, что мы везде имеем в виду полностью ионизованную плазму. В частично ионизованной плазме неравенство $l \gg a$ может не выполняться ввиду уменьшения длины пробега благодаря столкновениям с нейтральными атомами, и тогда требование $L \gg a$ надо рассматривать как дополнительное условие, необходимое для пренебрежения объемной электрической силой.

[2]) Снова напомним, что речь идет о полностью ионизованной плазме. Наличие нескольких видов тяжелых частиц (различные ионы, нейтральные атомы) потребовало бы учета соответствующих диффузионных процессов.

в виде, обобщающем соотношения (44.12), (44.13):

$$F_\alpha + \frac{1}{e}\frac{\partial\mu_e}{\partial x_\alpha} = \sigma^{-1}_{\alpha\beta} j_\beta + \alpha_{\alpha\beta}\frac{\partial T}{\partial x_\beta}, \tag{58.7}$$

$$q_\alpha = -\frac{\mu_e}{e} j_\alpha + \beta_{\alpha\beta} j_\beta - \varkappa_{\alpha\beta}\frac{\partial T}{\partial x_\beta}. \tag{58.8}$$

Здесь μ_e — химический потенциал электронов, а тензоры $\sigma'_{\alpha\beta}$, $\alpha_{\alpha\beta}$, $\beta_{\alpha\beta}$ зависят, как от параметра, от магнитного поля $\mathbf{B}$. Отсутствие в левой части (58.8) члена $-\varphi\mathbf{j}$ (ср. (44.13)) связано с тем, что величина $\varphi\mathbf{j}$ уже учтена в (58.4) вектором Пойнтинга в плотности потока энергии. В этом легко убедиться, преобразовав с помощью уравнений Максвелла (58.5) его дивергенцию:

$$-\operatorname{div}\frac{c}{4\pi}[\mathbf{EB}] = \frac{\partial}{\partial t}\frac{B^2}{8\pi} + \mathbf{jE} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{B^2}{8\pi} - \operatorname{div}(\varphi\mathbf{j}).$$

Таким образом, поток энергии $\mathbf{q}$ в (58.8) уже не содержит в себе переноса частицами энергии $-e\varphi$.

В силу принципа Онсагера, коэффициенты в соотношениях (58.7), (58.8) связаны друг с другом соотношениями

$$\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{B}) = \sigma_{\beta\alpha}(-\mathbf{B}), \qquad \varkappa_{\alpha\beta}(\mathbf{B}) = \varkappa_{\beta\alpha}(-\mathbf{B}), \tag{58.9}$$

$$\beta_{\alpha\beta}(\mathbf{B}) = T\alpha_{\beta\alpha}(-\mathbf{B}). \tag{58.10}$$

Поскольку $\mathbf{B}$ — единственный имеющийся в нашем распоряжении векторный параметр, зависимость тензоров от направления $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$ может быть написана в общем виде

$$\alpha_{\alpha\beta}(\mathbf{B}) = \alpha_1\delta_{\alpha\beta} + \alpha_2 b_\alpha b_\beta + \alpha_3 e_{\alpha\beta\gamma} b_\gamma \tag{58.11}$$

(и аналогично для остальных тензоров), где скалярные коэффициенты α_1, α_2, α_3 — функции величины поля B; такая зависимость удовлетворяет требованию симметрии по отношению к инверсии: $\mathbf{B}$ — аксиальный вектор, и его компоненты не меняют знак при инверсии, как должно быть и для компонент истинных тензоров $\alpha_{\alpha\beta}, \ldots$ Отметим, что выражения вида (58.11) автоматически удовлетворяют соотношениям (58.9), а (58.10) принимает вид

$$\beta_{\alpha\beta}(\mathbf{B}) = T\alpha_{\alpha\beta}(\mathbf{B}). \tag{58.12}$$

При фактическом применении выражений (58.7), (58.8) в магнитной гидродинамике градиент химического потенциала удобнее выразить через градиенты давления и температуры согласно

$$\nabla\mu_e = -s_e\nabla T + \frac{1}{N_e}\nabla P_e, \qquad \mu_e = w_e - Ts_e,$$

где $P_e = N_e T = \dfrac{Pz}{1+z}$ — парциальное давление электронов в плазме, s_e и w_e — энтропия и тепловая функция электронной компоненты плазмы, отнесенные к одной частице. Окончательно перепишем соотношения (58.7), (58.8) в векторном виде как

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{VB}] + \frac{1}{eN_e}\nabla P_e = \\ = \frac{\mathbf{j}_{\|}}{\sigma_{\|}} + \frac{\mathbf{j}_{\perp}}{\sigma_{\perp}} + \mathcal{R}[\mathbf{Bj}] + \alpha_{\|}(\nabla T)_{\|} + \alpha_{\perp}(\nabla T)_{\perp} + \mathcal{N}[\mathbf{B}\nabla T], \quad (58.13)$$

$$\mathbf{q} + \frac{w_e}{e}\mathbf{j} = \alpha_{\|}T\mathbf{j}_{\|} + \alpha_{\perp}T\mathbf{j}_{\perp} + \mathcal{N}T[\mathbf{Bj}] - \\ - \varkappa_{\|}(\nabla T)_{\|} - \varkappa_{\perp}(\nabla T)_{\perp} + \mathcal{L}(\mathbf{B}\nabla T], \quad (58.14)$$

где введены новые обозначения для коэффициентов (все они — функции $\mathbf{B}$), а индексы $\|$ и $\perp$ означают составляющие векторов, продольные и поперечные относительно $\mathbf{B}$. Определение коэффициента $\alpha_{\|}$ в (58.13) отличается от его определения в (58.7) включением в него величины s_e/e. Коэффициенты $\mathcal{R}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{L}$ описывают соответственно так называемые эффекты Холла, Нернста и Ледюка–Риги. Напомним также, что члены $\mathcal{R}[\mathbf{Bj}]$ в (58.13) и $\mathcal{L}[\mathbf{B}\nabla T]$ в (58.14) представляют собой бездиссипативные кинетические эффекты: они выпадают из произведений $\mathbf{Ej}$ и $\mathbf{q}\nabla T$ и потому не связаны с увеличением энтропии.

Что касается тензора вязких напряжений $\sigma'_{\alpha\beta}$, то его общее выражение через градиенты макроскопической скорости было написано уже в § 13. В применении к плазме это выражение несколько упрощается ввиду обращения в нуль обоих коэффициентов второй вязкости ζ и ζ_1. Равенство нулю коэффициента ζ есть общее свойство всех одноатомных газов, к каковым относится и плазма. Причина же отсутствия члена с ζ_1 объяснена в следующем параграфе.

Остальные члены в (13.18) в применении к плазме целесообразно несколько перегруппировать, имея в виду, что в плазме влияние магнитного поля на вязкость является, вообще говоря, сильным эффектом (а не слабым, как в нейтральном газе); поэтому не имеет смысла выделять обычный коэффициент вязкости η. Представим здесь $\sigma'_{\alpha\beta}$ в виде, отличающемся от (13.18) лишь тем, что член с η заменен членом

$$\eta_0(3b_\alpha b_\beta - \delta_{\alpha\beta})\left(b_\gamma b_\delta V_{\gamma\delta} - \frac{1}{3}\operatorname{div}\mathbf{V}\right), \quad (58.15)$$

где (вместо $\mathbf{h}$) $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$; о целесообразности такого определения η_0 см. ниже, примеч. на с. 308.

Если выбрать ось z в направлении $\mathbf{b}$, то компоненты тензора напряжений примут вид

$$
\begin{aligned}
\sigma'_{xx} &= -\eta_0\left(V_{zz} - \frac{1}{3}\operatorname{div}\mathbf{V}\right) + \eta_1(V_{xx} - V_{yy}) + 2\eta_3 V_{xy},\\
\sigma'_{yy} &= -\eta_0\left(V_{zz} - \frac{1}{3}\operatorname{div}\mathbf{V}\right) + \eta_1(V_{xx} - V_{yy}) - 2\eta_3 V_{xy},\\
\sigma'_{zz} &= 2\eta_0\left(V_{zz} - \frac{1}{3}\operatorname{div}\mathbf{V}\right),\\
\sigma'_{xy} &= 2\eta_1 V_{xy} - \eta_3(V_{xx} - V_{yy}),\\
\sigma'_{xz} &= 2\eta_2 V_{xz} + 2\eta_4 V_{yz},\\
\sigma'_{yz} &= 2\eta_2 V_{yz} - 2\eta_4 V_{xz}.
\end{aligned}
\qquad (58.16)
$$

§ 59. Кинетические коэффициенты плазмы в сильном магнитном поле

При вычислении кинетических коэффициентов магнитоактивной плазмы надо, как обычно, искать функции распределения частиц в виде $f = f_0 + \delta f$, где δf — малая поправка к локально-равновесному распределению, пропорциональная соответствующему градиенту термодинамических величин. При подстановке такого выражения в кинетическое уравнение, например, для электронов

$$
\frac{\partial f_e}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{r}} - e\mathbf{E}\frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{p}} - \frac{e}{c}[\mathbf{vB}]\frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{p}} = \operatorname{St} f_e \qquad (59.1)
$$

в первых трех членах в левой части полагаем $f_e = f_{0e}$; четвертый же член при этом обращается в нуль (поскольку вектор $\partial f_{0e}/\partial \mathbf{p}$ направлен вдоль $\mathbf{v}$); поэтому здесь надо сохранить член с δf_e, и, таким образом, находим следующее уравнение для δf_e [1]):

$$
\frac{\partial f_{0e}}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f_{0e}}{\partial \mathbf{r}} - e\mathbf{E}\frac{\partial f_{0e}}{\partial \mathbf{p}} = \frac{e}{c}[\mathbf{vB}]\frac{\partial\, \delta f_e}{\partial \mathbf{p}} + I(\delta f_e), \qquad (59.2)
$$

где I — линеаризованный интеграл столкновений.

Отметим прежде всего, что коэффициенты продольных электропроводности $\sigma_{||}$ и теплопроводности $\varkappa_{||}$ вообще не зависят от $\mathbf{B}$, оставаясь равными своим значениям в отсутствие магнитного поля (т. е. обычным скалярным σ и $\varkappa$). Действительно, из

[1]) Напомним, что при вычислении диэлектрической проницаемости плазмы в § 29 член с магнитным полем в этом уравнении был опущен, поскольку при малых $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ он является малой величиной второго порядка. В рассматриваемой же здесь задаче магнитное поле $\mathbf{B}$ (в противоположность электрическому полю $\mathbf{E}$) отнюдь не предполагается малым.

соображений симметрии заранее очевидно, что при совпадении направлений векторов **E** или ∇T с направлением **B** функция распределения δf не зависит от угла φ поворота поперечной скорости $\mathbf{v}_\perp$ в плоскости, перпендикулярной полю **B**. Между тем

$$[\mathbf{vB}]\frac{\partial\delta f}{\partial\mathbf{p}} = -\frac{B}{m}\frac{\partial\delta f}{\partial\varphi}$$

и, следовательно, при $\partial\delta f/\partial\varphi = 0$ магнитное поле вообще выпадает из кинетического уравнения [1]).

По такой же причине не зависит от магнитного поля (и тем самым совпадает с обычной вязкостью η) также и коэффициент вязкости η_0 — тот коэффициент, который определяет вязкие напряжения $\sigma'_{\alpha\beta}$, когда скорость **V** направлена вдоль **B** (ось z) и зависит только от координаты z; при этом в выражениях (58.16) остаются лишь члены с

$$\sigma'_{xx} = \sigma'_{yy} = -\frac{1}{2}\,\sigma'_{zz} = -\frac{2}{3}\eta_0\frac{dV}{dz}.$$

Наконец, должен был бы быть не зависящим от поля коэффициент ζ_1, который для указанного распределения скорости дал бы в тензоре напряжений вклад

$$\sigma'_{xx} = \sigma'_{yy} = \frac{1}{2}\,\sigma'_{zz} = \zeta_1\frac{dV}{dz}.$$

Но поскольку в отсутствие поля этот эффект вообще отсутствует, то тем самым $\zeta_1 = 0$ и при наличии поля [2]). (Отметим, что эта причина не связана с классичностью плазмы, так что равенство $\zeta_1 = 0$ имело бы место и в релятивистском случае — в противоположность коэффициенту ζ, отличному от нуля в релятивистской плазме.)

Вычисление остальных кинетических коэффициентов можно произвести в аналитическом виде в предельном случае сильных магнитных полей, когда (для каждого рода частиц) ларморова частота $\omega_B \gg \nu$. В этих условиях столкновения играют роль малой поправки [3]).

---

[1]) Сразу же оговорим, однако, что эти рассуждения (и аналогичные рассуждения ниже) предлагают, что процесс рассеяния частиц не зависит от магнитного поля. Для этого необходимо, чтобы магнитное поле удовлетворяло неравенству (59.10) — см. ниже.

[2]) Подчеркнем лишний раз, что все эти утверждения связаны с видом содержащего **B** члена в кинетическом уравнении (59.2). Они не относятся поэтому к обычному газу, молекулы которого обладают магнитным моментом, через посредство которого (а не через заряд частиц, как в плазме) и осуществляется в этом случае взаимодействие с магнитным полем.

[3]) Кинетические коэффициенты магнитоактивной плазмы вычислялись *Ландсгофом* (*R. Landshoff*, 1949), *Е.С. Фрадкиным* (1951) и *С.И. Брагинским* (1952). Излагаемый ниже аналитический метод принадлежит *И.Е. Тамму* (1951).

Электропроводность. Начнем с вычисления коэффициентов, определяющих электрический ток в плазме. Эти вычисления удобно производить в системе отсчета, в которой данный элемент объема плазмы покоится. Пренебрегая величинами $\sim m/M$, эту систему можно считать совпадающей с системой покоя ионной компоненты. Электрический ток в такой системе — чисто электронный. Поэтому надо решать лишь кинетическое уравнение для электронов.

Левая часть кинетического уравнения должна была бы быть преобразована с помощью гидродинамических уравнений, подобно тому, как это было сделано в § 6 для обычного газа. При этом в выбранной системе отсчета в рассматриваемой точке макроскопическая скорость (но, конечно, не ее производные) равна нулю [1]).

В полном проведении этих вычислений, однако, в данном случае (для электронов) нет необходимости. Прежде всего замечаем, что можно вообще опустить член $\partial\,\delta f_e/\partial t$. Дифференцирование по времени приводит к появлению членов с производными $\partial T/\partial t$, $\partial P/\partial t$ и $\partial \mathbf{V}/\partial t$. Из них первые две выражаются через скаляр $\operatorname{div}\mathbf{V}$ (ср. (6.16)); но такие члены, как нам уже известно, в случае одноатомного газа (каковым является плазма) все равно взаимно сокращаются. Производная же $\partial \mathbf{V}/\partial t$, выраженная из гидродинамического уравнения (58.3), содержит множитель $1/\rho$, т. е. множитель $1/M$; учет таких членов в кинетическом уравнении привел бы лишь к поправкам $\sim m/M$, которыми мы не интересуемся. Далее, можно положить в (59.2) $\mathbf{E}=0$, поскольку заранее известно, что $\mathbf{E}$ может войти в искомый ток $\mathbf{j}$ лишь в виде суммы

$$\mathbf{E}+\frac{1}{eN_e}\nabla P.$$

Наконец, поскольку мы не имеем в виду вычислять независящие от магнитного поля «продольные» кинетические коэффициенты ($\sigma_{\|}$, $\varkappa_{\|}$, η_0), то можно считать все термодинамические величины плазмы зависящими лишь от координат в плоскости, перпендикулярной направлению $\mathbf{B}$. Обозначив оператор дифференцирования в этой плоскости посредством $\nabla_\perp$, напишем, таким образом, кинетическое уравнение в виде

$$(\mathbf{v}\nabla_\perp)f_{0e}=\frac{e}{c}[\mathbf{vB}]\frac{\partial\,\delta f_e}{\partial\mathbf{p}}+I(\delta f_e). \qquad (59.3)$$

В свою очередь это уравнение можно решать последовательными приближениями по степеням $1/\omega_{Be}$. Первому приближе-

[1]) Это по существу уже подразумевалось выше, где использовалось совпадение направлений векторов $\partial f_0/\partial\mathbf{p}$ и $\mathbf{v}$.

нию (которое отметим индексом (1)) отвечает полное пренебрежение интегралом столкновений, т. е. уравнение

$$[\mathbf{vb}]\frac{\partial\,\delta f_e^{(1)}}{\partial\mathbf{v}} = \frac{1}{\omega_{Be}}(\mathbf{v}\nabla_\perp)f_{0e} \tag{59.4}$$

$(\mathbf{b} = \mathbf{B}/B)$. Решение этого уравнения:

$$\delta f_e^{(1)} = -\frac{1}{\omega_{Be}}(\mathbf{v}[\mathbf{b}\nabla_\perp f_{0e}]), \tag{59.5}$$

в чем легко убедиться прямой подстановкой. Заранее очевидно, что с его помощью можно вычислить только бездиссипативные кинетические коэффициенты: в отсутствие столкновений диссипация энергии отсутствует.

Плотность электрического тока дается интегралом

$$\mathbf{j} = -e\int\mathbf{v}\delta f_e\,d^3p. \tag{59.6}$$

Подставив сюда (59.5), имеем

$$\mathbf{j}^{(1)} = \frac{mc}{B}([\mathbf{b}\nabla_\perp]\langle\mathbf{v})\mathbf{v}\rangle N_e = \frac{mc}{3B}[\mathbf{b}\nabla_\perp]N_e\langle v^2\rangle,$$

где усреднение производится по максвелловскому распределению. В результате находим

$$\mathbf{j}^{(1)} = \frac{c}{B}[\mathbf{b}\nabla_\perp P_e], \qquad \nabla_\perp P_e = -\frac{B}{c}[\mathbf{b}\mathbf{j}^{(1)}]. \tag{59.7}$$

Сравнив это выражение с определением коэффициента $\mathcal{R}$ в (58.13), получим

$$\mathcal{R} = -\frac{1}{N_e ec}. \tag{59.8}$$

В следующем приближении ищем решение уравнения (59.3) в виде $\delta f_e = \delta f_e^{(1)} + \delta f_e^{(2)}$ и для $\delta f_e^{(2)}$ находим уравнение

$$\omega_{Be}[\mathbf{vb}]\frac{\partial\,\delta f_e^{(2)}}{\partial\mathbf{v}} = -I(\delta f_e^{(1)}) = \frac{1}{\omega_{Be}}I(\mathbf{v}[\mathbf{b}\nabla_\perp]f_{0e}) \tag{59.9}$$

(оператор $\nabla_\perp$ нельзя выносить из-под знака I, поскольку в линеаризованном интеграле столкновений подынтегральное выражение содержит в своих коэффициентах зависящие от координат величины — например N_i).

Как было уже условлено, магнитное поле предполагается настолько сильным, что $\omega_{Be} \gg \nu_e$. Далее, в этом параграфе будем, однако, считать в то же время, что

$$r_{Be} = \frac{v_{Te}}{\omega_{Be}} \gg a_e \tag{59.10}$$

(т. е. $\omega_{Be} \ll \Omega_e$), чем величина поля ограничивается сверху. При выполнении этого условия поле почти не искривляет траектории

электронов (и уж тем более ионов) в области столкновений и тем самым не оказывает влияния на процесс столкновения. Другими словами, оператор I не зависит явно от поля. Но тогда в силу соображений симметрии правая часть уравнения (59.9) должна иметь векторную структуру вида $(\mathbf{v}[\mathbf{b}\nabla_\perp])\varphi(v^2)$; по отношению к переменной $\mathbf{v}$ эта структура такая же, как и у правой части (59.4) (причем вместо $\nabla_\perp$ стоит $[\mathbf{b}\nabla_\perp]$). Решение уравнения (59.9) есть поэтому

$$\delta f_e^{(2)} = -\frac{1}{\omega_{Be}^2} I(\mathbf{v}[\mathbf{b}[\mathbf{b}\nabla_\perp]]f_{0e}) = \frac{1}{\omega_{Be}^2} I(\mathbf{v}\nabla_\perp f_{0e}). \tag{59.11}$$

При вычислении тока отличный от нуля вклад возникает только от ei-столкновений. Действительно, поскольку столкновения представляют собой в рассматриваемых условиях малый эффект, вклад в проводимость от ee- и ei-столкновений можно учитывать независимо. Это значит, например, что вклад от ee-столкновений вычисляется по функции распределения, получающейся в результате решения кинетического уравнения, в правой части которого стоит интеграл только этих столкновений, как если бы с ионами электроны вообще не сталкивались. Но тогда интеграл $\int \mathbf{v}\delta f_e^{(2)}\, d^3p$ с функцией $\delta f_e^{(2)}$ вида (59.11) обращается в нуль, поскольку в силу закона сохранения импульса при столкновениях для произвольной функции распределения f_e имеем тождественно

$$\int \mathbf{v}\,\mathrm{St}_{ee}\, f_e\, d^3p = 0$$

(ср. § 5).

Таким образом, при вычислении электрического тока надо понимать в (59.11) символ I как электрон-ионный интеграл столкновений. При этом [1])

$$I_{ei}(\mathbf{v}\nabla_\perp f_{0e}) = -\nu_{ei}(v)(\mathbf{v}\nabla_\perp)f_{0e}, \tag{59.12}$$

где согласно (44.3)

$$\nu_{ei}(v) = \frac{4\pi z e^4 N_e L_e}{m^2 v^3}.$$

Вклад в ток от функции распределения (59.11), (59.12) равен

$$\mathbf{j}^{(2)} = \frac{eN_e}{3\omega_{Be}^2}\nabla_\perp\langle v^2\nu_{ei}(v)\rangle = \frac{4\sqrt{2\pi}\, ze^5 L_e N_e}{3m^{3/2}\omega_{Be}^2}\nabla_\perp \frac{P_e}{T^{3/2}}. \tag{59.13}$$

[1]) Ср. (44.1). Напомним, что формула такого вида для $\mathrm{St}\, f$ имеет место, если столкновения происходят с частицами, которые можно считать неподвижными, и если δf имеет вид $(\mathbf{v}\mathbf{A})g(v)$, где $\mathbf{A}$ — постоянный вектор. В данном случае роль $\mathbf{A}$ играет векторный оператор $\nabla_\perp$.

Для вычисления искомых кинетических коэффициентов надо подставить ток$\mathbf{j}_\perp = \mathbf{j}^{(1)} + \mathbf{j}^{(2)}$ в равенство (58.13)

$$\frac{1}{eN_e}\nabla_\perp P_e = \frac{\mathbf{j}_\perp}{\sigma_\perp} + \mathcal{R}B[\mathbf{b}\mathbf{j}_\perp] + \alpha_\perp\nabla_\perp T + \mathcal{N}B[\mathbf{b}\nabla_\perp T], \qquad (59.14)$$

определяющие эти коэффициенты. Положив сначала $\nabla T = 0$ и собирая члены порядка $1/\omega_{Be}$, найдем, что

$$\frac{\mathbf{j}^{(1)}}{\sigma_\perp} + \mathcal{R}B[\mathbf{b}\mathbf{j}^{(2)}] = 0,$$

откуда

$$\sigma_\perp = \frac{3\pi^{1/2}e^2N_e}{2^{1/2}m\nu_{ei}}, \qquad (59.15)$$

где ν_{ei} (без указания аргумента) обозначает

$$\nu_{ei} = \nu_{ei}(v_{Te}) = \frac{4\pi z e^4 L_e N_e}{m^{1/2}T^{3/2}}. \qquad (59.16)$$

Величина (59.15) того же порядка, что и проводимость (43.8) в отсутствие поля, с которой в данном случае совпадает и $\sigma_{||}$.

Аналогичным образом, положив в (59.14) $\nabla P_e = 0$ и снова собирая члены $\sim 1/\omega_{Be}$, найдем

$$\mathcal{R}B[\mathbf{b}\mathbf{j}^{(2)}] + \mathcal{N}B[\mathbf{b}\nabla T] = 0,$$

откуда

$$\mathcal{N} = -\frac{\nu_{ei}}{(2\pi)^{1/2}mc\omega_{Be}^2} = -\frac{3cN_e}{2\sigma_\perp B^2}. \qquad (59.17)$$

Что касается коэффициента $\alpha_\perp$, то он появляется лишь еще в следующем приближении по $1/\omega_{Be}$ и оказывается равным (для $z = 1$)

$$\alpha_\perp = 0{,}36\left(\frac{\nu_{ei}}{\omega_{Be}}\right)^2. \qquad (59.18)$$

Электронная теплопроводность. Тепловой поток в плазме складывается как из электронной, так и из ионной частей; рассмотрим сначала первую из них.

Электронный тепловой поток вычисляется как интеграл

$$\mathbf{q}_e = \frac{m}{2}\int v^2\mathbf{v}\delta f_e\, d^3p. \qquad (59.19)$$

В первом приближении по $1/\omega_{Be}$, подставив сюда (59.5), находим

$$\mathbf{q}_e^{(1)} = -\frac{m}{2\omega_{Be}}([\mathbf{b}\nabla_\perp]\langle\mathbf{v})\mathbf{v}v^2\rangle N_e = -\frac{m}{6\omega_{Be}}[\mathbf{b}\nabla_\perp]N_e\langle v^4\rangle,$$

откуда

$$\mathbf{q}_e^{(1)} = -\frac{5c}{2eB}[\mathbf{b}\nabla_\perp]P_eT = -\frac{w_e}{e}\mathbf{j}^{(1)} - \frac{5cP_e}{2eB}[\mathbf{b}\nabla_\perp T], \tag{59.20}$$

где $w_e = 5T/2$ — электронная тепловая функция, отнесенная к одному электрону. Сравнив с определением коэффициента $\mathcal{L}$ в (58.14), получим

$$\mathcal{L}_e = -\frac{5cN_eT}{2eB^2}. \tag{59.21}$$

В следующем приближении интеграл (59.19) должен быть вычислен с функцией распределения (59.11). В тепловой поток, однако, дают вклад как ei-, так и ee-столкновения. В первом случае снова используем выражения (59.11), (59.12) и находим

$$\mathbf{q}_e^{(ei)} = -\frac{mN_e}{6\omega_{Be}^2}\nabla_\perp\langle v^4\nu_{ei}(v)\rangle,$$

откуда

$$\mathbf{q}_e^{(ei)} = -\frac{4\sqrt{2\pi}}{3}\frac{ze^4N_eL_e}{m^{3/2}\omega_{Be}^2}\nabla_\perp\frac{P_e}{\sqrt{T}}. \tag{59.22}$$

Для нахождения отсюда соответствующей части коэффициента теплопроводности $\varkappa_\perp$ надо, однако, учесть еще условие $\mathbf{j} = \mathbf{j}^{(1)} + \mathbf{j}^{(2)} = 0$, поскольку согласно (58.14) $\varkappa_\perp$ определяется по потоку тепла именно в отсутствие тока. С помощью (59.7) и (59.13) находим, что это условие означает следующее соотношение между градиентами давления и температуры:

$$\frac{c}{B}[\mathbf{b}\nabla_\perp P_e] = \frac{eN_e\nu_{ei}}{\sqrt{2\pi}\,m\omega_{Be}^2}\nabla_\perp T$$

(при вычислениях везде пренебрегаем членами более высокого порядка по $1/\omega_{Be}$). Вычислив с учетом этого соотношения сумму $\mathbf{q}_e^{(1)} + \mathbf{q}_e^{(ei)}$, находим

$$\varkappa_{\perp e}^{(ei)} = \frac{13}{6\sqrt{2\pi}}\frac{N_eT\nu_{ei}}{m\omega_{Be}^2}. \tag{59.23}$$

Эта формула имеет простой физический смысл. По порядку величины коэффициент теплопроводности должен быть равен $\varkappa_\perp \sim C_eD_\perp$, где $C_e \sim N_e$ — теплоемкость электронов в единице объема, а $D_\perp$ — коэффициент диффузии электронов в направлении поперек магнитного поля. Последний в свою очередь оценивается как $\langle(\Delta x)^2\rangle/\delta t$, где $\langle(\Delta x)^2\rangle$ — средний квадрат смещения за время δt. В магнитном поле смещение в поперечном направлении происходит лишь при столкновениях, причем электрон смещается на расстояние $\sim r_{Be}$. Поэтому $D_\perp \sim \nu_{ei}r_{Be}^2$, откуда и получается (59.23).

Обратимся к вкладу ee-столкновений. Вычисления здесь более громоздки; наметим их ход.

В функции (59.11) под I надо понимать теперь линеаризованный интеграл столкновений Ландау:

$$I_{ee}\delta f_e = -\operatorname{div}_{\mathbf{p}} \mathbf{s}^{(ee)},$$

где

$$s_\alpha^{(ee)} = 2\pi e^4 L_e \int \frac{w^2\delta_{\alpha\beta} - w_\alpha w_\beta}{w^3} \times \\ \times \left\{ f_{0e}\frac{\partial \delta f'_e}{\partial p'_\beta} + \delta f_e \frac{\partial f'_{0e}}{\partial p'_\beta} - f'_{0e}\frac{\partial \delta f_e}{\partial p_\beta} - \delta f'_e \frac{\partial f_{0e}}{\partial p_\beta} \right\} d^3p' \quad (59.24)$$

($\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{v}'$). Интеграл (59.19) с такой функцией распределения после интегрирования по частям принимает вид

$$\mathbf{q}_e^{(ee)} = \frac{1}{2\omega_{Be}^2} \int \{ v^2 \mathbf{s}^{(ee)} + 2\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{s}^{(ee)})\}\, d^3p. \quad (59.25)$$

Коэффициент в этой формуле написан так, что под δf_e в (59.24) надо теперь понимать функцию $(\mathbf{v}\nabla_\perp)f_{0e}$. При этом дифференцирование $\nabla_\perp$ достаточно применить только к температуре T в показателе максвелловской функции f_{0e}:

$$(\mathbf{v}\nabla_\perp)f_{0e} \to f_{0e}\frac{mv^2}{2T^2}(\mathbf{v}\nabla_\perp T);$$

члены, возникающие от дифференцирования предэкспоненциального множителя, взаимно сокращаются [1]).

После простого, хотя и довольно длинного вычисления интеграл (59.25) приводится к виду $-\varkappa_{\perp e}^{(ee)}\nabla_\perp T$, где [2])

$$\varkappa_{\perp e}^{(ee)} = \frac{\pi L_e e^4}{3T^2\omega_{Be}^2} \int \left\{ wV^2 + \frac{(\mathbf{w}\mathbf{V})^2}{w} + \ldots \right\} f_{0e}(p) f_{0e}(p')\, d^3p\, d^3p',$$

где $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{v}'$, $\mathbf{V} = (\mathbf{v} + \mathbf{v}')/2$, а многоточие в фигурных скобках стоит вместо членов, содержащих нечетные степени $\mathbf{w}\mathbf{V}$ и обращающихся в нуль при интегрировании. Заметив, что

$$f_{0e}(p) f_{0e}(p') \propto \exp\left(-\frac{mV^2}{T} - \frac{mw^2}{4T}\right),$$

---

[1]) Это обстоятельство заранее очевидно как следствие общего свойства, отмеченного в § 6: интеграл столкновений одинаковых частиц обращается в нуль для функций вида $\mathbf{v}f_0$.

[2]) Градиент давления здесь не появляется, и поэтому нет необходимости в исключении его с помощью условия $\mathbf{j} = 0$.

и выполнив интегрирование по $d^3p\,d^3p'$, получим окончательно

$$\varkappa_{\perp e}^{(ee)} = \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \frac{N_e T \nu_{ee}}{m\omega_{Be}^2}, \tag{59.26}$$

где

$$\nu_{ee} = \frac{4\pi e^4 N_e L_e}{m^{1/2} T^{3/2}}. \tag{59.27}$$

Таким образом, весь электронный вклад в поперечную теплопроводность

$$\varkappa_{\perp e} = \frac{2N_e T \nu_{ee}}{3\sqrt{\pi}\, m\omega_{Be}^2} \left(1 + \frac{13}{4} z\right). \tag{59.28}$$

Ионная теплопроводность. Отметим прежде всего, что условие применимости рассматриваемого приближения для ii-столкновений, $\omega_{Bi} \gg \nu_{ii}$, более сильное, чем для электронов. Поскольку $\nu_{ii} \sim \nu_{ee}(m/M)^{1/2}$, а $\omega_{Bi} \sim \omega_{Be} m/M$, то из $\omega_{Bi} \gg \nu_{ii}$ следует неравенство $\omega_{Be} \gg \nu_{ee}(M/m)^{1/2}$, более сильное, чем $\omega_{Be} \gg \nu_{ee}$; что же касается условия $r_{Bi} \gg a$, то оно заведомо выполняется, будучи более слабым, чем (59.10).

Кинетическое уравнение для ионов аналогично уравнению (59.2):

$$\frac{\partial f_{0i}}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f_{0i}}{\partial \mathbf{r}} + ze\mathbf{E}\frac{\partial f_{0i}}{\partial \mathbf{p}} = -\frac{ze}{c}[\mathbf{vB}]\frac{\partial \delta f_i}{\partial \mathbf{p}} + I(\delta f_i). \tag{59.29}$$

При преобразовании его левой части ситуация, однако, отличается от электронного случая. Подставив сюда

$$f_{0i} = \frac{N_i}{(2\pi T M)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{M}{2T}(\mathbf{v} - \mathbf{V})^2\right\},$$

мы должны теперь дифференцировать $\mathbf{V}$ по t (после чего снова положить, в силу выбора системы отсчета, $\mathbf{V} = 0$). При $\mathbf{V} = 0$ имеем, согласно гидродинамическому уравнению движения:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \frac{1}{\rho c}[\mathbf{jB}],$$

где давление $P = P_e + P_i$, а плотность $\rho = N_i M$. В результате кинетическое уравнение примет вид

$$\mathbf{v}\nabla_\perp f_{0i} - \frac{f_{0i}}{N_i T}\mathbf{v}\left(\nabla_\perp P - \frac{1}{c}[\mathbf{jB}]\right) = -\frac{ze}{c}[\mathbf{vB}]\frac{\partial \delta f_i}{\partial \mathbf{p}} + I(\delta f_i), \tag{59.30}$$

где мы снова (как и в (59.3)) положили $\mathbf{E} = 0$ и написали $\nabla_\perp$ вместо ∇ [1]).

[1]) В случае электронов второй член в левой части содержал бы вместо M/ρ множитель $m/\rho = m/(MN_i)$ и им можно было бы пренебречь.

Решаем уравнение (59.30) последовательными приближениями по $1/\omega_{Bi}$. В первом приближении получим аналогично (59.5):

$$\delta f_i^{(1)} = \frac{1}{\omega_{Bi}}\left(\mathbf{v}\left[\mathbf{b}, \nabla_\perp f_{0i} - \frac{f_{0i}}{N_i T}\nabla_\perp P + \frac{f_{0i}}{cN_i T}[\mathbf{jB}]\right]\right).$$

Но в этом приближении имеем, согласно (59.7), $\nabla_\perp P_e = [\mathbf{jB}]/c$, так что

$$\delta f_i^{(1)} = \frac{1}{\omega_{Bi}}\left(\mathbf{v}\left[\mathbf{b}, \nabla_\perp f_{0i} - \frac{f_{0i}}{P_i}\nabla_\perp P_i\right]\right). \qquad (59.31)$$

Эта функция распределения не дает, разумеется, вклада в ток $\int \delta f_i^{(1)} \mathbf{v}\, d^3p = 0$, как и должно быть в системе отсчета, в которой ионная компонента плазмы покоится. Для потока же тепла находим

$$\mathbf{q}_i^{(1)} = \frac{M}{2}\int v^2 \mathbf{v}\delta f_i^{(1)}\, d^3p =$$
$$= \frac{M}{6\omega_{Bi}}\left[\mathbf{b}, \nabla_\perp(N_i\langle v^4\rangle) - \frac{\langle v^4\rangle}{T}\nabla_\perp P_i\right] = \frac{5cP_i}{2zeB}[\mathbf{B}\nabla T],$$

откуда

$$\mathcal{L}_i = \frac{5cN_i T}{2zeB^2} = -\frac{\mathcal{L}_e}{z^2}. \qquad (59.32)$$

При вычислении потока тепла в следующем приближении существенны только ii-столкновения: ie-столкновения дают вклад, в $\sim (m/M)^{1/2}$ раз меньший ввиду малости изменения импульса иона при столкновениях с электроном. Соответствующие вычисления полностью аналогичны произведенным выше для ee-столкновений [1]. Ионная часть теплопроводности получается поэтому из (59.26) заменой электронных величин ионными:

$$\varkappa_{\perp i} = \frac{2N_i T\nu_{ii}}{3\sqrt{\pi}\, M\omega_{Bi}^2}, \qquad \nu_{ii} = \frac{4\pi z^2 e^4 L_i N_i}{M^{1/2}T^{3/2}}. \qquad (59.33)$$

Сравнение (59.33) с (59.23) показывает, что (при $z \sim 1$) $\varkappa_{\perp i} \sim \varkappa_{\perp e}(M/m)^{1/2}$. Таким образом, в полях, настолько больших, что $\omega_{Bi} \gg \nu_{ii}$, поперечная теплопроводность практически целиком ионная. Электронная теплопроводность сравнивается с ионной, когда $\omega_{Bi} \backsim (m/M)^{1/4}\nu_{ii}$ (при сравнении следует учесть, что в таких полях влиянием магнитного поля на $\varkappa_i$ можно пренебречь). При еще меньших полях ионный вклад в $\varkappa_\perp$ становится

[1] Член с ∇P_i, отличающий (59.31) от (59.5), при этом несуществен: эта часть функции распределения $\backsim \mathbf{v} f_{0i}$ и обращает в нуль интеграл столкновений; ср. примеч. на с. 304.

несущественным; если при этом $\omega_{Be} \gg \nu_{ee}$, то $\varkappa_\perp$ дается формулой (59.28).

Вязкость. Импульс движущейся плазмы сосредоточен в основном в ионах, поэтому вязкость определяется ионной функцией распределения. При этом, поскольку соударения иона с электронами мало меняют импульс иона, в кинетическом уравнении надо учитывать только ион-ионные столкновения.

Левая часть кинетического уравнения (59.29) преобразуется так же, как это было сделано в § 6, 8, и принимает тот же вид, что и там [1]). Таким образом, кинетическое уравнение задачи о вязкости:

$$\frac{M}{T} v_\alpha v_\beta \left(V_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\,\delta_{\alpha\beta}\,\mathrm{div}\,\mathbf{V}\right) f_{0i} = -\frac{ze}{cM}[\mathbf{vB}]\frac{\partial\,\delta f_i}{\partial\mathbf{v}} + I_{ii}(\delta f_i). \quad (59.34)$$

Решение этого уравнения надо искать в виде

$$\delta f_i = \sum_{n=0}^{4} g_n(v^2) V_{\gamma\delta}^{(n)} v_\gamma v_\delta, \quad (59.35)$$

где $V_{\gamma\delta}^{(n)}$ — линейные комбинации из компонент тензора $V_{\alpha\beta}$, фигурирующие в выражении тензора вязких напряжений

$$\sigma'_{\alpha\beta} = \sum_{n=1}^{4} \eta_n V_{\alpha\beta}^{(n)}, \quad (59.36)$$

согласно определениям (13.18) и (58.15); напомним, что все $V_{\alpha\alpha}^{(n)} = 0$. Тензор напряжений вычисляется как интеграл

$$-\sigma'_{\alpha\beta} = \int M v_\alpha v_\beta \delta f_i\, d^3p.$$

Подставив сюда (59.35), усреднив по направлениям $\mathbf{v}$ по формуле

$$\langle v_\alpha v_\beta v_\gamma v_\delta \rangle = \frac{v^4}{15}(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma})$$

и сравнив с (59.36), получим

$$\eta_n = -\frac{2M}{15}\int v^4 g_n(v^2)\, d^3p. \quad (59.37)$$

Уравнения, определяющие функции g_n, получаются подстановкой (59.35) в (59.34) и приравниванием коэффициентов, стоящих при одинаковых тензорах $V_{\alpha\beta}^{(n)}$ в обеих частях уравнения.

---

[1]) При этом надо учесть, что давление плазмы $P = (N_i + N_e)T = N_i(1 + z)T$, а теплоемкость, приходящаяся на один ион, равна $3(1+z)/2$.

Опустив детали этих довольно громоздких вычислений, приведем сразу их окончательные результаты.

Отличные от нуля коэффициенты вязкости η_3 и η_4 возникают уже в пренебрежении интегралом столкновений и потому пропорциональны $1/\omega_{Be}$. Коэффициенты же η_1 и η_2 появляются лишь в следующем приближении, с учетом столкновений, и потому пропорциональны $1/\omega_{Bi}^2$ [1]):

$$\eta_1 = \frac{\eta_2}{4} = \frac{2\pi^{1/2}(ze)^4 L_i N_i^2}{5(MT)^{1/2}\omega_{Bi}^2}, \quad \eta_3 = \frac{\eta_4}{2} = \frac{N_i T}{2\omega_{Bi}}. \tag{59.38}$$

Отметим в заключение, что все полученные в этом параграфе выражения для «поперечных» кинетических коэффициентов имеют смысл и при условиях, более мягких, чем общее условие (58.1). Легко убедиться в том, что поправка к функции распределения оказывается малой, уже если характерные размеры задачи велики лишь по сравнению с ларморовским радиусом r_B соответствующих частиц, чем и обеспечивается применимость указанных выражений. Это условие достаточно и для применимости самих гидродинамических уравнений, если градиенты давления и температуры везде поперечны по отношению к направлению магнитного поля.

В нашем рассмотрении мы везде имели в виду плазму с одинаковыми температурами электронов и ионов. Но ввиду большой разницы масс электронов и ионов нередко осуществляются условия «двухтемпературности». В таком случае также можно сформулировать систему уравнений типа гидродинамических и вычислить фигурирующие в них кинетические коэффициенты [2]).

Задачи

1. Определить тензор диэлектрической проницаемости магнитоактивной электронной плазмы в однородном ($k = 0$) переменном электрическом поле с учетом электрон-ионных столкновений (лоренцевский случай; см. § 44).

Решение. Как было отмечено в начале параграфа, если однородное поле $\mathbf{E}$ параллельно полю $\mathbf{B}$ (ось z), то последнее вообще выпадает из кинетического уравнения. Поэтому компоненты ε_{xz}, ε_{yz}, ε_{zz} не зависят от B (при этом $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$, а ε_{zz} дается формулой (44.7)). Для нахождения же остальных компонент можно считать, что $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$.

Ищем поправку к функции распределения электронов в виде

$$\delta f_e = (\mathbf{vE})g_1(v) + (\mathbf{v}[\mathbf{Eb}])g_2(v). \tag{1}$$

Для функции этого типа (ср. примеч. на стр. 301) интеграл столкновений

$$\mathrm{St}_{ei}\, f_e = -\nu_{ei}(v)\delta f_e,$$

[1]) Целесообразность определения коэффициента вязкости η_0 для магнитоактивной плазмы согласно (58.15) связана с тем, что все остальные коэффициенты η оказываются тогда стремящимися к нулю при $B \to \infty$.

[2]) Этот вопрос изложен в статье *С.И. Брагинского* «Явления переноса в плазме» в сб. «Вопросы теории плазмы» — М.: Атомиздат, вып. 1, 1963.

так что кинетическое уравнение

$$(\nu_{ei}(v) - i\omega)\delta f_e - \frac{e}{c}[\mathbf{vB}]\frac{\partial \delta f_e}{\partial \mathbf{p}} = e\mathbf{E}\frac{\partial f_{0e}}{\partial \mathbf{p}} = -\frac{e}{T}\mathbf{vE}f_{0e}. \qquad (2)$$

Оно отличается от бесстолкновительного уравнения лишь заменой ω на $\omega + i\nu_{ei}(v)$. Подстановка (1) в (2) приводит к двум алгебраическим уравнениям для g_1 и g_2, решая которые, находим

$$\delta f_e = \frac{-ie(\omega + i\nu_{ei}(v))f_{0e}}{T[(\omega + i\nu_{ei}(v))^2 - \omega_{Be}^2]}\left\{\mathbf{v} - \frac{i\omega_{Be}[\mathbf{bv}]}{\omega + i\nu_{ei}(v)}\right\}\mathbf{E} \equiv \mathbf{gE}. \qquad (3)$$

Диэлектрический тензор

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{4\pi e}{i\omega}\int v_\alpha g_\beta \, d^3p.$$

Выпишем окончательный результат для частот

$$|\omega \pm \omega_{Be}| \gg \nu_{ei},$$

когда столкновения можно рассматривать как малое возмущение. В таком случае можно положить

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_0 + i\nu_{ei}(v)\frac{\partial \mathbf{g}_0}{\partial \omega},$$

где $\mathbf{g}_0$ — функция $\mathbf{g}$ при $\nu_{ei}(v) = 0$. Тогда

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}^{(0)} + i\frac{4\sqrt{2\pi}\, ze^4 L_e N_e}{m^{1/2}T^{3/2}\omega}\frac{d}{d\omega}[(\varepsilon_{\alpha\beta}^{(0)} - \delta_{\alpha\beta})\omega], \qquad (4)$$

где $\varepsilon_{\alpha\beta}^{(0)}$ — тензор диэлектрической проницаемости без учета столкновений. Эта формула (по той же причине, что и для (44.9)) справедлива не только в лоренцевском случае, но и для плазмы с любым z.

2. Неоднородная в направлении оси x плазма удерживается магнитным полем, направленным по оси z. При условии $\omega_{Be} \gg \nu_{ei}$ определить распределение плотности и магнитного поля в плазме, считая распределение температуры заданным (*И.Е. Тамм*, 1951).

Р е ш е н и е. По условию, градиенты температуры T и давления P направлены вдоль оси x. Вдоль той же оси направлено и возникающее из-за неоднородности плазмы электрическое поле $\mathbf{E}$, потенциальное в стационарном случае. Удержание же плазмы означает, что отсутствуют движение плазмы и электрический ток в направлении x: $V_x = 0$, $j_x = 0$.

Проецируя с учетом сказанного уравнения (58.13) на ось y и используя уравнение Максвелла $\operatorname{rot}\mathbf{B} = 4\pi\mathbf{j}/c$, получим

$$\frac{c}{4\pi}\frac{dB}{dx} = -j_y = \mathcal{N}\sigma_\perp B\frac{dT}{dx}.$$

Подставив в эту формулу выражение (59.17) для $\mathcal{N}\sigma_\perp$, имеем

$$\frac{d}{dx}\frac{B^2}{8\pi} = -\frac{3}{2}N_e\frac{dT}{dx}. \qquad (1)$$

Магнитное поле «выталкивается» из более горячих областей плазмы. Проецируя же на ось x уравнение (58.3) и пренебрегая вязкими членами, дающими вклад более высокого порядка малости по $1/B$, находим второе уравнение

$$\frac{d}{dx}(P_e + P_i) = \frac{1}{c}j_y B,$$

которое с помощью того же уравнения Максвелла приводится к виду (при $z = 1$)

$$2N_eT + \frac{B^2}{8\pi} = \text{const}. \qquad (2)$$

Уравнению (1) можно придать более удобную форму, исключив из (1) и (2) магнитное поле. После интегрирования находим

$$N_eT^{1/4} = \text{const}.$$

Формулы (2) и (3) решают поставленную задачу. Распределение же температуры определяется уравнением теплопроводности.

§ 60. Дрейфовое приближение

Исследуя в предыдущем параграфе кинетические коэффициенты плазмы в сильном магнитном поле, мы пользовались интегралом столкновений Ландау, что подразумевало выполнение неравенства $r_{Be} \gg a$ (59.10). Покажем теперь, как можно освободиться от этого ограничения, т. е. получить формулы, пригодные и в случае полей, настолько сильных, что для электронов выполняется обратное неравенство:

$$r_{Be} \ll a. \qquad (60.1)$$

При этом удобно воспользоваться специальным, так называемым *дрейфовым приближением*, которое производится уже в самом кинетическом уравнении, а не только при его решении. Это приближение справедливо, если магнитные и электрические поля достаточно медленно меняются в пространстве и во времени. Именно, частота поля ω и эффективная частота соударений ν должны быть малы по сравнению с ларморовской частотой, а характерное расстояние, на котором меняются поля (обозначим его через $1/k$), должно быть велико по сравнению с ларморовским радиусом. Эти условия должны выполняться для каждого сорта частиц, к которым применяется дрейфовое приближение. Ниже в этом параграфе мы будем писать все формулы (для определенности) для электронов (аналогичные формулы для ионов получаются, как всегда, заменами $e \to -ze$, $\omega_{Be} \to -\omega_{Bi}$, $m \to M$). Таким образом, будут предполагаться выполненными условия

$$\omega, \nu_{ei} \ll \omega_{Be}, \qquad \frac{1}{k} \gg r_{Be}. \qquad (60.2)$$

Основой рассматриваемого метода является приближенное решение уравнений движения заряженных частиц в заданных полях $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ и $\mathbf{B}(t, \mathbf{r})$, учитывающее медленность изменения последних как функций t и $\mathbf{r}$. Движение частиц в таких полях представляет собой совокупность быстро переменного вращения (с частотой ω_{Be}) по «ларморовским окружностям» вместе с медленно меняющимся перемещением центров этих окружностей

(или, как говорят, *ведущих центров орбит*). Метод решения состоит в выделении быстропеременной, осциллирующей составляющей движения и усреднении по нему.

Представим радиус-вектор и скорость электрона в виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}(t) + \boldsymbol{\zeta}(t), \quad \mathbf{v} = \mathbf{V} + \dot{\boldsymbol{\zeta}}, \quad \mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}}, \tag{60.3}$$

где $\mathbf{R}$ — радиус-вектор ведущего центра орбиты, а $\boldsymbol{\zeta}$ — осциллирующий радиус-вектор электрона относительно ведущего центра[1]. В нулевом приближении, в полном пренебрежении пространственной и временной зависимостями поля и столкновениями, мы имеем дело просто с движением в скрещенных однородных и постоянных полях $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$. Как известно (см. II, § 22), в этом случае вектор $\boldsymbol{\zeta}$ лежит строго в плоскости, перпендикулярной полю $\mathbf{B}$, и вращается в этой плоскости с постоянной угловой скоростью $\omega_{Be} = eB/(mc)$, оставаясь неизменным по величине. Радиус окружности $|\boldsymbol{\zeta}|$ связан с постоянной скоростью $|\dot{\boldsymbol{\zeta}}| \equiv v_\perp$ согласно $|\boldsymbol{\zeta}| = v_\perp/\omega_{Be}$; в векторном виде связь между $\boldsymbol{\zeta}$ и $\dot{\boldsymbol{\zeta}}$ записывается в виде

$$\boldsymbol{\zeta} = -\frac{1}{\omega_{Be}}[\mathbf{b}\dot{\boldsymbol{\zeta}}], \tag{60.4}$$

где $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$. Центр же орбиты движется со скоростью

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{V}_0 = v_{0||}\mathbf{b} + \mathbf{w}_0,$$

где $v_{0||}$ — скорость равномерно-ускоренного движения вдоль магнитного поля, удовлетворяющая уравнению

$$m\dot{v}_{0||} = -e\mathbf{bE}, \tag{60.5}$$

а

$$\mathbf{w}_0 = \dot{\mathbf{R}}_\perp = \frac{c}{B}[\mathbf{Eb}] \tag{60.6}$$

есть скорость перемещения в плоскости, перпендикулярной $\mathbf{B}$ (скорость *электрического дрейфа*)[2].

В дальнейшем мы ограничимся этим приближением и пренебрежем членами, связанными с непостоянством полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, т. е. фактически будем считать их постоянными. В соответствии с этим мы будем опускать индексы 0 у всех величин.

Сущность дрейфового приближения состоит в переходе в кинетическом уравнении к медленно меняющимся переменным $\mathbf{R}$, $v_{||}$, $v_\perp = |\dot{\boldsymbol{\zeta}}|$. Эти величины вместе составляют пять независимых переменных, от которых зависит функция распределения.

[1]) Не смешивать обозначение $\mathbf{V}$ в этом параграфе с макроскопической скоростью, обозначенной через $\mathbf{V}$ в § 59!

[2]) При этом предполагается, конечно, что $E/B \ll 1$, так что $w \ll c$ и релятивистскими эффектами можно пренебречь.

Элемент фазового объема в новых переменных имеет вид

$$d^3x\, d^3p = d^3R \cdot 2\pi m^3\, dv_{||} \cdot v_\perp\, dv_\perp = 2\pi m^3\, d^3R\, dv_{||}\, dJ, \tag{60.7}$$

где введена удобная для дальнейшего величина

$$J = \frac{v_\perp^2}{2} \tag{60.8}$$

(при проверке соотношения (60.7) следует помнить, что в принятом приближении поля можно считать постоянными).

Выразим через новые переменные плотность тока электронов. Для одного электрона плотность тока есть $-e\mathbf{v}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_e)$, где $\mathbf{r}$ — бегущие координаты точки пространства, а $\mathbf{r}_e$ — координаты точки нахождения электрона. Положив $\mathbf{v} = \mathbf{V} + \dot{\boldsymbol{\zeta}}$ и $\mathbf{r}_e = \mathbf{R} + \boldsymbol{\zeta}$, запишем

$$-e\mathbf{v}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_e) \approx -e(\mathbf{V} + \dot{\boldsymbol{\zeta}})[\delta(\mathbf{r}-\mathbf{R}) - \boldsymbol{\zeta}\nabla_\mathbf{r}(\mathbf{r}-\mathbf{R})].$$

Усредним это выражение по углу вращения с помощью очевидного соотношения

$$\omega_{Be}\langle\dot{\zeta}_\alpha[\mathbf{b}\boldsymbol{\zeta}]_\beta\rangle = \langle\dot{\zeta}_\alpha\dot{\zeta}_\beta\rangle = \frac{1}{2}v_\perp^2\delta_{\alpha\beta},$$

где α, β — двумерные (в плоскости, перпендикулярной магнитному полю) векторные индексы. Получим

$$-e\mathbf{V}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{R}) + \frac{mcJ}{B}[\mathbf{b}\nabla_\mathbf{r}]\delta(\mathbf{r}-\mathbf{R}).$$

Умножив это выражение на функцию распределения электронов f_e и интегрируя по $d^3p = 2\pi m^3\, dv_{||}\, dJ$, получим плотность тока в $\mathbf{R}$-пространстве [1]):

$$\mathbf{j}_e = -e\int \mathbf{V} f_e\, d^3p - \frac{mc}{B}\operatorname{rot}\left(\mathbf{b}\int J f_e\, d^3p\right). \tag{60.9}$$

Первый член в этом выражении отвечает переносу зарядов вместе с перемещающимися ларморовскими кружками, а второй учитывает вращение частиц по этим кружкам [2]). Этот второй член имеет простой физический смысл: если представить его в виде $c \operatorname{rot} \mathbf{M}$, то вектор

$$\mathbf{M} = -\frac{m\mathbf{b}}{B}\int f_e J\, d^3p \tag{60.10}$$

[1]) Во втором члене произведено интегрирование по частям, в результате чего оператор $\nabla_\mathbf{r}$ переносится на $\mathbf{b}f_e$.

[2]) Заметим, что такое же усреднение плотности зарядов $-e\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_e)$ приводит к обычному выражению $-e\int f_e\, d^3p$; поправочные члены, связанные с вращением частиц, появились бы здесь лишь при учете малых величин второго порядка (вторые производные по координатам).

будет представлять собой намагниченность плазмы, связанную с вращением зарядов. Магнитный момент (60.10) не зависит от знака зарядов и направлен противоположно магнитному полю, т. е. отвечает диамагнетизму.

Преобразуем к новым переменным кинетическое уравнение. Поскольку функция распределения f_e отнесена к тому же элементу фазового пространства, что и раньше (лишь преобразованному к другому виду — (60.7)), то кинетическое уравнение по-прежнему имеет вид $df_e/dt = \mathrm{St}\, f_e$, или, раскрыв левую часть новых переменных,

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + v_{\|}\frac{\partial f_e}{\partial R_{\|}} + \frac{c}{B}[\mathbf{E}\mathbf{b}]\frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{R}_{\perp}} = \mathrm{St}\, f_e. \qquad (60.11)$$

Здесь введены очевидные обозначения для проекций векторов и использованы равенства (60.5), (60.6). Член же с $\dot{v}_{\perp}$ в этом приближении отсутствует, поскольку $v_{\perp}$ при дрейфе не меняется.

Перейдем к записи интеграла столкновений в дрейфовых переменных [1]). Отметим прежде всего, что акт столкновения в этих переменных состоит в «мгновенном» изменении скоростей $v_{\|}$ и $v_{\perp}$ и перпендикулярных к магнитному полю компонент радиус-вектора центра кружка $\mathbf{R}_{\perp}$ (что же касается параллельной компоненты, $R_{\|}$, то она практически совпадает с соответствующей координатой самой частицы и при столкновении не меняется).

Столкновения происходят лишь между частицами, проходящими друг мимо друга на прицельных расстояниях ρ, не превышающих радиуса экранирования a: $\rho \lesssim a$. Если ρ мало по сравнению с ларморовскими радиусами сталкивающихся частиц, то магнитное поле вообще не сказывается на процессе рассеяния, поскольку на таких расстояниях поле не искривляет заметным образом траекторий частиц. Описание таких столкновений в терминах дрейфовых переменных вообще не является естественным. Поэтому использование интеграла столкновений в этих переменных целесообразно лишь в условиях, когда по крайней мере для одной из сталкивающихся частиц $r_B \ll a$.

При кулоновском взаимодействии частиц в присутствии магнитного поля, как и в его отсутствие, существенны далекие столкновения и соответственно малые изменения всех переменных. Поэтому произведенный в § 41 вывод интеграла столкновений в **p**-пространстве остается в силе и для интеграла столкновений в пространстве переменных $\mathbf{R}_{\perp} = (X, Y)$, $v_{\|}$, J (ось z — вдоль магнитного поля), если теперь вместо компонент импульса

[1]) Интеграл столкновений в дрейфовых переменных был получен *Е.М. Лифшицем* (1937) для электронного газа и обобщен для плазмы *С.Т. Беляевым* (1955).

ввести четыре переменные $g_k\{X, Y, v_{\|}, J\}$ и понимать под Δg_1, $\Delta g_2, \ldots$ изменения этих величин при столкновениях.

Интеграл столкновений по-прежнему приводится к виду

$$\operatorname{St} f = -\sum_{k=1}^{4} \frac{\partial s_k}{\partial g_k} = -\frac{\partial \mathbf{s}_\perp}{\partial \mathbf{R}_\perp} - \frac{\partial s_{\|}}{\partial v_{\|}} - \frac{\partial s_J}{\partial J} \tag{60.12}$$

(поток $\mathbf{s}_\perp$ по определению имеет компоненты только в плоскости, перпендикулярной $\mathbf{B}$); здесь существенно, что элемент объема в пространстве переменных g_k сводится просто к произведению их дифференциалов; поэтому интеграл столкновений имеет вид обычной дивергенции. Вывод в § 41 требует лишь небольших изменений. Прежде всего, при записи (41.2) было уже учтено, что в силу сохранения импульса $\Delta\mathbf{p} \equiv \mathbf{q} = -\Delta\mathbf{p}'$. Для рассматриваемых дрейфовых переменных такого соотношения, разумеется, нет. Повторив вывод без этого предположения, найдем (скажем, для столкновений электронов с ионами)

$$s_k^{(ei)} = \sum_{l=1}^{4} \frac{1}{2} \int \left\{ \langle \Delta g_{ek} \Delta g_{el} \rangle f_i \frac{\partial f_e}{\partial g_{el}} + \right.$$
$$\left. + \langle \Delta g_{ek} \Delta g_{il} \rangle f_e \frac{\partial f_i}{\partial g_{il}} \right\} d^3 p_i, \tag{60.13}$$

где $d^3p_i = 2\pi M^3\, dJ_i\, dv_{i\|}$, Δg_k — изменение величин g_k при столкновении, а угловые скобки означают усреднение по столкновениям.

При выводе (60.13) существенно использована также возможность переставить в интеграле столкновений начальное и конечное состояния, после чего становится очевидным сокращение линейных по Δg_k членов; кроме того, это позволяет производить интегрирование по всему g-пространству. В § 41 такое преобразование было сделано в силу симметрии по отношению к обращению времени, связывающей вероятности прямого и обратного столкновений. При наличии магнитного поля такая симметрия имеет место только при условии изменения направления поля $\mathbf{B}$ на обратное, так что она связывает вероятности столкновения по существу в различных полях. Однако мы увидим ниже, что в данном случае симметрия относительно обращения времени восстанавливается интегрированием по прицельным параметрам.

Наконец, в (60.13) использовано, что взаимное рассеяние «кружков» имеет место лишь при их прохождении на расстояниях друг от друга, не превосходящих радиуса экранирования a. Предполагая, что функция распределения мало меняется на таких расстояниях, мы положили приближенно $f_i(\mathbf{R}_i, v_{i\|}, J_i) \approx f_i(\mathbf{R}_e, v_{i\|}, J_i)$ и произвели интегрирование по

d^3R_i. В результате в (60.13) осталось лишь интегрирование по d^3p_i, а усреднение по столкновениям включает в себя интегрирование по положениям $\mathbf{R}_i$. Ниже в конкретных случаях это усреднение будет выражено с помощью соответствующего сечения рассеяния. Сейчас укажем лишь, что средние значения $\langle\Delta\mathbf{R}_\perp\Delta J\rangle$, $\langle\Delta\mathbf{R}_\perp\Delta v_{||}\rangle$ равны нулю. Это видно из того, что произведения $\Delta X\Delta J$, $\Delta Y\Delta J$ (и такие же с $\Delta v_{||}$ вместо ΔJ) образуют вектор в плоскости xy. Поскольку для ларморовских кружков не существует в этой плоскости каких-либо выделенных направлений, указанный вектор должен обратиться в нуль при усреднении.

Важное свойство интеграла столкновений в дрейфовых переменных состоит в том, что его добавление к кинетическому уравнению изменяет выражение для потока частиц (в обычном пространстве!) через функцию распределения. Чтобы убедиться в этом, запишем кинетическое уравнение в виде

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + \frac{\partial(\mathbf{V}f_e)}{\partial\mathbf{R}_\perp} + \frac{\partial}{\partial v_{||}}(v_{||}f_e) = -\frac{\partial\mathbf{s}_{e\perp}}{\partial\mathbf{R}_\perp} - \frac{\partial s_{e||}}{\partial v_{||}} - \frac{\partial s_{eJ}}{\partial J} \tag{60.14}$$

(ввиду предполагаемого постоянства $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}$ можно ввести $\mathbf{V}$ под знак производной). Проинтегрировав это уравнение по d^3p, получим

$$\frac{\partial N_e}{\partial t} + \operatorname{div}_{\mathbf{R}}\int(\mathbf{V}f_e + \mathbf{s}_{e\perp})\,d^3p = 0, \qquad N_e = \int f_e\,d^3p \tag{60.15}$$

(индекс e у электронных переменных для краткости опускаем); N_e — пространственная плотность числа кружков; выражение под знаком $\operatorname{div}_{\mathbf{R}}$ есть, следовательно, плотность потока этих кружков. Мы видим, что к обычному выражению $\int\mathbf{V}f_e\,d^3p$ добавляется еще связанный со столкновениями член $\int\mathbf{s}_{e\perp}\,d^3p$. Этот член представляет собой по существу диффузионный поток в поперечном к магнитному полю направлении. При таком описании (в отличие от обычного описания диффузии) он входит непосредственно в кинетическое уравнение.

При использовании этих выражений следует, конечно, учитывать, что плотность электрического тока связана с потоком истинных частиц, а не кружков. Поток частиц согласно (60.9) отличается от потока кружков членом с ротором, описывающим намагниченность. Окончательное выражение для плотности тока электронов имеет поэтому вид

$$\mathbf{j}_e = -e\int\mathbf{V}f_e\,d^3p - \frac{mc}{B}\operatorname{rot}\left(\mathbf{b}\int f_eJ\,d^3p\right) - \int e\mathbf{s}_{e\perp}\,d^3p. \tag{60.16}$$

Выражение (60.13) приобретает реальный смысл лишь после вычисления фигурирующих в нем средних значений. Пока-

жем, как это делается на примере электронного интеграла для электрон-ионных столкновений.

Вычисления производятся различным образом в двух областях значений прицельных параметров ρ, определяемых неравенствами:

$$\text{I)}\ \rho \ll r_{Be}, \quad \text{II)}\ r_{Be} \ll \rho \ll a. \tag{60.17}$$

Заметим, что интегрирования по параметру ρ будут, как обычно при кулоновском рассеянии, иметь логарифмический характер. С логарифмической точностью можно не делать различия между сильными ($\gg$) и слабыми ($>$) неравенствами. Поэтому области (60.17) перекрывают по существу весь интервал изменения прицельного параметра (в соответствии с (60.1) предполагается, конечно, что $r_{Be} \ll a$). Для существования области I необходимо также, чтобы было

$$r_{Be} \gg \rho_{\min} = \frac{ze^2}{mv_{Te}^2}, \tag{60.18}$$

где $\rho_{\min}$ — прицельное расстояние, на котором угол рассеяния делается ~ 1 (мы рассматриваем здесь только квазиклассический случай $\dfrac{e^2}{\hbar v_{Te}} \gg 1$).

В то же время будем считать, что $r_{Bi} \gtrsim a$. Тогда для всех прицельных параметров $\rho \lesssim a$ влияние магнитного поля на движение ионов (в процессе столкновения) несущественно: траектория иона мало искривляется полем на расстояниях $\sim \rho$. При этом можно пренебречь (в пределе $m/M \to 0$) отдачей ионов, т. е. положить равными нулю изменения всех характеризующих его переменных $R_\perp$, $v_{||}$, J [1]). Тогда в (60.13) исчезает второй член в фигурных скобках, так что электрон-ионная часть электронного тока принимает вид

$$s_\alpha^{(ei)} = -\frac{N_i}{2}\langle \Delta X_\alpha \Delta X_\beta\rangle^{(ei)} \frac{\partial f_e}{\partial X_\beta}. \tag{60.19}$$

Величины $\langle \Delta X_\alpha \Delta X_\beta\rangle$ составляют пространственный тензор, поперечный к направлению поля. Представим его в виде

$$\langle \Delta X_\alpha \Delta X_\beta\rangle = \frac{1}{2}\langle (\Delta \mathbf{R}_\perp)^2\rangle (\delta_{\alpha\beta} - b_\alpha b_\beta), \tag{60.20}$$

выражающем эту поперечность явным образом. Поток же (60.19) запишется тогда как

$$\mathbf{s}^{(ei)} = -\frac{N_i}{4}\langle (\Delta \mathbf{R}_\perp)^2\rangle^{(ei)} \nabla_\perp f_e, \tag{60.21}$$

---

[1]) Этого нельзя сделать, если существуют прицельные параметры, для которых $a \gg \rho \gg r_{Bi}$. При таких столкновениях ион дрейфует в поле электрона и его большая масса не проявляется.

где $\nabla_\perp = \nabla_{\mathbf{R}} - \mathbf{b}(\mathbf{b}\nabla_{\mathbf{R}})$ — оператор дифференцирования в поперечных к $\mathbf{b}$ направлениях.

Аналогичные (60.19) выражения для «скоростных потоков»:

$$\begin{aligned} s_{\|}^{(ei)} &= -\frac{N_i}{2}\left\{\langle(\Delta v_{\|})^2\rangle^{(ei)}\frac{\partial f_e}{\partial v_{\|}} + \langle\Delta v_{\|}\Delta J\rangle^{(ei)}\frac{\partial f_e}{\partial J}\right\}, \\ s_J^{(ei)} &= -\frac{N_i}{2}\left\{\langle\Delta v_{\|}\Delta J\rangle^{(ei)}\frac{\partial f_e}{\partial v_{\|}} + \langle(\Delta J)^2\rangle^{(ei)}\frac{\partial f_e}{\partial J}\right\}. \end{aligned} \tag{60.22}$$

В равновесии, т. е. для максвелловского распределения

$$f_e = \text{const}\cdot\exp\left\{-\frac{m}{T}\left(\frac{v_{\|}^2}{2} + J\right)\right\}, \tag{60.23}$$

интеграл столкновений должен обращаться в нуль. Подставив (60.23) в (60.22) и приравняв потоки нулю, найдем

$$\langle\Delta v_{\|}\Delta J\rangle^{(ei)} = -v_{\|}\langle(\Delta v_{\|})^2\rangle^{(ei)} = -\frac{1}{v_{\|}}\langle(\Delta J)^2\rangle^{(ei)}. \tag{60.24}$$

Вычислим сначала вклад от области I. В этой области можно считать, что магнитное поле вообще не сказывается на процессе рассеяния, поскольку на таких расстояниях не искривляется заметным образом траектория не только иона, но и электрона. Естественной переменной для описания столкновения является при этом обычный импульс электрона $\mathbf{p}$, через который и надо выразить дрейфовые переменные. Согласно (60.3), (60.4), (60.8) имеем

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} - \frac{1}{m\omega_{Be}}[\mathbf{b}\mathbf{p}_\perp], \quad v_{\|} = \frac{p_{\|}}{m}, \quad J = \frac{p_\perp^2}{2m^2}.$$

Имея в виду, что координаты частицы $\mathbf{r}$ (в отличие от координат центра орбиты $\mathbf{R}$!) не меняются при столкновении, находим отсюда

$$\Delta\mathbf{R}_\perp = \frac{1}{m\omega_{Be}}[\mathbf{b}\mathbf{q}_\perp], \quad \Delta v_{\|} = \frac{q_{\|}}{m}, \quad \Delta j = \frac{1}{m^2}\mathbf{p}_\perp\mathbf{q}_\perp, \tag{60.25}$$

где $\mathbf{q}$ — малое изменение импульса $\mathbf{p}$.

Отмечая индексом I вклад от рассматриваемой категории столкновений, пишем теперь

$$\langle(\Delta\mathbf{R}_\perp)^2\rangle_{\text{I}}^{(ei)} = \int(\Delta\mathbf{R}_\perp)^2 v\,d\sigma = \frac{1}{m^2\omega_{Be}^2}\int q_\perp^2 v\,d\sigma, \tag{60.26}$$

где $d\sigma$ — сечение рассеяния электрона на неподвижном ионе. Взяв последнее из (41.6) и произведя интегрирование, получим

$$\langle(\Delta\mathbf{R}_\perp)^2\rangle_{\text{I}}^{(ei)} = \frac{8\pi z^2 e^4 L_{\text{I}}}{m^2\omega_{Be}^2 v}\frac{1+\cos^2\theta}{2}, \tag{60.27}$$

где θ — угол между $\mathbf{v}$ и $\mathbf{b}$, а

$$L_{\text{I}} = \ln \frac{m r_{Be} v_{Te}^2}{z e^2} = \ln \frac{m v_{Te}^3}{z e^2 \omega_{Be}} \tag{60.28}$$

— кулоновский логарифм, «обрезанный» сверху на прицельных расстояниях $\rho \sim r_{Be}$ (верхняя граница области I). Наконец, выразив этот результат через дрейфовые переменные, окончательно находим

$$\langle (\Delta \mathbf{R}_\perp)^2 \rangle_{\text{I}}^{(ei)} = \frac{8\pi z^2 e^2 c^2 L_{\text{I}}}{B^2} \frac{v_\parallel^2 + J}{(v_\parallel^2 + 2J)^{3/2}}. \tag{60.29}$$

Аналогичное вычисление дает

$$\langle \Delta v_\parallel \Delta J \rangle_{\text{I}}^{(ei)} = -\frac{8\pi z^2 e^4 L_{\text{I}}}{m^2} \frac{J v_\parallel}{(v_\parallel^2 + 2J)^{3/2}}, \tag{60.30}$$

а оставшиеся две величины определяются из (60.24).

Обратимся к области II. Здесь естественными являются именно дрейфовые переменные и столкновение описывается как дрейфовое отклонение кружка, летящего в направлении $\mathbf{b}$ (ось z) в кулоновском поле неподвижного иона. При дрейфе скорость $v_\perp$, а значит, и J не меняются; в силу закона сохранения энергии при рассеянии на тяжелом ионе, это в свою очередь приводит к сохранению $v_\parallel$. Поэтому область II не вносит вклада в величины (60.24).

Вклад же в $\langle (\Delta \mathbf{R}_\perp)^2 \rangle$ вычисляется как

$$\langle (\mathbf{R}_\perp)^2 \rangle_{\text{II}}^{(ei)} = \int (\Delta \mathbf{R}_\perp)^2 |v_\parallel| \, d\sigma = \int (\Delta \mathbf{R}_\perp)^2 |v_\parallel| \, d^2\rho, \tag{60.31}$$

где ρ — значение радиус-вектора центра кружка $\mathbf{R}_\perp$ до столкновения. Изменение $\mathbf{R}_\perp$ при пролете кружка в постоянном и однородном магнитном поле $\mathbf{B}$ и постоянном электрическом поле $\mathbf{E} = ez\mathbf{R}/R^3$ (поле иона) определяется уравнением дрейфа

$$\frac{d\mathbf{R}_\perp}{dt} = \frac{c}{B}[\mathbf{b}\mathbf{E}] = \frac{zec}{B} \frac{[\mathbf{b}\mathbf{R}_\perp]}{(R_\parallel^2 + R_\perp^2)^{3/2}} \tag{60.32}$$

(см. (60.6)). В первом приближении можно положить в правой части этого уравнения $\mathbf{R}_\perp \approx \boldsymbol{\rho}$, $R_\parallel = v_\parallel t$. Полное изменение $\mathbf{R}_\perp$ при столкновении получается интегрированием (60.32) по t от $-\infty$ до ∞ и равно

$$\Delta \mathbf{R}_\perp = \frac{2zec}{B|v_\parallel|} \frac{[\mathbf{b}\boldsymbol{\rho}]}{\rho^2}. \tag{60.33}$$

Подставив это выражение в (60.31) и произведя интегрирование (с логарифмической точностью, отвечающей границам области II), найдем

$$\langle (\Delta \mathbf{R}_\perp)^2 \rangle_{\text{II}}^{(ei)} = \frac{8\pi z^2 e^2 c^2 L_{\text{II}}}{B^2 |v_\parallel|}, \quad L_{\text{II}} = \ln \frac{a}{r_{Be}}. \tag{60.34}$$

Вклады (60.29) и (60.34) имеют, вообще говоря, одинаковый порядок величины

$$N_i\langle(\Delta\mathbf{R}_\perp)^2\rangle \sim \nu_{ei} r_{Be}^2,$$

где ν_{ei} — средняя частота электрон-ионных столкновений. Особенность вклада (60.34) состоит, однако, в том, что он обращается в бесконечность при $v_{||} \to 0$ вне зависимости от значения $v_\perp$. Физический смысл этой расходимости состоит в том, что при малой скорости $v_{||}$ кружок долго находится в поле иона и за это время дрейф уносит его на большое расстояние.

В действительности, конечно, формула (60.34) становится неприменимой при малых $v_{||}$ по ряду причин: 1) если $r_{Bi} \gg a$, то при $|v_{||}| \ll v_{Ti}$ за время столкновения ион может уйти от электрона; этот механизм «обрезает» расходимость при $|v_{||}| \sim v_{Ti}$; 2) при выводе формулы во всяком случае подразумевается, что $|\Delta\mathbf{R}_\perp| \ll \rho$; 3) кружок может уйти от данного иона за счет дрейфа в поле других частиц (тройное столкновение).

Написанные формулы решают вопрос о составлении кинетического уравнения в дрейфовом приближении, которое позволяет, в частности, находить кинетические коэффициенты плазмы в первом неисчезающем по $1/B$ приближении (см. задачу 1).

Наконец, осталось объяснить, каким образом интегрирование по $d^2\rho$ формально восстанавливает симметрию по отношению к обращению времени, что уже было использовано при записи (60.13). Нарушение этой симметрии проявляется в изменении знака отклонения $\Delta\mathbf{R}_\perp$ в (60.33) при изменении направления $\mathbf{B}$ на обратное. Прежний знак можно восстановить, однако, производя замену переменной интегрирования $\boldsymbol{\rho} \to -\boldsymbol{\rho}$, так что изменение знака $\mathbf{B}$ в этом приближении нигде сказаться не может (в области же I магнитное поле вообще не влияет на процесс рассеяния).

Задачи

1. В дрейфовом приближении определить коэффициент Холла $\mathcal{R}$ и поперечную проводимость $\sigma_\perp$ плазмы (*С.Т. Беляев*, 1955).

Решение. Рассматривая плазму с градиентом плотности электронов (в отсутствие электрического поля и градиента температуры), полагаем функцию распределения f_e в (60.16) и (60.21) максвелловской и находим

$$\mathbf{j} = \frac{cT}{B}[\mathbf{b}\nabla N_e] + eD_\perp \nabla_\perp N_e,$$

причем коэффициент поперечной диффузии

$$D_\perp = \frac{N_i}{4}\overline{\langle(\Delta\mathbf{R}_\perp)^2\rangle},$$

где черта означает усреднение по максвелловскому распределению электронов. Сравнив с общим выражением (58.13), находим в первом по $1/B$ при-

приближении прежнее выражение (59.8) для $\mathcal{R}$. В следующем приближении получаем

$$\sigma_\perp = \frac{T}{e^2 N_e \mathcal{R}^2 B^2 D_\perp}. \tag{1}$$

В области II (см. (60.17)) берем $\langle(\Delta \mathbf{R}_\perp)^2\rangle$ из (60.34). С логарифмической точностью имеем

$$\overline{|v_\parallel|^{-1}} = \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{1/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{mv_\parallel^2}{2T}\right) \frac{dv_\parallel}{|v_\parallel|} \approx 2 \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{1/2} \ln \frac{v_{Te}}{v_{\min}},$$

где $v_{\min}$ определяется одним из указанных в конце параграфа механизмов. Положив, например, $v_{\min} \sim v_{Ti}$, получим в результате

$$D_\perp^{\text{II}} = \frac{(2\pi m)^{1/2} z^2 e^2 c^2 N_i}{T^{1/2} B^2} \ln \frac{M}{m} \ln \frac{a}{R_{Be}}. \tag{2}$$

Аналогичным образом, взяв $\langle(\Delta \mathbf{R}_\perp)^2\rangle$ из (60.27), получим вклад в коэффициент диффузии от области I:

$$D_\perp^{\text{I}} = \frac{4(2\pi m)^{1/2} z^2 e^2 c^2 N_i}{3T^{1/2} B^2} \ln \frac{m v_{Te}^3}{z e^2 \omega_{Be}}. \tag{3}$$

Если считать, что выполняется неравенство (59.10), обратное к (60.1), то область II отсутствует, а логарифм в (3) заменяется его обычным кулоновским значением (41.10). В таком случае подстановка (3) в (1) приводит к формуле (59.15) для $\sigma_\perp$.

2. Определить коэффициент поперечной диффузии $D_\perp$ для столкновений электронов с нейтральными атомами.

Р е ш е н и е. Ввиду короткодействующего характера взаимодействия электрона с атомами имеется только область I, где под a следует понимать размер атома[1]). Остается справедливой и формула (60.26). В нее, однако, нужно теперь подставить сечение рассеяния электрона на нейтральном атоме. После интегрирования по углам $D_\perp$ выражается через транспортное сечение этого рассеяния σ_t:

$$D_\perp = \frac{N_a}{4} \overline{\langle(\Delta R_\perp)^2\rangle} = \frac{N_a}{2\omega_{Be}^2} \overline{v^3 \sigma_t}$$

(N_a — плотность числа атомов). Для независящего от скорости электрона сечения σ_t получаем после усреднения по максвелловскому распределению:

$$D_\perp = \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \left(\frac{2T}{m}\right)^{3/2} \frac{N_a \sigma_t}{\omega_{Be}^2}.$$

[1]) Может возникнуть сомнение в применимости интеграла столкновений (60.12) для рассеяния на короткодействующем потенциале, происходящего, разумеется, на углы порядка единицы. Легко видеть, однако, что в данной задаче требуется лишь малость изменений положения центра орбиты, $\Delta R_\perp \sim r_{Be}$, по сравнению с характерными расстояниями, на которых меняется концентрация электронов, что соответствует условию применимости уравнения поперечной диффузии (ср. конец § 59).

ГЛАВА VI

ТЕОРИЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЕЙ

§ 61. Пучковая неустойчивость

Согласно результатам § 34, амплитуда возмущения с волновым вектором **k** в однородной неограниченной среде ведет себя асимптотически при $t \to \infty$ как

$$e^{-i\omega(\mathbf{k})t}, \tag{61.1}$$

где $\omega(\mathbf{k})$ — частота волн, распространяющихся в среде. В частности, для продольных волн в плазме частоты $\omega(\mathbf{k})$ — корни уравнения [1])

$$\varepsilon_l(\omega, \mathbf{k}) = 0. \tag{61.2}$$

Частоты $\omega(\mathbf{k})$, вообще говоря, комплексны. Если мнимая часть $\operatorname{Im}\omega \equiv -\gamma < 0$, то возмущение затухает со временем. Если же в некотором интервале значений **k** имеем $\gamma < 0$, то такие возмущения возрастают — среда неустойчива по отношению к колебаниям в этом интервале длин волн; величину $|\gamma|$ называют в таком случае *инкрементом неустойчивости*. Сразу же подчеркнем, что, говоря о «неограниченном» возрастании возмущения (по закону $\exp(|\gamma|t)$), мы всегда, здесь и ниже, имеем в виду лишь поведение в линейном приближении; в действительности, разумеется, возрастание ограничено нелинейными эффектами.

В бесстолкновительной плазме мнимая часть частоты возникает в силу затухания Ландау. Термодинамически равновесное состояние плазмы, отвечая абсолютному максимуму энтропии, устойчиво по отношению к любому возмущению. В § 30 было уже отмечено, однако, что для неравновесных распределений в плазме поглощение энергии колебаний может смениться их усилением. Это проявляется в появлении области значений независимых переменных **k** и ω ($\omega > 0$), в которой мнимая часть диэлектрической проницаемости отрицательна: $\varepsilon_l''(\omega, \mathbf{k}) < 0$. Подчеркнем, однако, что наличие таких областей само по себе еще не означает обязательно неустойчивости плазмы (во всяком случае, в линейном приближении); необходимо еще, чтобы в эту область фактически попадала какая-либо из ветвей спектра плазменных колебаний.

---

[1]) Напомним, что в случае анизотропной плазмы это дисперсионное уравнение относится к квазипродольным «медленным» волнам — см. § 32.

Характерный пример неустойчивости представляет направленный пучок электронов, проходящих через неподвижную плазму (*А.И. Ахиезер*, *Я.Б. Файнберг*, 1949; *D. Bohn*, *E.P. Gross*, 1949). Пучок предполагается электрически компенсированным: сумма электронных плотностей зарядов в плазме и пучке равна ионной плотности зарядов плазмы. Система однородна и неограничена, т. е. пучок (как и неподвижная плазма) заполняет все пространство, причем его направленная скорость **V** везде одинакова. Скорость **V** будем считать нерелятивистской.

Предположим сначала, что как пучок, так и плазма — холодные, т. е. можно пренебречь тепловым движением их частиц; необходимое для этого условие выяснится ниже.

В области частот электронных колебаний продольная диэлектрическая проницаемость системы плазмы-пучок имеет вид

$$\varepsilon_l(\omega, \mathbf{k}) - 1 = -\frac{\Omega_e^2}{\omega^2} - \frac{\Omega_e'^2}{(\omega - \mathbf{kV})^2}. \qquad (61.3)$$

Первый член справа отвечает неподвижной плазме, $\Omega_e = (4\pi e^2 N_e/m)^{1/2}$ есть соответствующая электронная плазменная частота. Второй член обязан электронам пучка. В системе отсчета K', движущейся вместе с пучком, вклад его электронов в $\varepsilon_l - 1$ равен $-(\Omega_e'/\omega')^2$, где ω' — частота колебаний в этой системе, а $\Omega_e' = (4\pi e^2 N_e'/m)^{1/2}$ (N_e' — плотность электронов в пучке). При переходе к исходной системе отсчета K частота ω' заменяется на

$$\omega' = \omega - \mathbf{kV} \qquad (61.4)$$

и мы приходим к выражению (61.3) [1]).

Будем считать плотность пучка малой в том смысле, что

$$N_e' \ll N_e, \qquad (61.5)$$

так что и $\Omega_e' \ll \Omega_e$. Тогда наличие пучка лишь незначительно меняет основную ветвь спектра продольных колебаний плазмы — тот корень дисперсионного уравнения $\varepsilon_l = 0$, для которого $\omega \approx \Omega_e$. Но наряду с этой ветвью появляется еще и новая ветвь, связанная с наличием пучка; она-то нас здесь и интересует.

Чтобы член с малым числителем $\Omega_e'^2$ не выпадал из дисперсионного уравнения

$$\frac{\Omega_e^2}{\omega^2} + \frac{\Omega_e'^2}{(\omega - \mathbf{kV})^2} = 1, \qquad (61.6)$$

---

[1]) Закон преобразования частоты легко получить путем преобразования фазового множителя волны. Радиус-вектор точки в системе K': $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{V}t$. Поэтому

$$\mathbf{kr} - \omega t = \mathbf{kr}' - (\omega - \mathbf{kV})t = \mathbf{kr}' - \omega' t.$$

эта малость должна компенсироваться малостью знаменателя. Поэтому ищем решение в виде $\omega = \mathbf{kV} + \delta$ с малым δ. Тогда уравнение принимает вид

$$\frac{\Omega_e^2}{(\mathbf{kV})^2} + \frac{\Omega_e'^2}{\delta^2} = 1, \tag{61.7}$$

откуда

$$\delta = \pm \frac{\Omega_e'}{\left[1 - \left(\dfrac{\Omega_e}{\mathbf{kV}}\right)^2\right]^{1/2}}, \tag{61.8}$$

причем условие $\delta \ll \mathbf{kV}$ требует, чтобы $|\mathbf{kV}|$ было не слишком близко к Ω_e. Предположение же о холодности плазмы требует соблюдения условия $kv_{Te} \ll \omega$ и в данном случае означает, следовательно, что должно быть $v_{Te} \ll V$ — скорость пучка велика по сравнению с тепловой скоростью электронов плазмы.

Если $(\mathbf{kV})^2 > \Omega_e^2$, то оба корня (61.8) вещественны и колебания не нарастают. Если же

$$(\mathbf{kV})^2 < \Omega_e^2, \tag{61.9}$$

то оба значения δ мнимы; то из значений δ, в котором $\operatorname{Im}\omega = \operatorname{Im}\delta > 0$, отвечает нарастающим колебаниям. Таким образом, система неустойчива по отношению к колебаниям с достаточно малыми значениями $\mathbf{kV}$.

Другая ситуация возникает при учете теплового движения электронов в плазме. В общем случае вместо (61.3) будем иметь

$$\varepsilon_l(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_l^{(\text{пл})}(\omega, \mathbf{k}) - \frac{\Omega_e'^2}{(\omega - \mathbf{kV})^2}, \tag{61.10}$$

где $\varepsilon_l^{(\text{пл})}$ относится к плазме без пучка. Решая уравнение $\varepsilon_l = 0$ тем же способом, найдем теперь

$$\delta = \pm \frac{\Omega_e'}{[\varepsilon_l^{(\text{пл})}(\mathbf{kV}, \mathbf{k})]^{1/2}}. \tag{61.11}$$

Но в силу затухания Ландау функция $\varepsilon_l^{(\text{пл})}$ имеет мнимую часть всегда (при любом $\mathbf{k}$). Тем самым всегда будет комплексным и δ, причем в силу двойного знака в (61.11) для одной из ветвей колебаний будет $\operatorname{Im}\delta > 0$, т. е. эти колебания неустойчивы. При переходе к большим $\mathbf{V}$, отвечающим рассмотренному выше случаю холодной плазмы, связанная с затуханием Ландау часть $\operatorname{Im}\varepsilon_l$ становится экспоненциально малой и мы возвращаемся к (61.8).

В изложенных рассуждениях пренебрегалось тепловым разбросом скоростей электронов в пучке. Это пренебрежение оправдано, если величина этого разброса

$$v_{Te}' \ll \frac{|\delta|}{k}. \tag{62.12}$$

Задачи

1. Определить границу области неустойчивости пучка в холодной плазме со стороны значений $\mathbf{kV}$, близких к Ω_e.

Решение. При малых значениях разности $(\mathbf{kV})^2 - \Omega_e^2$ точность уравнения (61.7) недостаточна. Сохранив в уравнении $\varepsilon_l = 0$ (с ε_l из (61.3)) также и член следующего порядка по δ, получим

$$\frac{\Omega_e'^2}{\delta^2} \approx 1 - \frac{\Omega_e^2}{(\mathbf{kV})^2} + \frac{2\Omega_e^2\delta}{(\mathbf{kV})^3} \approx \frac{2(\mathbf{kV}-\Omega_e)}{\Omega_e} + \frac{2\delta}{\Omega_e}.$$

Введя новые величины ξ и τ согласно

$$\delta = \xi\left(\frac{1}{2}\Omega_e'\Omega_e^2\right)^{1/3}, \quad \tau = \left(\frac{2}{\Omega_e'\Omega_e^2}\right)^{1/3}(\mathbf{kV}-\Omega_e),$$

перепишем это уравнение в виде

$$\xi^3 + \tau\xi = 1$$

(для определенности считаем, что $\mathbf{kV}$ близко к $+\Omega_e$, а не к $-\Omega_e$). Все три корня уравнения (1) вещественны при $\tau > 3/2^{2/3}$, чем и определяется область устойчивости. Два из этих корней соответствуют двум корням уравнения (61.6), а третий — близкой к ним при $\Omega_e \approx \mathbf{kV}$ частоте колебаний неподвижной плазмы.

2. При условии, обратном к (61.12), исследовать устойчивость пучка с тепловым разбросом скоростей.

Решение. В указанных условиях пучковая ветвь в спектре колебаний отсутствует. Что касается основной ветви плазменных колебаний, то наличие пучка малой плотности мало влияет на вещественную часть ее частоты, которая по-прежнему дается (при $kv_{Te} \ll \Omega_e$) формулой (32.5):

$$\omega = \Omega_e\left[1 + \frac{3}{2}\left(\frac{kv_{Te}}{\Omega_e}\right)^2\right].$$

Декремент же затухания γ дается суммой декрементов от самой плазмы и от пучка. Согласно (31.7) имеем

$$\gamma = \sqrt{\frac{\pi}{8}}\left[-\frac{\omega\Omega_e^2}{(kv_{Te})^3}\exp\left(-\frac{\omega^2}{2k^2v_{Te}^2}\right) - \frac{\Omega_e'^2(\omega-\mathbf{kV})}{(kv_{Te}')^3}\exp\left(-\frac{(\omega-\mathbf{kV})^2}{2k^2v_{Te}^2}\right)\right].$$

Область неустойчивости определяется условием $\gamma(k) > 0$. Для этого во всяком случае должно быть $\mathbf{kV} > \omega$. Наибольший инкремент будет при $\delta \equiv \mathbf{kV} - \omega \lesssim kv_{Te}'$. В этой области первый член в (1) экспоненциально мал (в силу $\Omega_e \gg kv_{Te}$) и им можно пренебречь (если только N_e' не слишком мало). Тогда инкремент γ будет даваться лишь вторым членом; отметим, что он пропорционален плотности пучка N_e'.

3. Исследовать устойчивость ионно-звуковых волн в двухтемпературной плазме ($T_e \gg T_i$), в которой электронная компонента движется относительно ионной с макроскопической скоростью $\mathbf{V}$, причем $V \ll v_{Te}$.

Решение. При условии $V \ll v_{Te}$ направленное движение электронов мало сказывается на законе дисперсии ионно-звуковых волн, который будет по-прежнему даваться формулой (33.4):

$$\frac{\omega}{k} = \left(\frac{zT_e}{M}\right)^{1/2}\frac{1}{(1+k^2a_e^2)^{1/2}}. \tag{1}$$

Декремент же затухания (его электронная часть) получается из (33.6) заменой (61.4):

$$\gamma = (\mathbf{kV} - \omega)\left(\frac{\pi z m}{8M}\right)^{1/2}. \tag{2}$$

Условие неустойчивости: $\mathbf{kV} > \omega$; для этого во всяком случае должно быть $V > \omega/k$. Вблизи границы неустойчивости множитель $\mathbf{kV} - \omega$ в (2) мал, и тогда может оказаться необходимым учет в γ также и ионной части затухания, которая в обычных условиях мала.

§ 62. Абсолютная и конвективная неустойчивость

Наличие у дисперсионного уравнения корней в верхней ω-полуплоскости означает, что малое начальное возмущение в виде плоской волны возрастает, т. е. система неустойчива по отношению к такому возмущению. Реально, однако, всякое начальное возмущение представляет собой «волновой пакет» конечных размеров в пространстве, и плоские волны представляют собой лишь его отдельные фурье-компоненты. С течением времени пакет «расплывается», а его амплитуда (в неустойчивой системе) возрастает. В то же время, однако, как и всякий волновой пакет, он будет перемещаться в пространстве. Здесь могут иметь место два случая.

В одном случае, несмотря на перемещение пакета, возмущение неограниченно возрастает в любой точке пространства; такую неустойчивость называют *абсолютной*. В другом случае пакет сносится так быстро, что в каждой фиксированной точке пространства возмущение стремится при $t \to \infty$ к нулю; такую неустойчивость называют *конвективной*.

Сразу же подчеркнем, что это различие относительно в том смысле, что характер неустойчивости всегда определяется по отношению к той или иной системе отсчета и переход от одной системы к другой может изменить этот характер: конвективная в некоторой системе неустойчивость становится абсолютной в системе, движущейся «вместе с пакетом», а абсолютная неустойчивость становится конвективной в системе, достаточно быстро «уходящей» от пакета.

Это обстоятельство, однако, отнюдь не лишает физического смысла различие между двумя типами неустойчивости. В реальных постановках задачи всегда существует выделенная с экспериментальной точки зрения система отсчета, относительно которой и следует рассматривать неустойчивость. Допустимость рассмотрения физической системы, как бесконечно протяженной, не исключает того факта, что реально она имеет границы (например, стенки), которые и служат «лабораторной системой отсчета». Более того, фактическая ограниченность системы может приводить к тому, что при конвективной неустойчивости

возмущение может вообще не успеть развиться, прежде чем пакет будет «вынесен» за границы системы (например, при течении жидкости по трубе).

Излагаемая ниже теория, позволяющая установить критерий различения обоих типов неустойчивости, имеет очень общий характер [1]). Речь может идти о любой вообще однородной и бесконечной (хотя бы в одном направлении — ось x) системе. Поэтому мы не будем конкретизировать здесь природу среды и возмущения в ней, обозначая последнее как некоторое $\psi(t, \mathbf{r})$. При этом мы ограничимся случаем одномерного пакета. Если речь идет о трехмерной системе, то это значит, что рассматриваются возмущения вида

$$\psi(t, \mathbf{r}) = \psi(t, x)e^{i(k_y y + k_z z)}$$

с заданными значениями k_y, k_z.

Представим $\psi(t, x)$ в виде одностороннего разложения Фурье по времени — от $t = 0$ (момент возникновения возмущения) до $t = \infty$. Компоненту такого разложения обозначим через $\varphi(\omega, x)$:

$$\varphi(\omega, x) = \int_0^\infty \psi(t, x)e^{i\omega t}\, dt. \tag{62.1}$$

В дальнейшем нам придется рассматривать возмущения, возрастающие при $t \to \infty$. Мы будем предполагать (как это фактически имеет место), что это возрастание происходит не быстрее, чем по некоторому экспоненциальному закону $\exp(\sigma_0 t)$. Тогда интеграл (62.1) можно сделать сходящимся, считая ω комплексной величиной с $\operatorname{Im}\omega = \sigma > \sigma_0$. В этой области $\varphi(\omega, x)$ как функция комплексной переменной ω не имеет особенностей. В области же $\operatorname{Im}\omega < \sigma_0$ функцию $\varphi(\omega, x)$ следует понимать в смысле аналитического продолжения; здесь она, разумеется, имеет особенности.

Обратное выражение для функции $\psi(t, x)$ через ее фурье-образ имеет вид

$$\psi(t, x) = \int\limits_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} e^{-i\omega t}\varphi(\omega, x)\frac{d\omega}{2\pi}, \tag{62.2}$$

причем $\sigma > \sigma_0$, так что путь интегрирования в (62.2) (будем называть его ω-контуром) проходит в верхней полуплоскости ω выше всех особых точек функции $\varphi(\omega, x)$.

---

[1]) Такой критерий был установлен впервые *Стэрроком* (*P.A. Sturrock*, 1958). Излагаемая ниже формулировка критерия принадлежит *Бригсу* (*R.J. Briggs*, 1964), которому мы в основном и следуем в § 62–64.

Функцию $\varphi(\omega, x)$ в свою очередь разложим в интеграл Фурье по координате x:

$$\varphi(\omega, x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_{\omega k}^{(+)} e^{ikx} \frac{dk}{2\pi} \tag{62.3}$$

(опускаем для краткости индекс у k_x).

Функция $\psi_{\omega k}^{(+)}$ получается в каждом конкретном случае путем решения линеаризованных «уравнений движения» исследуемой системы и имеет вид

$$\psi_{\omega k}^{(+)} = \frac{g_{\omega k}}{\Delta(\omega, k)}, \tag{62.4}$$

где $g_{\omega k}$ определяется начальным возмущением, а функция $\Delta(\omega, k)$ характерна для системы как таковой (так, для плазмы роль «уравнения движения» играет кинетическое уравнение, $\Delta(\omega, k)$ оказывается продольной диэлектрической проницаемостью плазмы, а $g_{\omega k}$ выражается через фурье-компоненту начального возмущения формулой (34.12)).

Будем считать, что $g_{\omega k}$ как функция комплексных переменных ω и k не имеет особенностей при конечных значениях этих переменных, т. е. является их целой функцией [1]. Все особые точки $\psi_{\omega k}^{(+)}$ совпадают тогда с особенностями множителя $\dfrac{1}{\Delta(\omega, k)}$. Равенство

$$\Delta(\omega, k) = 0 \tag{62.5}$$

представляет собой дисперсионное уравнение системы; его корни $\omega(k)$ определяют частоты колебаний с заданными (вещественными) значениями волнового вектора k. Как мы видели в § 34, именно эти частоты определяют асимптотический (при $t \to \infty$) закон изменения со временем фурье-компоненты возмущения с заданным значением k:

$$\psi_k(t) \sim e^{-i\omega(k)t} = e^{-i\omega'(k)t + \omega''(k)t}.$$

Если исходить из этого закона, то нахождение асимптотического закона изменения возмущения в заданной точке пространства требовало бы исследования интеграла

$$\psi(t, x) \sim \int e^{-i\omega'(k)t} e^{\omega''(k)t} e^{ikx}\, dk. \tag{62.6}$$

При наличии неустойчивости, когда в некоторой области значений k имеем $\omega''(k) > 0$, один из множителей в подынтегральном

[1] Для этого во всяком случае необходимо, чтобы начальный волновой пакет достаточно быстро (быстрее чем $\exp(-\alpha|x|)$) убывал в пространстве.

выражении при $t \to \infty$ неограниченно растет, а другой становится бесконечно быстро осциллирующей функцией; эти противоположные тенденции затрудняют оценку интеграла.

Вместо этого вернемся к выражению $\psi(t, x)$ в виде (62.2), до выполнения интегрирования по ω. Сместим ω-контур вниз до его «зацепления» за первую (наиболее высокую, т. е. с наибольшим ω'') особую точку функции $\varphi(\omega, x)$; пусть эта точка лежит при $\omega = \omega_c$ (как будет ясно из дальнейшего, ω_c не зависит от x). Очевидно, что асимптотическое значение интеграла определяется окрестностью именно этой точки, так что

$$\psi(t,x) \propto e^{-i\omega_c t} = \exp\left(-i\omega_c' t + \omega_c'' t\right). \qquad (62.7)$$

Если $\omega_c'' > 0$, то возмущение растет в каждой фиксированной точке x, т. е. неустойчивость абсолютна. Если же $\omega_c'' < 0$, то в фиксированных точках возмущение стремится к нулю — неустойчивость конвективна. Искомый критерий сводится, таким образом, к определению ω_c.

Функция $\varphi(\omega, x)$ дается интегралом (62.3) с $\psi_{\omega k}^{(+)}$ из (62.4):

$$\varphi(\omega, x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{g_{\omega k}}{\Delta(\omega, k)} e^{ikx} \frac{dk}{2\pi}. \qquad (62.8)$$

Поскольку, по предположению, $g_{\omega k}$ — целая функция k, то особенности подынтегрального выражения (как функции комплексного k) лежат в особых точках множителя $\dfrac{1}{\Delta(\omega, k)}$; обычно речь идет о полюсах — корнях $k(\omega)$ уравнения (62.5).

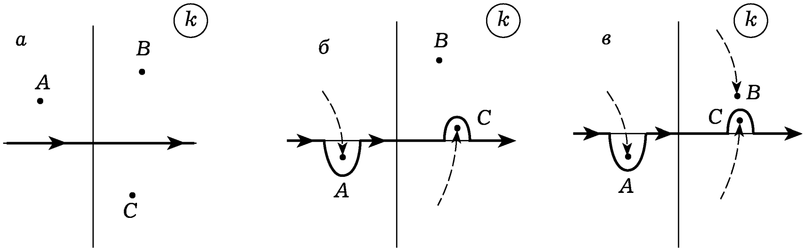


Рис. 22

Пусть при некотором значении ω (точка на ω-контуре) с достаточно большой (положительной) мнимой частью $\omega'' = \sigma$ особые точки лежат в k-плоскости, как показано на рис. 22, — некоторые в верхней, а другие в нижней полуплоскости. Путь

интегрирования по k в (62.8) (назовем его k-контуром) проходит при этом вдоль вещественной оси. Будем теперь изменять ω, постепенно уменьшая ω''. Особые точки будут перемещаться (в k-плоскости) и при некоторых значениях ω могут достигнуть вещественной оси [1]). Эти значения ω не будут еще являться особыми для функции $\varphi(\omega, k)$: ничто не мешает сдвинуть k-контур таким образом, чтобы увести его из окрестности особых точек, пересекших вещественную ось (как это показано на рис. 22 *б*). Особенность интеграла возникает, однако, если две перемещающиеся особые точки сближаются, зажимая между собой путь интегрирования, и, таким образом, устраняют возможность увода этого пути из их окрестности (рис. 22 *в*).

Таким образом, значение ω, определяющее характер неустойчивости, отбирается из числа тех значений ω, при которых два корня $k(\omega)$ дисперсионного уравнения сливаются. При этом в рассмотрение входят только те случаи слияния, когда два корня сходятся с разных сторон k-контура; другими словами, при $\omega'' \to \infty$ эти корни должны лежать по разные стороны вещественной оси. Отметим, кстати, что поскольку значения ω_c определяются только свойствами функции $\dfrac{1}{\Delta(\omega, k)}$, то их независимость от x очевидна.

При слиянии двух простых корней уравнения возникает кратный (второго порядка) корень. Вблизи такого корня дисперсионное уравнение имеет вид

$$\Delta(\omega, k) \approx (\omega - \omega_c)\left(\frac{\partial \Delta}{\partial \omega}\right)_c + \frac{1}{2}(k - k_c)^2\left(\frac{\partial^2 \Delta}{\partial k^2}\right)_c = 0, \tag{62.9}$$

так что $k - k_c \propto \pm(\omega - \omega_c)^{1/2}$ [2]). Отметим, что в точке $\omega = \omega_c$ функция $\omega(k)$ удовлетворяет условию

$$\frac{d\omega}{dk} = 0, \tag{62.10}$$

т. е. ω_c является седловой точкой аналитической функции $\omega(k)$.

---

[1]) В случае неустойчивой среды выход особой точки на вещественную ось k должен (хотя бы в некоторой области значений ω') произойти еще при $\omega'' > 0$, так как заведомо имеются такие корни уравнения $\Delta(\omega, k) = 0$, для которых при вещественном k мнимая часть $\omega'' > 0$.

[2]) В некоторых случаях может иметь место слияние также и большего числа корней с возникновением корня более высокого порядка. Такие случаи, однако, могут, вообще говоря, отвечать лишь специальным значениям параметров системы, поскольку они накладывают дополнительные ограничения на точки ω_c, k_c: в разложении $\Delta(\omega, k)$ должны обращаться в нуль также и некоторые другие (помимо $(\partial\Delta/\partial k)_c$) коэффициенты.

Интеграл (62.8), взятый по окрестности точки $k = k_c$, с точностью до постоянного множителя имеет вид

$$\varphi(\omega, x) \backsim \frac{e^{ik_c x}}{\sqrt{\omega - \omega_c}}; \tag{62.11}$$

функция $\varphi(\omega, x)$ имеет при $\omega = \omega_c$ корневой полюс. Интеграл же (62.2), взятый теперь по окрестности точки $\omega = \omega_c$ как функция от t и x, имеет вид

$$\psi(t, x) \backsim \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-i(\omega_c t - k_c x)} \tag{62.12}$$

(поскольку это асимптотическое выражение получено при $t \to \infty$ и фиксированном x, оно справедливо лишь при $|k_c x| \ll |\omega_c t|$).

Хотя слияние корней дисперсионного уравнения является основным источником возникновения особенностей функции $\varphi(\omega, x)$ (и именно им определяется обычно характер неустойчивости), упомянем еще и другой тип особенностей, возникающий на частоте, для которой корень дисперсионного уравнения $|k| \to \infty$ [1]). Мнимая часть такой частоты ω_c, однако, фактически всегда отрицательна и потому заведомо не может привести к абсолютной неустойчивости (положительность ω_c'' означала бы в данном случае неустойчивость системы по отношению к колебаниям с бесконечно малой длиной волны). С таким случаем мы встретимся ниже (см. (63.10)).

Как уже подчеркивалось, неустойчивость, являющаяся конвективной в одной (лабораторной) системе отсчета, может стать абсолютной в другой системе. Поставим себе целью найти скорость V той системы отсчета, в которой неустойчивость абсолютна с максимальным инкрементом.

Переход от лабораторной системы к системе отсчета, движущейся со скоростью V, осуществляется заменой во всех формулах $\omega \to \omega - kV$. Как мы видели выше, значение ω_c отвечает тому моменту, когда по мере уменьшения ω'' на ω-контуре сливаются два полюса функции $\dfrac{1}{\Delta(\omega, k)}$ в k-плоскости, причем эти полюсы должны прийти к точке слияния с разных сторон вещественной оси, а потому один из них должен предварительно пересечь эту ось. Обозначим через $\omega''_{\max}$ максимальное (не зависящее от V!) значение ω'' при вещественных значениях k. Поскольку $\omega_c''(k, V)$

---

1) Такой корень приводит к существенно особой точке функции $\varphi(\omega, x)$. Так, если $|k|$ стремится к бесконечности по закону $k^{-n} = C(\omega - \omega_c)$, то вклад от окрестности особенности в интеграл (62.8)

$$\varphi(\omega, x) \backsim \exp \frac{ix}{[C(\omega - \omega_c)]^{1/n}}.$$

заведомо меньше того значения ω'', при котором полюс пересек вещественную ось, то $\omega''_c(k, V) \leqslant \omega''_{\max}$ при всех V. Это означает, что наибольшее значение ω''_c достигается, если слияние полюсов происходит на вещественной оси в точке максимума $\omega''(k)$. Заменив в (62.10) $\omega(k)$ на $\omega(k) - kV$ и отделяя мнимую и вещественную части равенства (при вещественных k), найдем два уравнения:

$$\frac{d\omega''}{dk} = 0, \tag{62.13}$$

$$V = \frac{d\omega'}{dk}. \tag{62.14}$$

Таким образом, наибольший инкремент неустойчивости дается максимальным значением $\omega''(k)$ как функции вещественного k. Скорость же системы отсчета, в которой такая неустойчивость имеет место, определяется соответствующим значением производной $d\omega'/dk$. Это значение V естественно принять в качестве определения групповой скорости волнового пакета в конвективно-неустойчивой среде.

§ 63. Усиление и непропускание

До сих пор мы рассматривали задачи об устойчивости, в которых речь шла о развитии во времени возмущения, заданного в пространстве в некоторый начальный момент. Фурье-разложение такого возмущения содержит компоненты с вещественными значениями волновых векторов $\mathbf{k}$, а их временная зависимость определяется частотами $\omega(\mathbf{k})$ — комплексными корнями дисперсионного уравнения.

Возможна, однако, и другая постановка задачи об устойчивости: задача, в которой речь идет о возмущении, создаваемом в некотором участке пространства по заданному временному закону. Фурье-разложение такого возмущения содержит компоненты с вещественными частотами ω, а их распространение в пространстве определяется волновыми векторами $k(\omega)$, получающимися решением дисперсионного уравнения — на этот раз относительно k; соответственно комплексными оказываются не частоты, а волновые векторы (как и в предыдущем параграфе, мы имеем в виду одномерную задачу и потому пишем $k \equiv k_x$ вместо вектора $\mathbf{k}$).

Комплексность волновых векторов может иметь различный смысл. В одних случаях она может означать просто, что соответствующие волны не могут распространяться в среде (*непропускание*). В других случаях комплексность k может означать усиление волн средой при их распространении от источника. Сразу же подчеркнем, что критерием различения этих двух возможностей заведомо не может являться знак $\operatorname{Im} k$: волны могут распростра-

няться в обоих направлениях оси x, а изменение направления распространения эквивалентно изменению знака k.

Физически очевидно, что усиливающими свойствами может обладать лишь неустойчивая среда. Поэтому, например, заранее ясно, что для поперечных электромагнитных волн в плазме с законом дисперсии $\omega^2 = \Omega_e^2 + c^2k^2$ (см. задачу 1 § 32) при частотах $\omega < \Omega_e$ (когда $k(\omega)$ мнимо) имеет место непропускание; действительно, определяемая этим уравнением функция $\omega(k)$ вещественна при всех вещественных значениях k, так что система заведомо устойчива.

Для точной постановки вопроса рассмотрим точечный по координате x источник (или, как говорят, *сигнал*), включаемый в момент $t = 0$ и создающий затем монохроматическое (с некоторой частотой ω_0) возмущение ψ (*отклик* системы на сигнал). Интенсивность источника есть, таким образом,

$$\begin{aligned} &g(t,x) = 0 && \text{при} \quad t < 0, \\ &g(t,x) = \mathrm{const}\cdot\delta(x)e^{-i\omega_0 t} && \text{при} \quad t > 0. \end{aligned} \tag{63.1}$$

Не конкретизируя физической природы возмущения ψ, мы не делаем того же и в отношении физической природы интенсивности источника g. Существенно лишь, что ωk-компоненты возмущения определяются по его источнику выражением вида

$$\psi_{\omega k} = \frac{g_{\omega k}}{\Delta(\omega,k)}. \tag{63.2}$$

Такое выражение получается из неоднородного линеаризованного «уравнения движения» системы, в котором $g(t,x)$ играет роль «правой части» (аналогично тому, как (62.4) было решением однородного уравнения с начальным условием, задаваемым функцией $g(0,x)$). Для источника (63.1) имеем [1])

$$g_{\omega k} = \frac{\mathrm{const}}{i(\omega-\omega_0)}. \tag{63.3}$$

Функция $\psi(t,x)$ находится затем по формуле обращения

$$\psi(t,x) = \mathrm{const}\int\limits_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} \Phi(\omega,x)\frac{e^{-i\omega t}}{i(\omega-\omega_0)}\frac{d\omega}{2\pi}, \tag{63.4}$$

$$\Phi(\omega,x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{\Delta(\omega,k)}\,dk. \tag{63.5}$$

---

[1]) При вычислении $g_{\omega k}$ надо помнить, что в формуле обратного преобразования интегрирование происходит по контуру, на котором $\operatorname{Im}\omega > 0$; поэтому $e^{i\omega t} \to 0$ при $t \to \infty$.

Это выражение автоматически обеспечивает равенство $\psi(t,x) = 0$ при $t < 0$ в соответствии с условиями задачи: возмущение возникает только от включаемого в момент $t = 0$ источника.

Задача состоит теперь в том, чтобы найти асимптотическое выражение $\psi(t,x)$ вдали от источника ($|x| \to \infty$) в установившемся режиме, т. е. по истечении большого времени после включения источника ($t \to \infty$). Если в таком режиме возмущение стремится к нулю при $x \to \pm\infty$, то мы имеем дело с непропусканием. Если же возмущение оказывается возрастающим хотя бы по одну сторону от источника — имеет место усиление. Очевидно, что в обоих этих случаях может идти речь лишь о конвективно-неустойчивой (или об устойчивой) системе. При абсолютной неустойчивости возмущение неограниченно растет со временем во всех точках пространства, так что выход на установившийся режим вообще невозможен.

Переходя к отысканию требуемой асимптотики, прежде всего отметим, что асимптотический переход $t \to \infty$ надо произвести до перехода $|x| \to \infty$: поскольку за конечное время возмущение не может распространиться до бесконечности, то переход $|x| \to \infty$ при конечном t обратит ψ в нуль.

Как и в § 62, для получения асимптотического выражения при $t \to \infty$ смещаем путь интегрирования по ω в (63.4) вниз. Аналитические свойства функции $\Phi(\omega,x)$ такие же, как и у функции $\varphi(\omega,x)$ в § 62. Поскольку система предполагается лишь конвективно-неустойчивой, то $\Phi(\omega,x)$ не имеет особенностей в верхней полуплоскости ω и наиболее высокой особой точкой подынтегрального выражения в (63.4) является полюс $\omega = \omega_0$ на вещественной оси. Поэтому асимптотика при $t \to \infty$

$$\psi(t,x) \propto e^{-i\omega_0 t}\Phi(\omega_0,x). \tag{63.6}$$

Для нахождения асимптотики функции $\Phi(\omega_0,x)$ при $|x| \to \infty$ надо теперь смещать путь интегрирования по k вверх (при $x > 0$) или вниз (при $x < 0$) до тех пор, пока он не зацепится за полюс подынтегрального выражения в (63.5) (корень уравнения $\Delta(\omega_0,k) = 0$).

Обозначим через $k_+(\omega)$ и $k_-(\omega)$ те полюсы, которые при $\operatorname{Im}\omega \to \infty$ находятся соответственно в верхней и нижней полуплоскостях k. По мере уменьшения $\operatorname{Im}\omega$ полюсы перемещаются и при вещественном $\omega = \omega_0$ могут остаться в «своей» полуплоскости или же попасть в другую полуплоскость. В первом случае путь интегрирования в $\Phi(\omega_0,x)$ остается на вещественной оси (как на рис. 22 *а*), а во втором — деформируется, как показано на рис. 22 *б*, огибая «убежавшие» в чужую полуплоскость полюсы $k_+(\omega_0)$ и $k_-(\omega_0)$ (точки A и C). В обоих случаях при смещении контура вверх или вниз он зацепляется соответственно за полю-

сы k_+ или k_-. Асимптотическое выражение функции $\psi(t,x)$ при $x \to +\infty$ определяется вкладом от наиболее низкого из полюсов $k_+(\omega_0)$, а при $x \to -\infty$ — от наиболее высокого из полюсов k_- $-(\omega_0)$; другими словами, это — наиболее близкий к вещественной оси полюс (если все полюсы данной категории остались в «своей» полуплоскости) или же наиболее далекий от вещественной оси полюс из числа тех, которые перешли в «чужую» полуплоскость. С этими значениями k_+ и k_- будем иметь

$$\begin{aligned} \psi(t,x) &\backsim \exp\{ik_+(\omega_0)x - i\omega_0 t\} \quad \text{при} \quad x > 0, \\ \psi(t,x) &\backsim \exp\{ik_-(\omega_0)x - i\omega_0 t\} \quad \text{при} \quad x < 0. \end{aligned} \tag{63.7}$$

В случае устойчивой системы все полюсы остаются при $\omega = \omega_0$ в «своих» полуплоскостях; действительно, ввиду отсутствия ветвей колебаний с $\operatorname{Im}\omega(k) > 0$ (при вещественных k) пересечение полюсом $k(\omega)$ вещественной оси могло бы иметь место лишь при $\operatorname{Im}\omega < 0$. Поэтому в (63.7) будет

$$\operatorname{Im} k_+(\omega_0) > 0, \quad \operatorname{Im} k_-(\omega_0) < 0,$$

так что волны затухают в обе стороны от источника.

В случае же конвективной неустойчивости полюсы $k(\omega)$ выходят на вещественную ось уже при $\operatorname{Im}\omega > 0$. Поэтому заведомо существуют полюсы k_+ или k_-, попавшие при $\omega = \omega_0$ в «чужую» полуплоскость, т. е. для которых $\operatorname{Im} k_+(\omega_0) < 0$ или $\operatorname{Im} k_-(\omega_0) > 0$. Наличие такого полюса $k_+(\omega_0)$ приводит к усилению волны справа от источника, а наличие такого полюса $k_-(\omega_0)$ — к усилению слева от источника.

Резюмируя изложенные рассуждения, приходим к следующему критерию различения случаев непропускания и усиления волн, испускаемых источником с частотой ω_0 в конвективно-неустойчивой системе.

Волна с комплексным значением $k(\omega_0)$ при вещественном ω_0 усиливается, если функция $\operatorname{Im} k(\omega)$ меняет знак при изменении $\operatorname{Im}\omega$ от $+\infty$ до 0 (при заданном $\operatorname{Re}\omega = \omega_0$); если же $\operatorname{Im} k(\omega)$ не меняет знака, то имеет место непропускание.

Отметим, что происхождение этого критерия связано с требованиями причинности. Действительно, при сколь угодно быстром включении источника возмущение во всяком случае должно убывать при $x \to \pm\infty$ просто потому, что за конечное время оно не может распространиться на бесконечное расстояние. С другой стороны, «сколь угодно быстрое» включение можно осуществить по закону $e^{-i\omega t}$ с $\operatorname{Im}\omega \to +\infty$. Поэтому ясно, что волны, усиливаемые (при вещественном ω) в ту или иную сторону от источника, должны затухать в эту же сторону при $\operatorname{Im}\omega \to \infty$, откуда и возникает сформулированный выше критерий.

Полученные результаты имеют еще и другой аспект, позволяя определить направление распространения волны в среде с поглощением или усилением. В прозрачной среде (т. е. когда ω и k вещественны) вопрос о физическом направлении распространения решается направлением вектора групповой скорости. В частности, в одномерном случае волна с положительным значением производной $d\omega/dk$ движется в положительном направлении оси x, а с отрицательным — в обратном направлении. В среде же с поглощением или усилением можно утверждать, что в положительном направлении распространяются волны группы k_+, а в отрицательном — группы k_-. В случае вещественных ω и k эта общая формулировка совпадает с прежней. Действительно, малые изменения ω и k связаны друг с другом соотношением

$$\delta k = \frac{\delta\omega}{d\omega/dk}.$$

Отсюда видно, что если у ω появляется мнимая часть $\operatorname{Im}\omega > 0$, то k смещается в верхнюю полуплоскость при $d\omega/dk > 0$ и в нижнюю в обратном случае.

В качестве простого примера применения критериев, полученных в этом и предыдущем параграфах, рассмотрим неустойчивость холодного пучка электронов в холодной плазме, о которой шла речь в § 61. Дисперсионное уравнение этой системы:

$$\frac{\Omega_e^2}{\omega^2} + \frac{\Omega_e'^2}{(\omega - kV)^2} = 1 \tag{63.8}$$

(см. (61.6); для волн, распространяющихся в направлении пучка, $\mathbf{kV} = kV$). Корни $k(\omega)$ этого уравнения при $|\omega| \to \infty$ имеют вид [1])

$$k = \frac{\omega \pm \Omega_e'}{V}. \tag{63.9}$$

При $\operatorname{Im}\omega \to \infty$ оба корня лежат в одной и той же (верхней) полуплоскости, т. е. оба корня относятся к категории $k_+(\omega)$. Они не могут, следовательно, при своем перемещении (при уменьшении $\operatorname{Im}\omega$) зажать k-контур, так что неустойчивость — конвективная. Асимптотическое поведение созданного в начальный момент возмущения определяется частотой $\omega = \Omega_e$, вблизи которой корни уравнения (63.8) стремятся к ∞ по закону

$$k^2 = \frac{\Omega_e \Omega_e'^2}{2V^2(\omega - \Omega_e)}. \tag{63.10}$$

Таким образом, при $t \to \infty$ от возмущения остаются лишь незатухающие плазменные волны.

---

[1]) Отметим, что (63.9) совпадает с дисперсионным уравнением пучка самого по себе, как если бы неподвижной плазмы вообще не было.

При вещественных значениях $\omega < \Omega_e$ уравнение (63.8) имеет два комплексно-сопряженных корня $k(\omega)$. Тот из них, у которого $\operatorname{Im} k(\omega) < 0$, попал в нижнюю полуплоскость из верхней. Таким образом, при распространении волн от источника с частотой $\omega_0 < \Omega_e$ происходит их усиление в направлении $x > 0$, т. е. «вниз по течению» пучка.

§ 64. Неустойчивость при слабой связи двух ветвей спектра колебаний

Применим развитый в § 62, 63 общий метод к исследованию неустойчивости, возникающей благодаря «взаимодействию» колебаний с близкими значениями ω и k, относящихся к двум ветвям колебательного спектра бездиссипативной системы; под бездиссипативностью подразумевается здесь отсутствие как истинной диссипации, так и затухания Ландау.

Если бы две ветви $\omega = \omega_1(k)$ и $\omega = \omega_2(k)$ были полностью независимы, то это значило бы, что дисперсионное уравнение распадается на два множителя:

$$[\omega - \omega_1(k)][\omega - \omega_2(k)] = 0. \tag{64.1}$$

Вблизи точки пересечения таких ветвей функции $\omega_1(k)$ и $\omega_2(k)$ имели бы в общем случае вид

$$\begin{aligned} \omega_1(k) &= \omega_0 + v_1(k - k_0), \\ \omega_2(k) &= \omega_0 + v_2(k - k_0), \end{aligned} \tag{64.2}$$

где v_1, v_2 — некоторые постоянные, а ω_0 и k_0 значения (вещественные!) ω и k в точке пересечения.

Такой случай, однако, вообще говоря, нереален. Связь между двумя ветвями могла бы строго отсутствовать, в лучшем случае, при каких-то специфических значениях параметров системы, но появилась бы уже при малейшем их изменении [1]). Для отражения реальной ситуации надо поэтому учесть наличие слабой связи между ветвями. Она проявляется в замене нуля в правой части уравнения (64.1) на некоторую малую величину ε. Тогда дисперсионное уравнение вблизи этой точки примет вид

$$[\omega - \omega_0 - v_1(k - k_0)][\omega - \omega_0 - v_2(k - k_0)] = \varepsilon. \tag{64.3}$$

---

[1]) Исключение составляют случаи, когда взаимодействие отсутствует в силу требований симметрии, например, если одна ветвь относится к продольным, а другая — к поперечным волнам в изотропной среде. Поскольку в изотропной среде продольный ток не может индуцировать поперечное поле и наоборот, то такие волны не взаимодействуют друг с другом. Ситуация здесь аналогична той, которая имеет место в квантовой механике для пересечения термов различной симметрии (см. III, § 79).

Его решение относительно ω:

$$\omega(k)-\omega_0 = \frac{1}{2}\{(v_1+v_2)(k-k_0)\pm[(k-k_0)^2(v_1-v_2)^2+4\varepsilon]^{1/2}\}, \quad (64.4)$$

а относительно k:

$$k(\omega) - k_0 = \frac{1}{2v_1v_2} \times$$
$$\times \left\{(v_1 + v_2)(\omega - \omega_0) \pm \left[(\omega - \omega_0)^2(v_1 - v_2)^2 + 4\varepsilon v_1v_2\right]^{1/2}\right\}. \quad (64.5)$$

Наличие связи между ветвями сдвигает точку их пересечения в комплексную область. Зависимости же $\omega(k)$ для вещественных ω и k имеют различный характер в зависимости от знака постоянной ε и относительного знака постоянных v_1 и v_2. Эти зависимости изображены на рис. 23 для следующих случаев:

$$\begin{array}{llll} а)\ \varepsilon > 0, & v_1v_2 > 0, & б)\ \varepsilon > 0, & v_1v_2 < 0, \\ в)\ \varepsilon < 0, & v_1v_2 > 0, & г)\ \varepsilon < 0, & v_1v_2 < 0. \end{array} \quad (64.6)$$

Рассмотрим эти случаи поочередно.

а) Здесь функции $\omega(k)$ вещественны при всех (вещественных) k, так что система устойчива. Вещественны также функции $k(\omega)$ при всех ω, так что при всех ω волны распространяются не усиливаясь.

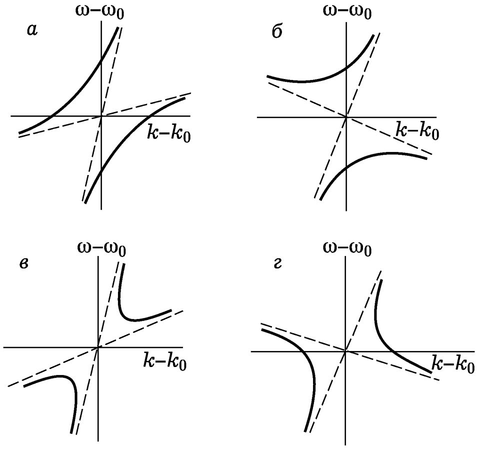


Рис. 23

б) Функции $\omega(k)$ вещественны при всех k, так что система устойчива. Функции же $k(\omega)$ комплексны в области частот

$$(\omega - \omega_0)^2 < \frac{4|\varepsilon v_1v_2|}{(v_1 - v_2)^2}. \quad (64.7)$$

Ввиду устойчивости системы, в этой области имеет место непропускание.

в) При

$$(k - k_0)^2 < \frac{4|\varepsilon|}{(v_1 - v_2)^2} \quad (64.8)$$

функции $\omega(k)$ комплексны, причем для одной из них $\operatorname{Im}\omega(k) > 0$, т. е. имеет место неустойчивость. Эта неустойчивость — конвективная; действительно, при $|\omega| \to \infty$ корни $k(\omega)$ имеют вид

$$k \approx \frac{\omega}{v_1}, \quad k \approx \frac{\omega}{v_2} \quad (64.9)$$

и при $\operatorname{Im}\omega \to \infty$ оба лежат в одной и той же полуплоскости k. Пусть v_1, $v_2 > 0$; тогда эта полуплоскость — верхняя и корни

относятся к категории $k_+(\omega)$. При вещественных же ω в области (64.7) корни $k(\omega)$ составляют пару комплексно-сопряженных величин. Тот из них, для которого $\operatorname{Im} k(\omega) < 0$, перешел из верхней полуплоскости в нижнюю. Следовательно, в полосе частот (64.7) имеет место усиление волн, распространяющихся в направлении $x > 0$.

Легко также найти для этого случая определенную, согласно (62.14), «групповую скорость» волн — скорость системы отсчета, в которой имеет место абсолютная неустойчивость с максимальным инкрементом. Продифференцировав уравнение (64.3) по k и подставив, согласно (62.13), (62.14), $d\omega/dk = V$, получим

$$\frac{V - v_1}{V - v_2} = \frac{\omega - \omega_0 - v_1(k - k_0)}{\omega - \omega_0 - v_2(k - k_0)}. \tag{64.10}$$

Поскольку левая часть этого равенства вещественна, то должна быть вещественной (при комплексном ω) также и правая часть. Из этого условия находим, что $k = k_0$, после чего из (64.10) находим скорость

$$V = \frac{v_1 + v_2}{2}, \tag{64.11}$$

а из (64.3) — соответствующий максимальный инкремент

$$(\operatorname{Im} \omega)_{\max} = |\varepsilon|^{1/2}. \tag{64.12}$$

г) Функции $k(\omega)$ вещественны при всех (вещественных) ω, но функции $\omega(k)$ комплексны в области (64.8), так что система неустойчива. Для выяснения характера этой неустойчивости замечаем, что согласно (64.9) (при различных знаках v_1 и v_2) при $\operatorname{Im} \omega \to \infty$ корни $k(\omega)$ лежат в различных полуплоскостях. Эти два корня имеют точку слияния в верхней полуплоскости ω при

$$\omega = \omega_c = \omega_0 + 2i\frac{\sqrt{v_1 v_2 \varepsilon}}{|v_1 - v_2|}. \tag{64.13}$$

Это значит, что неустойчивость — абсолютная, с инкрементом $\operatorname{Im} \omega_c$. При $v_1 = -v_2$, что соответствует картине возмущения в системе отсчета, движущейся со скоростью (64.11), инкремент достигает максимального значения (64.12).

Задача

Выяснить характер неустойчивости низкочастотных ($\omega \sim \omega_{Bi}$) «медленных» ($\omega/k \ll c$) поперечных электромагнитных волн, распространяющихся в направлении постоянного магнитного поля в холодной магнитоактивной плазме; вдоль того же направления через плазму движется холодный пучок электронов малой плотности.

Решение. Для составления дисперсионного уравнения пишем его сначала с учетом лишь электронов пучка в системе отсчета, где пучок покоится. Согласно (56.9) имеем в этой системе:

$$k^2c^2 - \omega^2 = -\frac{\Omega_e'^2 \omega}{\omega \pm \omega_{Be}},$$

где Ω'_e — плазменная частота, отвечающая плотности пучка. При возвращении к лабораторной системе отсчета, в которой пучок движется со скоростью $\mathbf{V}$ (вдоль которой направляем ось x), в правой части равенства надо заменить $\omega \to \omega - kV$; разность же $k^2c^2 - \omega^2$ инвариантна по отношению к изменению системы отсчета. Добавив теперь в лабораторной системе члены, связанные с электронами и ионами плазмы, получим

$$k^2c^2 - \omega^2 = -\frac{\Omega_e'^2(\omega - kV)}{\omega - kV \pm \omega_{Be}} - \frac{\omega\Omega_e^2}{\omega \pm \omega_{Be}} - \frac{\omega\Omega_i^2}{\omega \mp \omega_{Bi}}.$$

Пренебрегая здесь (в соответствии с условиями задачи) ω по сравнению с ck и с ω_{Be} и заметив также, что $\dfrac{\Omega_e^2}{\omega_{Be}} = \dfrac{\Omega_i^2}{\omega_{Bi}}$, приведем дисперсионное уравнение к виду

$$\left[k^2c^2 - \frac{\Omega_i^2\omega^2}{\omega_{Bi}(\omega_{Bi} \mp \omega)}\right](\omega - kV \pm \omega_{Be}) = -\Omega_e'^2(\omega - kV). \qquad (1)$$

Первый множитель в левой части уравнения отвечает «основной», а второй — пучковой ветви спектра колебаний; правая часть описывает «взаимодействие» этих ветвей.

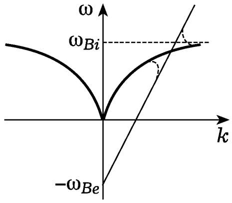


Рис. 24

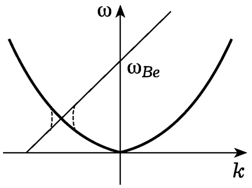


Рис. 25

При верхних знаках в (1) законы дисперсии двух независимых ветвей показаны на рис. 24 сплошными линиями (как всегда, достаточно рассматривать лишь ветви с $\omega > 0$). Вблизи точки ω_0, k_0 их пересечения разложение уравнения (1) имеет вид

$$2k_0c^2\left[k - k_0 - \frac{\omega - \omega_0}{v_1}\right][\omega - \omega_0 - V(k - k_0)] = \Omega_e'^2\omega_{Be}$$

с положительным (как это ясно из наклона кривых на рис. 24) коэффициентом v_1. Сравнение с (64.3) показывает, что имеет место случай *б* — конвективная неустойчивость (на рис. 24 штриховыми линиями показан ход ветвей спектра с учетом их взаимодействия).

Аналогичные графики при нижних знаках в (1) показаны на рис. 25. Вблизи точки пересечения дисперсионное уравнение имеет вид

$$2k_0c^2\left[k - k_0 + \frac{\omega - \omega_0}{v_1}\right][\omega - \omega_0 - V(k - k_0)] = -\Omega_e'^2\omega_{Be},$$

где снова $v_1 > 0$. Теперь имеет место случай *г* — абсолютная неустойчивость (имеющееся в этом случае второе пересечение происходит, как видно из рисунка, при $\omega \gtrsim \omega_{Be}$, что противоречит условиям задачи).

§ 65. Неустойчивость конечных систем

Вся изложенная в § 61–63 теория относилась к однородным средам, бесконечно протяженным по крайней мере в одном направлении (ось x). При применении к реальным ограниченным системам это значит, что пренебрегается эффектами, связанными с отражением волн от границ; другими словами, такая теория ограничена временами порядка величины времени распространения возмущения по длине системы.

Рассмотрим теперь вопрос об устойчивости в обратной ситуации, когда конечность системы существенна и спектр ее собственных колебаний определяется граничными условиями на концах (при этом мы по-прежнему ограничиваемся одномерным случаем; длину системы вдоль оси x обозначим через L). Спектр частот конечной системы дискретен, и, если хотя бы одна из собственных частот имеет положительную мнимую часть, система неустойчива. Различие между случаями абсолютной и конвективной неустойчивости теряет здесь смысл.

Таким образом, вопрос о выяснении устойчивости или неустойчивости конечной системы эквивалентен вопросу о нахождении спектра ее (комплексных) собственных частот. Дисперсионное уравнение, определяющее эти частоты, может быть установлено в общем виде для системы хотя и конечных, но достаточно больших размеров L: $\operatorname{Im}|k| \cdot L \gg 1$ (*А.Г. Куликовский*, 1966).

Пусть $k(\omega)$ — решения дисперсионного уравнения неограниченной среды; ветви этой многозначной функции снова разобьем на две категории, $k_+(\omega)$ и $k_-(\omega)$, определенные в § 63. Собственные колебания конечной системы можно рассматривать как результат наложения бегущих волн, отраженных от двух ее границ (в среде без поглощения и усиления это были бы обычные стоячие волны). Отражение сопровождается, вообще говоря, взаимным превращением волн, относящихся к различным ветвям спектра. Поэтому бегущая волна заданной частоты представляет собой суперпозицию всех ветвей. Но вдали от границ основной вклад в каждую волну дает лишь один из членов суперпозиции. Так, для волны, распространяющейся от левой границы, $x = 0$ (рис. 26), в положительном направлении оси x асимптотическое выражение вдали от этой границы имеет вид

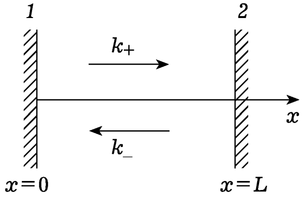


Рис. 26

$$\psi = a \exp\{i[k_+(\omega)x - \omega t]\}, \tag{65.1}$$

причем в качестве $k_+(\omega)$ должна быть выбрана та из ветвей

этой категории, для которой $\operatorname{Im} k_+(\omega)$ имеет (при заданном вещественном ω) алгебраически наименьшее значение [1]).

После отражения от правой границы ($x = L$) волна распространяется влево и на достаточно больших расстояниях от этой границы имеет асимптотический вид

$$\psi = R_2 a \exp\{ik_+(\omega)L\} \exp\{i[k_-(\omega)(x-L)-\omega t]\}, \qquad (65.2)$$

где $k_-(\omega)$ — та из ветвей этой категории, для которой $\operatorname{Im} k_-(\omega)$ имеет алгебраически наибольшее значение. Коэффициент же R_2 зависит от закона трансформации волн на данной конкретной границе.

Наконец, после второго отражения — на этот раз от левой границы — снова получим волну, распространяющуюся вправо:

$$\psi = R_1 R_2 a e^{i(k_+-k_-)L} e^{i(k_+ x - \omega t)}. \qquad (65.3)$$

Ввиду однозначности $\psi(t, x)$ выражение (65.3) должно совпадать с (65.1). Отсюда находим равенство

$$R_1 R_2 \exp\{i[k_+(\omega) - k_-(\omega)]L\} = 1. \qquad (65.4)$$

Оно определяет спектр частот ω конечной системы, т. е. является ее дисперсионным уравнением.

Взяв модуль от обеих частей этого уравнения, имеем

$$|R_1 R_2| \exp\{-\operatorname{Im}(k_+ - k_-)L\} = 1. \qquad (65.5)$$

При $L \to \infty$ экспоненциальный множитель стремится к 0 или к ∞ (в зависимости от знака разности $\operatorname{Im}(k_+ - k_-)$). Поэтому для достаточно длинных систем равенство (65.5) возможно только, если

$$\operatorname{Im}[k_+(\omega) - k_-(\omega)] = 0. \qquad (65.6)$$

Таким образом, в этом случае дисперсионное уравнение сводится к виду, зависящему только от свойств среды самой по себе и не зависящему от конкретного характера условий на ее границах. Уравнение (65.6) определяет некоторую кривую на плоскости ω; на этой кривой лежат очень близкие друг к другу (при больших L) дискретные собственные частоты. Если эта кривая хотя бы частично лежит в верхней полуплоскости — система неустойчива. В связи с тем, что эта неустойчивость обуславливается свойствами системы в целом, ее называют *глобальной*.

[1]) То есть это — наименьшее положительное значение, если все $\operatorname{Im} k_+(\omega) > 0$, или же наибольшее по абсолютной величине отрицательное значение, если существуют ветви, для которых $\operatorname{Im} k_+(\omega) < 0$. В первом случае (65.1) — наименее быстро затухающая (с расстоянием x) волна, а во втором — наиболее быстро усиливающаяся.

Сделаем еще несколько замечаний о связи глобальной неустойчивости конечной системы с неустойчивостью бесконечной среды. Прежде всего, легко видеть, что при наличии глобальной неустойчивости бесконечная система заведомо неустойчива: существуют такие вещественные значения k, для которых $\operatorname{Im}\omega(k) > 0$. Действительно, по определению функций $k_+(\omega)$ и $k_-(\omega)$ их значения при $\operatorname{Im}\omega \to \infty$ лежат в различных полуплоскостях k. Условие же (65.6) означает, что по мере уменьшения $\operatorname{Im}\omega$ точки $k_+(\omega)$ и $k_-(\omega)$ могут попасть в одну и ту же полуплоскость, причем (в случае глобальной неустойчивости) это происходит еще при $\operatorname{Im}\omega > 0$. Следовательно, еще раньше (т. е. заведомо при $\operatorname{Im}\omega > 0$) по крайней мере одна из этих точек пересечет вещественную ось, что и требовалось.

Обратное утверждение справедливо, однако, лишь для абсолютной (но не конвективной) неустойчивости бесконечной среды: наличие абсолютной неустойчивости достаточно для существования также и глобальной неустойчивости конечной системы. Действительно, условие абсолютной неустойчивости состоит в существовании точки ветвления функции $k(\omega)$ при $\operatorname{Im}\omega > 0$, причем сливающиеся ветви относятся к категориям k_+ и k_-; в такой точке заведомо выполняется также и условие (65.6).

Конвективно же неустойчивая среда при наличии границ может оказаться как неустойчивой, так и устойчивой.

ГЛАВА VII

ДИЭЛЕКТРИКИ

§ 66. Взаимодействие фононов

Физическая природа кинетических явлений (теплопроводность, электропроводность) в газах состоит в процессах переноса, осуществляемого тепловым движением частиц газа; в кинетических явлениях в твердых телах роль частиц переходит к квазичастицам. Приступая к изучению этих явлений, мы начнем с теплопроводности немагнитных диэлектриков. Сравнительная простота физической картины этого явления, по сравнению с кинетическими процессами в других типах твердых тел, связана с тем, что здесь фигурируют квазичастицы лишь одного сорта — *фононы*.

Напомним (см. V, § 72), что представление о свободных фононах возникает в результате квантования колебательного движения атомов в кристаллической решетке в гармоническом приближении, т. е. с учетом лишь квадратичных (по смещениям атомов) членов в гамильтониане. Различные же процессы взаимодействия фононов возникают при учете членов следующих порядков малости — ангармонических членов третьего и т. д. порядков по смещениям [1]).

Первые ангармонические члены — кубические — в классической энергии решетки имеют вид

$$H^{(3)} = \frac{1}{6}\sum_{(\mathbf{n}s)} \Lambda^{s_1 s_2 s_3}_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{n}_1-\mathbf{n}_3,\mathbf{n}_2-\mathbf{n}_3)U_{s_1\alpha}(\mathbf{n}_1)U_{s_2\beta}(n_2)U_{s_3\gamma}(\mathbf{n}_3). \tag{66.1}$$

Здесь $\mathbf{U}_s(\mathbf{n})$ – векторы смещения атомов в решетке; α, β, γ — векторные индексы, пробегающие значения x, y, z; s_1, s_2, s_3 — номера атомов в элементарной ячейке; $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$, $\mathbf{n}_3$ — целочисленные «векторы», определяющие положение ячейки в решетке; символ $(\mathbf{n}s)$ под знаком суммы означает, что суммирование производится по всем $\mathbf{n}$ и по всем s; ввиду однородности кристалла функции Λ зависят только от взаимных расстояний $\mathbf{n}_1-\mathbf{n}_3$, $\mathbf{n}_2-\mathbf{n}_3$ между ячейками, но не от их абсолютных положений в решетке.

[1]) Необходимость учета ангармоничности колебаний атомов в решетке при рассмотрении теплопроводности кристалла была впервые указана *Дебаем* (*P. Debye*, 1914) и *Борном* (*M. Born*, 1914).

Вторично-квантованный гамильтониан получается подстановкой в (66.1) вместо векторов смещений операторов $\widehat{\mathbf{U}}_s(\mathbf{n})$, выраженных через операторы рождения $\widehat{c}^{+}_{\mathbf{k}g}$ и уничтожения $\widehat{c}_{\mathbf{k}g}$ фононов сорта (т. е. ветви фононного спектра) g и с квазиимпульсом $\mathbf{k}$ формулой

$$\widehat{\mathbf{U}}_s(\mathbf{n}) \sum_{g\mathbf{k}} [2M\mathcal{N}\omega_g(\mathbf{k})]^{-1/2} \times \\ \times \left\{\widehat{c}_{\mathbf{k}g}\mathbf{e}_s^{(g)}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_\mathbf{n}} + \widehat{c}^{+}_{\mathbf{k}g}\mathbf{e}_s^{(g)*}(\mathbf{k})e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_\mathbf{n}}\right\}, \qquad (66.2)$$

где $\mathcal{N}$ — число ячеек в решетке, M — суммарная масса атомов в ячейке, $\mathbf{e}_s^{(g)}(\mathbf{k})$ — векторы поляризации фононов, $\omega_g(\mathbf{k})$ — энергия фонона сорта g [1]). При подстановке возникают члены, содержащие операторы $\widehat{c}$ и $\widehat{c}^{+}$ в различных комбинациях по три. Эти члены описывают процессы с участием трех фононов: произведения вида $\widehat{c}^{+}\widehat{c}^{+}\widehat{c}$ — распад одного фонона на два, а произведения вида $\widehat{c}^{+}\widehat{c}\widehat{c}$ — слияние двух сталкивающихся фононов в один (члены же $\widehat{c}\widehat{c}\widehat{c}$ и $\widehat{c}^{+}\widehat{c}^{+}\widehat{c}^{+}$ отвечают процессам, запрещенным законом сохранения энергии).

Напишем, например, члены, отвечающие распаду фонона $(\mathbf{k}_1g_1)$ на два фонона $(\mathbf{k}_2g_2)$ и $(\mathbf{k}_3g_3)$. Перейдя в (66.1) от суммирования по $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$, $\mathbf{n}_3$ к суммированию по $\boldsymbol{\nu}_1 = \mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_3$, $\boldsymbol{\nu}_2 = \mathbf{n}_2 - \mathbf{n}_3$, $\mathbf{n}_3$ напишем эти члены в виде

$$\widehat{H}^{(3)}_{\text{расп}} = \Omega \frac{\widehat{c}_1\widehat{c}_2^{+}\widehat{c}_3^{+}}{\mathcal{N}^{3/2}(\omega_1\omega_2\omega_3)^{1/2}} \sum_{\mathbf{n}_3} \exp\left\{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3)\mathbf{r}_{\mathbf{n}_3}\right\}, \qquad (66.3)$$

где

$$\Omega = (2M)^{-3/2} \times \\ \times \sum_{(\nu s)} \Lambda^{s_1s_2s_3}_{\alpha\beta\gamma}(\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2)e_{1\alpha}e^*_{2\beta}e^*_{3\gamma} \exp\left\{i(\mathbf{k}_1\mathbf{r}_{\boldsymbol{\nu}_1} - \mathbf{k}_2\mathbf{r}_{\boldsymbol{\nu}_2}\right\}, \qquad (66.4)$$

$$\widehat{c}_1 \equiv \widehat{c}_{\mathbf{k}_1g_1}, \quad \omega_1 = \omega_{g_1}(\mathbf{k}_1), \quad \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_{s_1}^{(g_1)}(\mathbf{k}_1), \quad \ldots$$

В (66.3) выделен экспоненциальный множитель, зависящий от абсолютного положения $\mathbf{n}_3$ ячейки в решетке. Суммирование этого множителя по всем $\mathbf{n}_3$ дает $\mathcal{N}$, если $\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3$ совпадает с каким-либо периодом обратной решетки $\mathbf{b}$, или нуль в противном случае. Поэтому

$$\widehat{H}^{(3)}_{\text{расп}} = \Omega \frac{\widehat{c}_1\widehat{c}_2^{+}\widehat{c}_3^{+}}{\mathcal{N}^{1/2}(\omega_1\omega_2\omega_3)^{1/2}}, \qquad (66.5)$$

---

[1]) В этой главе пользуемся системой единиц, в которой $\hbar = 1$. В этой системе размерности импульса и волнового вектора совпадают; то же относится к размерностям энергии и частоты.

причем квазиимпульсы фононов удовлетворяют закону сохранения

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{b}. \tag{66.6}$$

Условие (66.6) следует рассматривать как уравнение, определяющее значение, скажем, квазиимпульса $\mathbf{k}_3$, по заданным значениям $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$. При этом надо брать значения $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$ внутри некоторой выбранной одной элементарной ячейки обратной решетки (заключающей в себе все физически различные значения квазиимпульса) и следить за тем, чтобы и $\mathbf{k}_3$ тоже оказалось в этой ячейке. Последнее условие определяет необходимое значений $\mathbf{b}$ в (66.6), причем однозначным образом. Действительно, если при заданных $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$, $\mathbf{b}$ вектор $\mathbf{k}_3$ лежит в выбранной ячейке, то любое изменение $\mathbf{b}$ заведомо вывело бы $\mathbf{k}_3$ из этой ячейки. Процессы (в данном случае — распад фонона), при которых закон сохранения квазиимпульса содержит отличный от нуля вектор $\mathbf{b}$, называются процессами с *перебросом* [1]), в отличие от *нормальных* процессов с $\mathbf{b} = 0$. Надо сказать, что различие между этими двумя категориями процессов в известном смысле условно: каждый конкретный процесс может оказаться нормальным или с перебросом в зависимости от выбора основной ячейки. Существенно, однако, что никаким выбором нельзя обратить $\mathbf{b}$ в нуль одновременно для всех возможных процессов. Целесообразно выбирать основную ячейку обратной решетки так, чтобы точка $\mathbf{k} = 0$ (бесконечная длина волны) находилась в ее центре; это будет подразумеваться везде ниже. При таком выборе всем низкочастотным фононам отвечают малые значения квазиимпульса ($k \ll 1/d$, d — постоянная решетки), а все процессы с участием одних только низкочастотных фононов являются нормальными [2]). Большие же значения квазиимпульса ($k \sim 1/d$) будут отвечать коротковолновым фононам с большой энергией (порядка величины дебаевской температуры Θ).

Вернемся к процессу распада фонона. Согласно общим правилам квантовой механики (см. III, (43.1)), вероятность распада, при котором квазиимпульс одного из двух возникающих новых фононов лежит в интервале d^3k_2, дается квадратом соответствующего матричного элемента оператора возмущения (66.5) согласно формуле

$$dW = 2\pi|\langle N_1 - 1, N_2 + 1, N_3 + 1|H^{(3)}|N_1, N_2, N_3\rangle|^2 \times \\ \times \delta(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3)\frac{\mathcal{V}\,d^3k_2}{(2\pi)^3}, \tag{66.7}$$

---

[1]) Umklapp — по немецкой терминологии.

[2]) Если же, например, выбрать основную ячейку так, чтобы точка $\mathbf{k} = 0$ лежала в одной из ее вершин, то малым частотам будут отвечать также и окрестности других вершин, вблизи которых $\mathbf{k}$ уже не малы.

где $N_1 \equiv N_{\mathbf{k}_1 g_1}$, N_2, N_3 — числа заполнения фононов в начальном состоянии кристалла. Матричные элементы операторов рождения и уничтожения фононов даются формулами

$$\langle N-1|\widehat{c}|N\rangle = \langle N|\widehat{c}^{+}|N-1\rangle = \sqrt{N}. \tag{66.8}$$

В результате получаем вероятность распада в виде

$$dW = wN_1(N_2+1)(N_3+1)\delta(\omega_1-\omega_2-\omega_3)\frac{d^3k_2}{(2\pi)^3}, \tag{66.9}$$

где

$$w = w(g_2\mathbf{k}_2, g_3\mathbf{k}_3; g_1\mathbf{k}_1) = \frac{2\pi v}{\omega_1\omega_2\omega_3}|\Omega|^2 \tag{66.10}$$

($v = \mathcal{V}/\mathcal{N}$ — объем ячейки кристаллической решетки). Таким образом, вероятность процессов пропорциональна числу N_1 начальных фононов в начальном состоянии кристалла, а также числам конечных фононов (N_2+1 и N_3+1) в конечном состоянии кристалла. Последнее свойство связано со статистикой Бозе, которой подчиняются фононы, и характерно вообще для всех процессов с участием бозонов [1]).

Процессом, обратным распаду, является «слияние» двух фононов $\mathbf{k}_2$ и $\mathbf{k}_3$ в один фонон $\mathbf{k}_1$. Легко найти, что члены в гамильтониане, ответственные за этот процесс, отличаются от (66.5) заменой произведения c-операторов в числителе на $\widehat{c}_1^{+}\widehat{c}_2\widehat{c}_3$ и заменой Ω на Ω^*. Поэтому вероятность этого процесса дается формулой, отличающейся от (66.9) лишь N-множителями:

$$dW = wN_2N_3(N_1+1)\delta(\omega_1-\omega_2-\omega_3)\frac{d^3k_2}{(2\pi)^3}. \tag{66.11}$$

Функции же w здесь и в (66.9) одинаковы. Последнее обстоятельство отвечает общему правилу: в борновском приближении (первое приближение теории возмущений) вероятности прямого и обратного элементарных актов рассеяния одинаковы (см. III, § 126).

Среди различных ветвей фононного спектра всегда имеется три *акустических*, в которых энергия стремится к нулю при $\mathbf{k}\to 0$; для длинноволновых (малые $\mathbf{k}$) акустических фононов зависимость $\omega(\mathbf{k})$ линейна. Для дальнейшего будет существенным поведение функции w (66.10) для таких фононов.

---

[1]) Функция распределения фононов $N_\mathbf{k}$ (или $N(\mathbf{k})$) будет определяться как числа заполнения квантовых состояний с различными значениями квазиимпульса $\mathbf{k}$. Число состояний, приходящих на элемент d^3k $\mathbf{k}$-пространства, есть $d^3k/(2\pi)^3$, так что распределение, отнесенное к d^3k, есть $N_\mathbf{k}/(2\pi)^3$.

Его можно выяснить, заметив свойство коэффициентов Λ в гамильтониане (66.1), выражающее собой тот факт, что простое смещение кристалла как целого не меняет его энергии — вне зависимости от того, деформирован ли уже кристалл или нет. Это значит, что энергия $H^{(3)}$ не должна измениться, если заменить в ней любой из множителей $\mathbf{U}_s(\mathbf{n})$ на $\mathbf{U}_s + \mathbf{a}$ с независящим от $\mathbf{n}$, s вектором $\mathbf{a}$. Для этого необходимо, чтобы было

$$\sum_{\mathbf{n}_1 s_1} \Lambda^{s_1 s_2 s_3}_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3) = 0, \tag{66.12}$$

где суммирование производится хотя бы по одной паре переменных $\mathbf{n}_1 s_1$.

Из трех участвующих в процессе фононов могут быть длинноволновыми акустическими либо один, либо все три (с двумя такими фононами при третьем коротковолновом не могут быть соблюдены законы сохранения импульса и энергии). Для акустического фонона в пределе $\mathbf{k} \to 0$ поляризационные векторы $\mathbf{e}_s(\mathbf{k})$ стремятся к независящей от s постоянной, так как все атомы в ячейке колеблются вместе; множители же $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}_\mathbf{n})$ стремятся к единице. В силу свойства (66.12), величина Ω (66.4) стремится, следовательно, к нулю, а при малых $\mathbf{k}$ пропорциональна k или (что то же для акустического фонона) пропорциональна ω. В результате находим, что

$$w \propto k_1, \tag{66.13}$$

если длинноволновым является один фонон, или

$$w \propto k_1 k_2 k_3, \tag{66.14}$$

если длинноволновые все три фонона.

К результату (66.13), (66.14) можно прийти и более наглядным путем, вспомнив, что длинноволновые акустические фононы отвечают макроскопическим звуковым волнам, которые допускают рассмотрение с помощью макроскопической теории упругости. В этой теории энергия деформированного кристалла выражается через тензор деформации

$$U_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial U_\beta}{\partial x_\alpha}\right), \tag{66.15}$$

где $\mathbf{U}(\mathbf{r})$ — вектор макроскопического смещения точек упругой среды. Именно компоненты этого тензора являются теми малыми величинами, по которым происходит разложение упругой энергии. При вторичном квантовании вектор $\mathbf{U}$ заменяется оператором $\widehat{\mathbf{U}}$, аналогичным (66.2). Дифференцирование же $\widehat{\mathbf{U}}$ по координатам для построения операторов $\widehat{U}_{\alpha\beta}$ дает тот дополнительный множитель k, который и приводит к законам (66.13), (66.14).

§ 67. Кинетическое уравнение для фононов в диэлектрике

В твердом кристалле фононы образуют разреженный газ, и кинетическое уравнение для них составляется подобно тому, как это делается для обычного газа.

Пусть $N \equiv N_g(t, \mathbf{r}, \mathbf{k})$ — функция распределения фононов g-го сорта. Кинетические уравнения (для каждого сорта фононов) записываются в виде

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \mathbf{u}\frac{\partial N}{\partial \mathbf{r}} = \mathrm{St}\, N, \tag{67.1}$$

где $\mathbf{u} = \partial\omega/\partial\mathbf{k}$ — скорость фононов.

Существенное отличие от ситуации в обычных газах состоит, однако, в том, что столкновения в фононном газе не сохраняют, вообще говоря, ни числа фононов, ни (ввиду наличия процессов переброса) их суммарного квазиимпульса. Единственным законом сохранения остается лишь закон сохранения энергии. Он выражается соотношением

$$\sum_g \int \omega\, \mathrm{St}\, N \frac{d^3k}{(2\pi)^3} = 0. \tag{67.2}$$

Умножив уравнение (67.1) на ω, интегрируя по d^3k и суммируя по g, получим закон сохранения энергии в виде

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \mathrm{div}\, \mathbf{q} = 0, \tag{67.3}$$

где плотность тепловой энергии кристалла E и плотность ее потока $\mathbf{q}$ даются естественными выражениями

$$E = \sum_g \int \omega N \frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \quad \mathbf{q} = \sum_g \int \omega \mathbf{u} N \frac{d^3k}{(2\pi)^3}. \tag{67.4}$$

Интеграл столкновений в (67.1) должен в принципе учитывать все процессы, могущие происходить в результате взаимодействия фононов сорта g со всеми другими фононами. Фактически, однако, основной вклад в него возникает от трехфононных процессов, рассмотренных в предыдущем параграфе. Процессы с участием большого числа фононов возникают от следующих членов разложения гамильтониана по степеням смещений атомов; эти члены быстро убывают с увеличением их порядка. Причиной уменьшения является малость отношения амплитуды колебаний ξ к постоянной решетки d; в твердых кристаллах оно остается малым при всех температурах, вплоть до температуры плавления [1]). Для грубой оценки можно исходить из классиче-

[1]) Исключение составляет «квантовый кристалл» — твердый гелий.

ского соотношения $M\omega^2\xi^2 \sim T$; оценив характерное значение частоты как $\omega \sim u/d$[1]), найдем что

$$\left(\frac{\xi}{d}\right)^2 \sim \frac{T}{Mu^2} \ll 1. \tag{67.5}$$

Как всегда, интеграл столкновений представляет собой разность числа процессов, приводящих (в единицу времени) к появлению фононов в заданном состоянии $(g\mathbf{k})$, и числа процессов, уводящих фононы из этого состояния. С учетом лишь трехфононных процессов имеем

$$\begin{aligned}\operatorname{St} N = \int \Big\{ \frac{1}{2} \sum_{g_1 g_2} & w(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \mathbf{k}) \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2) \times \\ & \times [(N+1)N_1 N_2 - N(N_1+1)(N_2+1)] + \\ & + \sum_{g_1 g_3} w(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_3) \delta(\omega_3 - \omega - \omega_1) \times \\ & \times [(N+1)(N_1+1)N_3 - NN_1(N_3+1)] \Big\} \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3},\end{aligned} \tag{67.6}$$

где $N_1 \equiv N_{g_1}(\mathbf{k}_1)$, $\omega_1 = \omega_{g_1}(\mathbf{k}_1)$, ... Первый член в фигурных скобках отвечает прямому и обратному процессам

$$(g\mathbf{k}) \rightleftarrows (g_1\mathbf{k}_1) + (g_2\mathbf{k}_2), \quad \mathbf{k}_2 = \mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{b}; \tag{67.7}$$

множитель $1/2$ в этом члене учитывает, что ввиду тождественности фононов надо суммировать лишь по половине конечных состояний. Второй же член отвечает процессам

$$(g_3\mathbf{k}_3) \rightleftarrows (g\mathbf{k}) + (g_1\mathbf{k}_1), \quad \mathbf{k}_3 = \mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{b}; \tag{67.8}$$

в этом члене множитель $1/2$ не нужен, так как один из двух распадных фононов задан. Обратим внимание на то, что в подынтегральном выражении в (67.6) тройные произведения NN_1N_2 и NN_1N_3 сокращаются.

Интеграл столкновений тождественно обращается в нуль равновесным распределением фононов — распределением Планка

$$N_0 = (e^{\omega/T} - 1)^{-1}. \tag{67.9}$$

Для интеграла (67.6) в этом легко убедиться прямой проверкой: перемножение множителей дает

$$N_0(N_{01}+1)(N_{02}+1) = (N_0+1)N_{01}N_{02} \exp\frac{\omega_1+\omega_2-\omega}{T}, \tag{67.10}$$

[1]) В оценках мы будем понимать под u скорость звука, хотя, конечно, буквальный смысл такое отождествление может иметь смысл только для длинноволновых акустических фононов.

а в силу закона сохранения энергии экспоненциальный множитель в правой части обращается в единицу.

Если бы отсутствовали процессы переброса, то сохранялась бы не только суммарная энергия, но и суммарный квазиимпульс фононов. Тогда равновесной являлась бы не только функция распределения (67.9), но и функции

$$N_0 = \left[\exp\frac{\omega - \mathbf{kV}}{T} - 1\right]^{-1}, \tag{67.11}$$

отвечающие поступательному движению (*дрейфу*) фононного газа как целого с произвольной скоростью $\mathbf{V}$ относительно решетки. Это утверждение отвечает общим принципам статистики. В его справедливости можно убедиться и непосредственно: с функциями (67.11) в качестве N_0 в правой части равенства (67.10) появится еще и множитель

$$\exp\frac{\mathbf{V}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)}{T},$$

обращающийся в единицу для процессов без переброса, когда $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$.

Но распределение вида (67.11) приводит, разумеется, к отличному от нуля потоку энергии $\mathbf{q}$. Таким образом, в отсутствие процессов переброса в кристалле было бы возможно существование потока тепла при постоянной вдоль всего тела температуре; другими словами, кристалл обладал бы бесконечной теплопроводностью. Конечная теплопроводность возникает только в результате существования процессов переброса [1]).

Для вычисления теплопроводности надо написать кинетическое уравнение для кристалла с медленно меняющейся вдоль его объема температурой. Как обычно, ищем функции распределения фононов в виде

$$N(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = N_0(\mathbf{k}) + \delta N(\mathbf{r}, \mathbf{k}), \tag{67.12}$$

где δN — малая поправка к равновесной функции. Кинетические уравнения принимают тогда вид

$$(\mathbf{u}\nabla T)\frac{\partial N_0}{\partial T} = I(\delta N), \tag{67.13}$$

где $I(\delta N)$ — линеаризованный интеграл столкновений.

Функции δN должны удовлетворять еще и дополнительному условию

$$\sum_g \int \omega \delta N \frac{d^3k}{(2\pi)^3} = 0, \tag{67.14}$$

[1]) Квантовая теория теплопроводности диэлектриков, основанная на кинетическом уравнении для фононов, была построена *Пайерлсом* (*R. Peierls*, 1929). Им же была впервые указана роль процессов переброса для кинетических процессов в твердых телах.

означающему, что возмущенные функции распределения должны приводить к тому же значению плотности энергии решетки, что и равновесные функции. Как уже было отмечено в § 6, этим условием по существу устанавливается смысл определения температуры в неравновесном теле. Что касается других условий, которые налагались на δN в § 6, то в случае газа фононов (в отличие от обычного газа) эти условия отсутствуют. Число частиц в фононном газе вообще не является заданной величиной, а устанавливается температурой. Суммарный же истинный импульс (не квазиимпульс!) фононов в кристалле автоматически равен нулю; противное означало бы течение твердого тела, заведомо невозможное для идеальной (без дефектов) кристаллической решетки. Каждый атом в решетке совершает лишь финитное движение — колебания вблизи узлов решетки; средний импульс такого движения тождественно равен нулю. Таким образом, поток фононов (связанный с потоком энергии) в твердом кристалле не сопровождается переносом массы [1]).

Выпишем в явном виде линеаризованный интеграл столкновений (67.6). При этом целесообразно ввести вместо δN новые неизвестные функции χ согласно определению

$$\delta N = -\frac{\partial N_0}{\partial \omega}\chi = \frac{N_0(N_0+1)}{T}\chi. \tag{67.15}$$

Проведение линеаризации упрощается, если заметить, что

$$\delta\frac{N}{1+N} = \frac{N_0}{1+N_0}\frac{\chi}{T}. \tag{67.16}$$

Напишем выражение в квадратных скобках (например, в первом интеграле в (67.6)) в виде

$$(N+1)(N_1+1)(N_2+1)\left[\frac{N_1}{N_1+1}\frac{N_2}{N_2+1} - \frac{N}{N+1}\right].$$

В вынесенных из квадратных скобок множителях можно прямо положить $N = N_0$. Разность же в квадратных скобках дает

$$\frac{1}{T}\frac{N_0}{N_0+1}(\chi_1+\chi_2-\chi),$$

где учтено равенство

$$\frac{N_{01}}{N_{01}+1}\frac{N_{02}}{N_{02}+1} = \frac{N_0}{1+N_0}.$$

---

[1]) В отличие от жидкости, где импульс фонона является истинным импульсом и поток фононов связан с переносом массы. Движение атомов в жидкости инфинитно: за достаточное время каждый атом может попасть в любую точку ее объема.

Таким образом, интеграл столкновений приводится к виду

$$\mathrm{St}\, N \approx I(\chi) = \frac{1}{T}\int\Big\{\frac{1}{2}\sum_{g_1 g_2} w(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2;\mathbf{k})N_0(N_{01}+1)(N_{02}+1)\times$$
$$\times\, \delta(\omega_1+\omega_2-\omega)(\chi_1+\chi_2-\chi) + \sum_{g_1 g_3} w(\mathbf{k},\mathbf{k}_1;\mathbf{k}_3)N_0 N_{01}(N_{03}+1)\times$$
$$\times\, \delta(\omega+\omega_1-\omega_3)(\chi_3-\chi_1-\chi)\Big\}\frac{d^3k_1}{(2\pi)^3}. \quad (67.17)$$

Обратим внимание на то, что функция $\chi(\mathbf{k})$ входит в подынтегральные выражения в виде простых сумм ее значений для различных $\mathbf{k}$ (подобно тому, как это было в классическом интеграле столкновений в газах (6.4), (6.5)).

Уравнение (67.13) имеет очевидное решение

$$\chi = \mathrm{const}\cdot\omega, \quad (67.18)$$

тождественно обращающее в нуль интеграл (67.17) в силу сохранения энергии при столкновениях. Как уже было объяснено в § 6, это «паразитное» решение отвечает просто изменению температуры на малую постоянную величину; оно исключается наложением дополнительного условия (67.14).

Другое же «паразитное» решение

$$\chi = \mathbf{k}\delta\mathbf{V} \quad (67.19)$$

($\delta\mathbf{V}$ — константа), отвечающее малому изменению скорости движения фононного газа как целого (ср. (6.6)), исключается уже существованием процессов переброса, нарушающих сохранение суммарного квазиимпульса фонона.

§ 68. Теплопроводность диэлектриков. Высокие температуры

Уравнение (67.13) позволяет сразу же определить температурную зависимость коэффициента теплопроводности диэлектрика при высоких температурах, больших по сравнению с дебаевской температурой $\Theta \sim u/d$ ($\hbar u/d$ в обычных единицах).

Максимальное значение энергии фононов во всех ветвях их спектра порядка величины Θ. Поэтому при $T \gg \Theta$ энергии всех вообще фононов $\omega \ll T$, причем для основной их массы $\omega \sim \Theta$. При этом равновесная функция распределения (67.9) сводится к

$$N_0 \approx \frac{T}{\omega} \gg 1. \quad (68.1)$$

В интеграле столкновений (67.17) температура выносится в виде множителя T^2; функция w, взятая для частот $\omega \sim \Theta$, не влияет на температурную зависимость интеграла. В левой же части уравнения (67.13) производная $\partial N_0/\partial T \approx 1/\omega$ не содержит температуры. Отсюда заключаем, что

$$\chi \sim \frac{\nabla T}{T^2}, \quad \delta N = -\frac{\partial N_0}{\partial \omega}\chi \sim \frac{\nabla T}{T},$$

а потому и тепловой поток [1])

$$\mathbf{q} = \sum_g \int \omega \mathbf{u} \delta N \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sim \frac{\nabla T}{T}.$$

Таким образом, коэффициент теплопроводности обратно пропорционален температуре:

$$\varkappa \sim \frac{1}{T}, \qquad T \gg \Theta \tag{68.2}$$

(в классической теории этот результат был получен *Дебаем* (*P. Debye*)). В анизотропном кристалле направления $\mathbf{q}$ и ∇T, вообще говоря, не совпадают, так что коэффициент теплопроводности не скаляр, а тензор второго ранга; говоря о его температурной зависимости, мы отвлекаемся от этого обстоятельства.

Оценим длину свободного пробега фононов в рассматриваемой области температур. Согласно элементарному газокинетическому соотношению (7.10), $\varkappa \sim C\overline{v}l$, где C — теплоемкость (отнесенная к единице объема), $\overline{v}$ — средняя скорость носителей энергии, l — длина их пробега. Теплоемкость кристалла при высоких температурах постоянна; постоянна и скорость фононов, которую можно оценить как скорость звука u. Тогда мы видим, что длина пробега $l \sim 1/T$. Длина l должна была бы стать порядка постоянной решетки d при температурах настолько высоких, что амплитуда колебаний атомов тоже стала бы $\sim d$. Согласно оценке (67.5), такая температура $\sim Mu^2$, и для длины пробега и эффективной частоты столкновений $\nu \sim u/l$ находим оценки

$$l \sim \frac{Mu^2 d}{T}, \quad \nu \sim \frac{T}{Mud}. \tag{68.3}$$

Отсюда видно, что $l \gg d$ фактически при всех температурах ниже точки плавления.

[1]) Заранее очевидное обращение $\mathbf{q}$ в нуль в равновесии формально следует из обращения в нуль интеграла по d^3k ввиду нечетности подынтегрального выражения как функции $\mathbf{k}$: частота $\omega(\mathbf{k})$, а с нею и $N_0(\omega)$ — четные функции $\mathbf{k}$, а скорость $\mathbf{u} = \partial\omega/\partial\mathbf{k}$ — нечетная функция. Напомним (см. V, § 69), что четность функции $\omega(\mathbf{k})$ связана с симметрией по отношению к обращению времени и имеет место при любой симметрии кристаллической решетки.

В изложенных рассуждениях по существу подразумевалось, что рассмотренный трехфононный механизм теплового сопротивления кристаллической решетки эффективен для всех фононов. Потоки энергии, переносимой различными группами фононов, аддитивны, так что аддитивны и их вклады в коэффициент теплопроводности. Если данный механизм был бы недостаточен хотя бы для какой-нибудь группы фононов, то тем самым он был бы вообще недостаточен для обеспечения конечной теплопроводности. В этом отношении требуют особого рассмотрения длинноволновые акустические фононы.

Рассмотрим прежде всего процессы, в которых участвуют только длинноволновые акустические фононы с малыми квазиимпульсами сравнимой величины (будем обозначать эти квазиимпульсы буквами $\mathbf{f}$ с соответствующими индексами). Оценим для таких процессов интеграл столкновений (67.17) в смысле его зависимости от f. Согласно (66.14), в этом случае функция $w \propto f f_1 f_2 \sim f^3$. Множители $N_0 \sim T/\omega \propto 1/f$. Интегрирование производится в k-пространстве по объему $\sim f^3$, но δ-функция выделяет внутри этого объема лишь поверхность с площадью $\sim f^2$. Таким образом, найдем, что интеграл столкновений

$$I(\chi) \propto f^2 \chi \propto f^4 \delta N$$

(в последнем выражении учтено, что согласно определению (67.15) $\delta N \propto \chi / f^2$); этот результат можно сформулировать в терминах эффективной частоты столкновений:

$$\nu(f) \propto f^4. \tag{68.4}$$

В левой же части кинетического уравнения (67.13) множитель $\mathbf{u}$ не зависит (для акустических фононов) от f, а $\partial N_0 / \partial T \propto 1/f$. Поэтому

$$\delta N \propto \frac{1}{f\nu}.$$

Вклад длинноволновых фононов в поток энергии $\mathbf{q}$ дается интегралом (67.4), взятым по объему $\sim f^3$. Но этот интеграл

$$\int \omega u \delta N \frac{d^3 f}{(2\pi)^3} \propto \int \frac{d^3 f}{\nu(f)} \tag{68.5}$$

расходится при малых f как $1/f$. Таким образом, трехфононные процессы между одними только длинноволновыми акустическими фононами привели бы к бесконечной теплопроводности; для обеспечения конечного теплового сопротивления необходимы столкновения этих фононов с коротковолновыми (*И.Я. Померанчук*, 1941).

Пусть коротковолновый фонон с квазиимпульсом $\mathbf{k}$ распадается на длинноволновый акустический фонон $\mathbf{f}$ и коротковолновый фонон $\mathbf{k}-\mathbf{f}-\mathbf{b}$, относящийся к той же ветви спектра $\omega(\mathbf{k})$, что и фонон $\mathbf{k}$ (для дальнейших рассуждений существенна не столько абсолютная величина k, сколько тот факт, что $k \gg f$). Поскольку функция $\omega(\mathbf{k})$ периодична в обратной решетке, то $\omega(\mathbf{k}-\mathbf{f}-\mathbf{b}) = \omega(\mathbf{k}-\mathbf{f})$ и закон сохранения энергии дает

$$\omega(\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k}-\mathbf{f}) + u(\mathbf{n})f. \tag{68.6}$$

Второй член справа — частота акустического фонона — линейная функция f ($u(\mathbf{n}) = \omega(\mathbf{f})/f$) — фазовая скорость звука, зависящая от направления $\mathbf{n} = \mathbf{f}/f$. Разложив $\omega(\mathbf{k}-\mathbf{f})$ по степеням малого $\mathbf{f}$, переписываем это равенство в виде

$$\mathbf{f}\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}} = fu(\mathbf{n}). \tag{68.7}$$

Оно может быть выполнено, лишь если скорость коротковолнового фонона превышает скорость звука:

$$\left|\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}}\right| > u(\mathbf{n}). \tag{68.8}$$

В этом смысле наиболее «опасна» акустическая ветвь с наибольшей скоростью звука; эту ветвь мы и будем иметь в виду, говоря об акустических фононах [1]).

Другие возможности для трехфононных процессов появляются при наличии точек вырождения в k-пространстве, в которых энергии двух или более ветвей фононного спектра совпадают (*C. Herring*, 1954); наличие таких точек (изолированных или заполняющих линию или плоскость) во многих случаях является обязательным следствием симметрии кристаллической решетки. Возникающие в результате возможности иллюстрируются графическим построением, которое мы сначала проведем для уже рассмотренного случая испускания «сверхзвуковым» коротковолновым фононом.

При заданном направлении $\mathbf{f}$ выберем это направление в качестве оси x; на рис. 27*а* сплошная кривая изображает зависимость $\omega(k_x)$ (при заданных k_y, k_z) для коротковолновых фононов. Написав условие (68.7) в виде

$$v_x \equiv \frac{\partial\omega}{\partial k_x} = u(\mathbf{n}_x),$$

[1]) В изотропном твердом теле одна ветвь акустического спектра отвечает продольным, а две другие — поперечным колебаниям; скорость продольных звуковых волн больше скорости поперечных волн. В анизотропном кристалле разделение волн на продольные и поперечные теряет, вообще говоря, смысл. Но в литературе часто называют условно «продольной» ветвь с наибольшей скоростью звука.

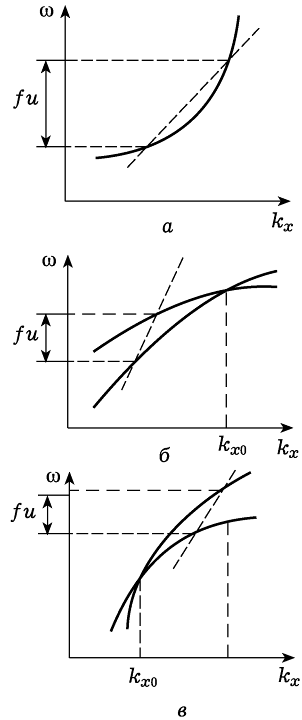


Рис. 27

мы видим, что испускание акустического фонона возможно, если в некоторой точке кривой ее наклон совпадает со скоростью звука. Тогда вблизи этой точки частоты $\omega(\mathbf{k})$ и $\omega(\mathbf{k}-\mathbf{f})$ коротковолновых фононов даются точками пересечения кривой со штриховой прямой, проведенной с наклоном $u(\mathbf{n}_x)$; разность ординат этих точек дает частоту uf.

Если же в некоторой точке $k_x = k_{x0}$ кривые двух ветвей $\omega(k_x)$ пересекаются, то вблизи такой точки трехфононный процесс возможен всегда, при любых наклонах кривых $\omega(k_x)$, независимо от того, имеет ли место в точке k_{x0} простое пересечение (рис. 27*б*) или касание (рис. 27*в*). При этом оба коротковолновых фонона относятся к различным ветвям спектра.

Оценим эффективное число столкновений длинноволнового акустического фонона при наличии точек вырождения. Речь при этом должна идти о процессах поглощения и испускания этого фонона — процессы (67.8) (при распаде такого фонона — процессы (67.7) — два образующихся фонона будут также длинноволновыми и мы возвратились бы к прежней ситуации). Поэтому мы должны оценить второй член в (67.17), считая, что

$$\omega_1, \omega_3 \gg \omega \propto f \to 0.$$

При этом учтем, что $w \propto f$, $N_0 \propto 1/f$, а остальные множители под интегралом можно заменить на независящие от f средние значения, поскольку интегрирование производится лишь в окрестности точек вырождения. Снова введя $\delta N \propto \chi/f^2$, получим оценку зависимости интеграла столкновений от f в виде $I(\chi) \sim \nu(f)\delta N$, где

$$\nu(f) \propto f^2 \int \delta[\omega_1(\mathbf{k}-\mathbf{f}) + u(\mathbf{n})f - \omega_3(\mathbf{k})]\, d^3k. \tag{68.9}$$

Этот интеграл можно преобразовать в интеграл по поверхности в $\mathbf{k}$-пространстве, определяемой уравнением

$$\omega_1(\mathbf{k}-\mathbf{f}) + u(\mathbf{n})f - \omega_3(\mathbf{k}) = 0, \tag{68.10}$$

согласно формуле [1])

$$\int \delta(F)\, d^3k = \oint \frac{dS}{|\nabla_{\mathbf{k}} F|}, \tag{68.11}$$

где интеграл берется по поверхности $F(\mathbf{k}) = 0$. Тогда получим

$$\nu(f) \backsim f^2 \Delta S(f) \left\langle \left| \frac{\partial \omega_3(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}} - \frac{\partial \omega_1(\mathbf{k}-\mathbf{f})}{\partial \mathbf{k}} \right|^{-1} \right\rangle, \tag{68.12}$$

где $\Delta S(f)$ — площадь поверхности (68.10), а угловые скобки означают усреднение по поверхности.

Рассмотрим типичный случай, когда точки вырождения образуют линию в $\mathbf{k}$-пространстве. Тогда при $f \to 0$ поверхность (68.10) стягивается в линию, на которой лежат точки вырождения, а при малых f она представляет собой тонкую трубку, охватывающую эту линию; зависимость площади ΔS от f совпадает поэтому с зависимостью от f диаметра трубки.

Если изоэнергетические поверхности пересекаются на линии вырождения без касания (см. рис. 27*б*), то расстояние точки $\mathbf{k}$ от точки вырождения зависит от f линейно, так что и $\Delta S \backsim f$. Поскольку разность производных в этом случае конечна в точке пересечения, то

$$\nu(f) \backsim f^3. \tag{68.13}$$

Интеграл (68.5) расходится теперь уже лишь логарифмическим образом. Эта расходимость должна устраняться так же, как и в отсутствие вырождения (см. ниже). Ввиду слабости расходимости она обычно не приводит к существенному изменению закона (68.2).

Пусть теперь изоэнергетические поверхности имеют в точке вырождения квадратичное касание. Тогда, как ясно из рис. 27*в*, f пропорционально квадрату расстояния до точки касания. Площадь же ΔS, будучи пропорциональной этому расстоянию, оказывается $\backsim f^{1/2}$. Но такова же в этом случае зависимость от f и разности производных в (68.12), поскольку кривые производных пересекаются уже без касания. Поэтому в этом случае

$$\nu(f) \backsim f^2 \tag{68.14}$$

и расходимость в теплопроводности не возникает.

[1]) Эту формулу можно сразу получить, если учесть, что

$$d^3k = dS\, dl = dS\, \frac{dF}{|\nabla_{\mathbf{k}} F|},$$

где l — расстояние по нормали к поверхности.

Аналогичным образом можно рассмотреть и другие типы вырождения [1]).

Если точки вырождения в фононном спектре отсутствуют, то для обеспечения конечной теплопроводности за счет трехфононных процессов условие (68.6) должно выполняться (хотя бы для одной ветви спектра $\omega(\mathbf{k})$) при всех направлениях $\mathbf{n}$. В противном случае конечная теплопроводность устанавливается лишь за счет процессов более высокого порядка (четырехфононных) и закон (68.2) не имеет места. Заметим, что при низких температурах, когда длина пробега настолько возрастает, что может сравниться с размерами образца L, расходимость интеграла (68.5) может обрезаться на $f \sim 1/L$, что привело бы к зависимости коэффициента теплопроводности от размеров L.

§ 69. Теплопроводность диэлектриков. Низкие температуры

При низких температурах ($T \ll \Theta$) характер переноса тепла в диэлектриках радикально меняется. Дело в том, что в таких условиях число процессов переброса становится экспоненциально малым, как это ясно из следующих рассуждений.

Сохранение квазиимпульса в трехфононном процессе с перебросом, выражаемое равенством $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{b}$, требует, чтобы по крайней мере один из трех квазиимпульсов был велик; пусть это будет $k_1 \sim b$. Тогда и энергия $\omega_1 \sim \Theta$, а вследствие этого сохранение энергии ($\omega = \omega_1 + \omega_2$) требует, чтобы была велика и энергия $\omega \sim \Theta$. Но при $T \ll \Theta$ большинство фононов имеет энергию $\sim T$, а число фононов с энергиями $\sim \Theta$ экспоненциально мало. Таким образом, как для процесса распада фонона, так и для обратного процесса слияния двух фононов числа начальных фононов, а с ними и числа процессов, экспоненциально малы. Легко заметить, что в этих рассуждениях несущественна трехфононность процесса. То же самое относится и к процессам с участием большего числа фононов.

В этой ситуации физическая картина теплопередачи выглядит следующим образом. Многочисленные нормальные столкновения фононов, сохраняющие суммарный квазиимпульс, приводят к установлению лишь «внутреннего» равновесия в фононном газе, который может при этом двигаться относительно решетки с произвольной скоростью $\mathbf{V}$. Малочисленные же столкновения с перебросом лишь слабо меняют функцию распределения, но ими устанавливается определенное (пропорциональное градиен-

[1]) Их исследование см. в оригинальной статье: *Herring C.* // Phys. Rev. 1954. V. 95. P. 954.

ту температуры) значение $\mathbf{V}$; этим значением в свою очередь определяется тепловой поток. Покажем теперь, каким образом эта картина выражается в математическом решении задачи [1]).

Запишем кинетическое уравнение в виде

$$\frac{\partial N_0}{\partial T}\mathbf{u}\nabla T = I_N(\chi) + I_U(\chi), \tag{69.1}$$

разделив в интеграле столкновений части, связанные с нормальными (индекс N) и перебросными (индекс U) столкновениями. Равновесная функция распределения, отвечающая движению газа как целого со скоростью $\mathbf{V}$, получается из функции $N_0(\omega)$ заменой ее аргумента ω на $\omega - \mathbf{kV}$; при малом $\mathbf{V}$ имеем

$$N_0(\omega - \mathbf{kV}) \approx N_0(\omega) - \mathbf{kV}\frac{\partial N_0}{\partial \omega}. \tag{69.2}$$

В соответствии с описанной выше картиной ищем решение уравнения (69.1) в виде

$$\chi = \chi_N + \chi_U, \qquad \chi_N = \mathbf{kV}; \tag{69.3}$$

χ_U — часть изменения функции распределения, связанная с процессами переброса. Эта последняя часть мала по сравнению с χ_N. Если обозначить через ν_U и ν_N порядки величины эффективных частот столкновений с перебросами и без них ($\nu_U \ll \nu_N$), то

$$\frac{\chi_U}{\chi_N} \sim \frac{\nu_U}{\nu_N}. \tag{69.4}$$

Подстановка в (69.1) приводит к уравнению

$$\frac{\partial N_0}{\partial T}\mathbf{u}\nabla T = I_N(\chi_U) + I_U(\chi_N), \tag{69.5}$$

где действующие на функции χ линейные операторы определяются выражением (67.17). В (69.5) учтено, что $I_N(\chi_N) = 0$, а член $I_U(\chi_U)$ опущен как малый; оба же оставленных в правой части члена одинакового порядка величины при соотношении (69.4).

Подчеркнем прежде всего, что в пренебрежении процессами переброса, при отличном от нуля градиенте температуры, кинетическое уравнение вообще не имело бы решения. Действительно, умножим уравнение (69.5) на $\mathbf{k}$, проинтегрируем по $d^3k/(2\pi)^3$ и просуммируем по всем ветвям спектра фононов. Поскольку

[1]) Обратим внимание на то, что однозначное выделение процессов переброса как малого эффекта достигается именно при обусловленном в § 66 выборе основной ячейки в обратной решетке, в результате которого все столкновения между одними лишь длинноволновыми фононами малых энергий являются нормальными.

нормальные столкновения сохраняют полный квазиимпульс, то член $I_N(\chi_U)$ обратится в результате в нуль, так что остается

$$\sum_g \int \mathbf{k}(\mathbf{u}\nabla T)\frac{\partial N_0}{\partial T}\frac{d^3k}{(2\pi)^3} = \sum_g \int \mathbf{k} I_U(\chi_N)\frac{d^3k}{(2\pi)^3}. \tag{69.6}$$

В пренебрежении процессами переброса, в правой части этого уравнения стоял бы нуль, между тем как левая часть заведомо отлична от нуля (подынтегральная функция — четная функция $\mathbf{k}$, поскольку $\omega(\mathbf{k})$ — четная, а $\mathbf{u} = \partial\omega/\partial\mathbf{k}$ — нечетная функции); это противоречие и означает отсутствие решения у кинетического уравнения.

С учетом же процессов переброса равенство (69.6) определяет неизвестную величину $\mathbf{V}$, входящую в решение (69.3). Для упрощения записи формул будем считать, что кристалл имеет кубическую симметрию; тогда в интегралах в (69.6) анизотропия кристалла не проявляется [1]) и равенство (69.6) после подстановки χ_N из (69.3) принимает вид

$$\beta_1 \nabla T = -\nu_U \beta_2 T\mathbf{V}, \tag{69.7}$$

где введены обозначения

$$\beta_1 = \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial T}\sum_g \int \mathbf{k}\mathbf{u}N_0\frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \quad \beta_2 = \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial T}\sum_g \int \frac{k^2}{\omega}N_0\frac{d^3k}{(2\pi)^3},$$
$$T\nu_U\beta_2 = -\frac{1}{3}\sum_g \int \mathbf{k}I_U(\mathbf{k})\frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tag{69.8}$$

(множитель β_2 выделен для упрощения записи формул ниже).

Равенство (69.7) определяет $\mathbf{V}$, после чего поток энергии вычисляется как интеграл (67.4), в котором в качестве N надо подставить функцию

$$\delta N_N = -\mathbf{k}\mathbf{V}\frac{\partial N_0}{\partial \omega} = \mathbf{k}\mathbf{V}\frac{T}{\omega}\frac{\partial N_0}{\partial T}.$$

Тогда получим $\mathbf{q} = T\beta_1\mathbf{V}$; вместе с (69.7) это дает $\mathbf{q} = -\varkappa\nabla T$ с коэффициентом теплопроводности

$$\varkappa = \frac{\beta_1^2}{\nu_U\beta_2}. \tag{69.9}$$

Интересно, что в рассматриваемом случае вычисление $\varkappa$ не требует решения кинетического уравнения (69.5), а сводится к вычислению интегралов (69.8).

[1]) При кубической симметрии всякий тензор второго ранга сводится к скаляру: $a_{\alpha\beta} = (1/3)a\delta_{\alpha\beta})$, $a \equiv a_{\alpha\alpha}$.

Интегралы β_1 и β_2 определяются областью частот $\omega \sim T$, в которой находится большинство фононов. Эти интегралы зависят от T лишь степенным образом. Поскольку малой энергией могут обладать лишь акустические фононы, то в β_1 и β_2 фактически достаточно суммировать лишь по трем акустическим ветвям спектра. Легко видеть, что при этом

$$\beta_1, \beta_2 \propto T^3. \tag{69.10}$$

Экспоненциальная же зависимость заключена в интеграле ν_U. Его конкретное выражение можно получить с помощью (67.17). Для процессов переброса имеем

$$\chi_{N1} + \chi_{N2} - \chi_N = \mathbf{V}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}) = \mathbf{V}\mathbf{b}.$$

Для большинства фононов $\omega \sim T$ и функция распределения $N_0 \sim 1$; для фононов же с $\omega \gg T$ функция $N_0 \ll 1$. Поэтому множители $N_0 + 1 \sim 1$ и при оценке интеграла могут не учитываться. Функции же

$$N_0 = e^{-\omega/T}(N_0 + 1)$$

содержат множители $\exp(-\omega/T)$, которые могут быть экспоненциально малыми; эти множители и играют определяющую роль при оценке интеграла.

Таким образом, если интересоваться лишь экспоненциальной зависимостью ν_U от температуры, имеем

$$\nu_U \propto \sum_{(g\mathbf{b})} \int e^{-\omega/T} \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2)\, d^3k\, d^3k_1; \tag{69.11}$$

суммирование производится по всем ветвям спектра g, g_1, g_2 и по всем возникающим в процессах переброса отличным от нуля значениям $\mathbf{b}$. Уравнение

$$\omega_g(\mathbf{k}) = \omega_{g_1}(\mathbf{k}_1) + \omega_{g_2}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \tag{69.12}$$

определяет пятимерную поверхность в шестимерном $\mathbf{k}$, $\mathbf{k}_1$-пространстве. Пусть $\Delta(g, g_1, g_2)$ — минимальное значение $\omega_g(\mathbf{k})$ на этой гиперповерхности; поскольку энергии фононов, участвующих в процессах переброса, велики, то и эти значения $\sim \Theta$. Каждый из интегралов под знаком суммы по (g) в (69.11) пропорционален $\exp[-\Delta(g, g_1, g_2)/T]$. Сохранив лишь наибольший из них, имеем

$$\nu_U \propto \exp\left(-\frac{\Delta_{\min}}{T}\right), \tag{69.13}$$

где $\Delta_{\min}$ — наименьшее из $\Delta(g, g_1, g_2)$.

Таким образом, мы приходим к результату, что коэффициент теплопроводности зависит от температуры в основном по экспоненциальному закону

$$\varkappa \propto \exp \frac{\Delta_{\min}}{T}, \tag{69.14}$$

причем $\Delta_{\min} \sim \Theta$ (*R. Peierls*, 1929).

Процессы более высокого порядка, с участием большего числа фононов, приводят к температурной зависимости такого же характера, причем Δ — наименьшее возможное значение энергии начальных фононов в каждом процессе (или, что то же, половина наименьшего значения суммарной энергии всех — начальных и конечных — фононов, участвующих в процессе). В принципе может оказаться, что это значение меньше, чем для трехфононных процессов, и тогда вклад процессов высшего порядка в теплопроводность может стать преобладающим, несмотря на то, что предэкспоненциальный множитель, разумеется, уменьшается с возрастанием порядка процесса.

В отличие от частоты ν_U процессов переброса, эффективная частота ν_N нормальных столкновений уменьшается с температурой по степенному закону; имея в виду применение в § 71, определим закон этого убывания.

Нормальные столкновения происходят между акустическими фононами с $\omega \sim T$, составляющими большинство. Их квазиимпульсы $k \sim \omega/u \sim T/u$. В интеграле столкновений (67.17) интегрирование производится по поверхности с площадью $\sim k^2$, выделяемой δ-функцией в объеме $\sim k^3$. В этой области функции $N_0 \sim 1$, а функция $w \propto k^3$ (согласно (66.14)); поэтому $\nu_N \propto T^5$. Коэффициент пропорциональности проще всего определить из условия, что при $T \sim \Theta$ это выражение и оценка (68.3) должны приводить к одинаковому результату; отсюда

$$\nu_N \sim \frac{T^5}{\Theta^4 M u d}. \tag{69.15}$$

§ 70. Рассеяние фононов на примесях

В двух предыдущих параграфах подразумевалось, что кристаллическая решетка — идеальная, без дефектов. Остановимся теперь на роли, которую может играть в теплопроводности диэлектрика рассеяние фононов на примесных атомах.

По отношению к длинноволновым акустическим фононам примесный атом представляет собой точечный дефект решетки. Характерная особенность рассеяния на таких дефектах состоит в его упругости (частота фонона не меняется), причем сечение

рассеяния быстро падает с уменьшением частоты или, что то же, волнового вектора — как k^4 [1]).

Интеграл столкновений для рассеяния фононов на примесях имеет вид

$$\operatorname{St} N_{\mathbf{k}} = N_{\text{пр}} \int w(\mathbf{k}, \mathbf{k}')\{N_{\mathbf{k}'}(1+N_{\mathbf{k}}) - N_{\mathbf{k}}(1+N_{\mathbf{k}'})\}\delta(\omega'-\omega)\frac{d^3k'}{(2\pi)^3}. \tag{70.1}$$

Как обычно, первый член в фигурных скобках дает число актов рассеяния, приводящих (в единицу времени) фонон в состояние с заданным квазиимпульсом $\mathbf{k}$ из состояний с любыми другими значениями $\mathbf{k}'$, отвечающими той же энергии. Аналогичным образом, второй член дает число актов рассеяния, уводящих фононы из заданного состояния во все другие. Если примесные атомы расположены хаотически, а среднее расстояние между ними много больше амплитуды рассеяния, то различные атомы рассеивают независимо и вероятности складываются. В этих условиях (что и предположено в (70.1)) общее число актов рассеяния пропорционально плотности примесных атомов $N_{\text{пр}}$. При рассеянии в анизотропной среде функция $w(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ зависит от направлений обоих векторов $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$; зависимость же от абсолютной величины $k = k'$ дается законом $w \propto k^4$. В (70.1) положено $w(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = w(\mathbf{k}', \mathbf{k})$. Напомним, что в борновском приближении это равенство следует из условия унитарности с учетом малости амплитуды рассеяния, при пренебрежении членами второго порядка (см. II, § 126). К рассеянию фонона на примесном атоме борновское приближение, вообще говоря, неприменимо. Но при низких температурах, когда речь идет о фононах с малыми $\mathbf{k}$, есть другой источник малости амплитуды рассеяния — ее пропорциональность k^2; пренебрегая членами $\propto k^4$, снова придем к требуемому равенству.

Произведения $N_{\mathbf{k}}N_{\mathbf{k}'}$ в фигурных скобках в (70.1) сокращаются, и после подстановки $N = N + \delta N$ интеграл столкновений сразу принимает линеаризованный вид:

$$\operatorname{St} N \equiv I_{\text{пр}}(\delta N) = N_{\text{пр}} \int w(\delta N_{\mathbf{k}'} - \delta N_{\mathbf{k}})\delta(\omega'-\omega)\frac{d^3k'}{(2\pi)^3}. \tag{70.2}$$

Вместе с функцией w этот интеграл пропорционален k^4. Поскольку в то же время производная $\partial N_0/\partial T \propto 1/\omega \propto 1/k$ при $\omega \ll T$, то в этой области частот

$$\delta N \propto k^{-5}. \tag{70.3}$$

[1]) Это — общее свойство рассеяния звуковых волн на препятствиях с размерами, малыми по сравнению с длиной волны (ср. VI, § 76). Ср. также аналогичную ситуацию для рассеяния длинных электромагнитных волн — II, § 79.

С такой ситуацией мы уже встречались в § 68 (ср. (68.4)): зависимость (70.3) приводит к расходимости интеграла, определяющего тепловой поток. Таким образом, само по себе наличие примесей в кристалле не может обеспечить конечности теплового сопротивления диэлектрика.

Это не означает, однако, что примеси вообще не играют роли в установлении этого сопротивления. Дело в том, что рассеяние на примесных атомах не сохраняет квазиимпульс фононов, и в этом смысле оно может играть роль процессов переброса. В достаточно чистых образцах может существовать область низких температур, в которой эффективная частота $\nu_{\text{пр}}$ рассеяния на примесях (для фононов с $\omega \sim T$) занимает промежуточное положение между частотами нормальных и перебросных фонон-фононных столкновений:

$$\nu_N \gg \nu_{\text{пр}} \gg \nu_U. \tag{70.4}$$

В таких условиях роль процессов переброса переходит к примесному рассеянию и формулы (69.6)–(69.8) остаются в силе, если заменить в них I_U на $I_{\text{пр}}$. В результате коэффициент теплопроводности определяется формулой (69.9) с $\nu_{\text{пр}}$ вместо ν_U:

$$\varkappa = \frac{\beta_1^2}{\beta_2 \nu_{\text{пр}}}.$$

Согласно (70.2), $\nu_{\text{пр}} \propto \omega^4 \sim T^4$. Величины же β_1 и β_2 для акустических фононов пропорциональны T^3 (см. (69.10)). Поэтому мы приходим в рассматриваемой ситуации к закону $\varkappa \propto 1/T$.

§ 71. Гидродинамика фононного газа в диэлектрике

Приближенное сохранение квазиимпульса при условии малости длины пробега l_N для нормальных столкновений по сравнению с длиной пробега l_U для процессов переброса,

$$\frac{l_N}{l_U} \sim \frac{\nu_U}{\nu_N} \ll 1, \tag{71.1}$$

делает систему фононов в кристалле при низких температурах во многих отношениях подобной обычному газу. Нормальные столкновения устанавливают внутреннее равновесие в каждом элементе объема газа (большом по сравнению с l_N), который может при этом двигаться с произвольной скоростью $\mathbf{V}$. Если скорость $\mathbf{V}$ и температура T заметно меняются лишь на расстояниях, больших по сравнению с l_N (и за времена, большие по сравнению с $1/\nu_N$), то для них можно получить систему «гидродинамических» уравнений. Построим их в линейном приближении по скорости $\mathbf{V}$ и

градиенту температуры, которые будем считать малыми величинами одинакового порядка. Кроме того, для упрощения записи формул будем снова (как и в § 69) считать, что кристалл имеет кубическую симметрию.

Одно из искомых уравнений выражает собой закон сохранения энергии. Оно получается подстановкой в (67.3), (67.4) функции распределения (69.2). Интегралы от $\omega(\mathbf{kV})\partial N_0/\partial\omega$ и от $\omega\mathbf{u}N_0$ обращаются в нуль при интегрировании по направлениям $\mathbf{k}$ (ср. примеч. на с. 353). Функция $N_0(\omega)$ зависит от координат и времени только через посредство T. Пренебрегая членом с произведением $\mathbf{V}\nabla T$, получим

$$\beta_3\frac{\partial T}{\partial t} + \beta_1 T\,\mathrm{div}\,\mathbf{V} = 0, \tag{71.2}$$

где

$$\beta_3 = \frac{\partial E_0}{\partial T}, \tag{71.3}$$

E_0 — равновесная плотность энергии, а β_1 определено в (69.8).

Другое уравнение выражает собой сохранение (приближенное) квазиимпульса. Оно получается из кинетического уравнения

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \mathbf{u}\nabla N = \mathrm{St}_N N + \mathrm{St}_U N \tag{71.4}$$

подстановкой в него N в виде (69.2), умножением на $\mathbf{k}$, интегрированием по d^3k и суммированием по сортам фононов. Интеграл от $\mathbf{k}\,\mathrm{St}_N N$ обращается в нуль в силу сохранения квазиимпульса при нормальных столкновениях. В результате получим

$$\beta_2 T\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \beta_1\nabla T = -\nu_U\beta_2 T\mathbf{V} \tag{71.5}$$

с β_2 и ν_U из (69.8). Уравнения (71.2) и (71.5) и составляют искомую систему гидродинамических уравнений для фононного газа в диэлектрике.

Экспоненциально малый (вместе с ν_U) член в правой части уравнения (71.5) представляет влияние процессов переброса. В пренебрежении этим членом квазиимпульс сохраняется строго. В таких условиях в фононном газе могут распространяться незатухающие волны, аналогичные волнам второго звука в сверхтекучей жидкости (*В.П. Пешков*, 1946). Действительно, исключив $\mathbf{V}$ из (71.2) и (71.5), получим тогда

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \frac{\beta_1^2}{\beta_2\beta_3}\Delta T, \tag{71.6}$$

т. е. волновое уравнение, описывающее распространение колеба-

ний температуры со скоростью

$$u_2 = \left(\frac{\beta_1^2}{\beta_2\beta_3}\right)^{1/2}. \tag{71.7}$$

Как уже отмечалось, вклады в интегралы β_1, β_2, β_3 при низких температурах возникают в основном только от акустических ветвей спектра. Для линейных законов дисперсии $\omega(\mathbf{k})$ интегралы пропорциональны T^3; при этом скорость (71.7) не зависит от температуры и имеет порядок величины скорости звука [1]).

До сих пор мы подразумевали, что размеры кристалла неограничены. При низких температурах, когда длина пробега фононов быстро растет, может стать реальной ситуация, когда длина пробега становится сравнимой или даже большой по сравнению с размерами кристалла L. Это относится в первую очередь к экспоненциально возрастающей длине l_U.

Рассмотрим теплопередачу в диэлектрике в условиях, когда $l_U \gg L$ (это условие будет уточнено ниже), но в то же время еще $l_N \ll L$; последнее условие позволяет пользоваться уравнениями фононной гидродинамики (*J.A. Sussmann*, *A. Thellung*, 1963; *Р.Н. Гуржи*, 1964).

Благодаря микроскопическим неоднородностям поверхности кристалла, отражение фононов от нее происходит обычно беспорядочным образом (как говорят, *диффузно*); это значит, что макроскопическая скорость фононного газа $\mathbf{V}$ обращается на границе в нуль. Но уравнения (71.2), (71.5) не допускают такого граничного условия; их решениями можно удовлетворить лишь условию обращения в нуль нормальной к поверхности компоненты скорости. Как и в гидродинамике обычных жидкостей, граничное условие исчезновения тангенциальной компоненты скорости требует учета вязкости жидкости.

В стационарном случае из уравнения (71.2) имеем $\operatorname{div}\mathbf{V} = 0$. Учет вязкости приводит к появлению в правой части уравнения (71.5) члена с $\Delta\mathbf{V}$, подобного аналогичному члену в уравнении Навье–Стокса гидродинамики обычной вязкой жидкости.

В стационарном случае это уравнение принимает вид

$$\frac{\beta_1}{\beta_2 T}\nabla T = \mu\Delta\mathbf{V} - \nu_U\mathbf{V}. \tag{71.8}$$

Величина μ имеет размерность см^2/с и играет роль кинематиче-

---

[1]) В изотропной жидкости с фононным энергетическим спектром (сверхтекучий гелий при низких температурах) имеется всего одна акустическая ветвь, в которой $\omega = uk$. При этом $\beta_1/\beta_2 = u^2$, $\beta_1/\beta_3 = 1/3$ и скорость второго звука $u_2 = u/\sqrt{3}$.

ской вязкости фононного газа[1]). Ее вычисление требует в принципе решения соответствующего кинетического уравнения. Для оценки же по порядку величины можно воспользоваться обычной газокинетической формулой, согласно которой

$$\mu \sim l_N \overline{v} \sim \frac{u^2}{\nu_N}. \tag{71.9}$$

Размерные эффекты играют преобладающую роль, когда в уравнении (71.8) можно пренебречь членом $\nu_U \mathbf{V}$ по сравнению с $\mu \Delta \mathbf{V}$. Пусть, например, речь идет о теплопередаче вдоль цилиндрического стержня с толщиной R. Последняя определяет характерную длину для изменения скорости $\mathbf{V}$, так что $\Delta \mathbf{V} \sim \mathbf{V}/R^2$. Мы видим, что членом $\nu_U \mathbf{V}$ можно пренебречь, если $\mu/R^2 \gg \nu_U$. С оценкой (71.9) это условие записывается как $l_U \gg l_{\text{эф}}$, где

$$l_{\text{эф}} \sim \frac{R^2}{l_N} \tag{71.10}$$

играет роль эффективной длины пробега фононов в ограниченном теле. Напротив, при $l_{\text{эф}} \gg l_U$ размеры тела несущественны и справедлив закон (69.14).

Процесс теплопередачи вдоль стержня при $l_U \gg l_{\text{эф}}$ принимает характер пуазейлевского течения вязкого фононного газа. Его можно характеризовать эффективным коэффициентом теплопроводности, определяющим плотность потока энергии как $-\varkappa_{\text{эф}} \nabla T$, где ∇T — градиент температуры вдоль стержня. Этот поток можно оценить, подставив (71.10) в выражение $\varkappa_{\text{эф}} \sim C u l_{\text{эф}}$. При низких температурах теплоемкость решетки $C \sim T^3$. Длина же $l_N \sim u/\nu_N \sim T^{-5}$ (согласно (69.15)). Поэтому эффективная теплопроводность

$$\varkappa_{\text{эф}} \sim R^2 T^8 \quad \text{при} \quad \frac{R^2}{l_U} \ll l_N \ll R; \tag{71.11}$$

она убывает с понижением температуры.

Наконец, при еще более низких температурах, когда уже и длина $l_N \gg R$, столкновения фононов друг с другом становятся вообще несущественными (подобно кнудсеновской ситуации в сильно разреженных обычных газах). Роль длины пробега переходит тогда к размерам тела R и эффективная теплопроводность

$$\varkappa_{\text{эф}} \sim C u R \sim T^3 R \tag{71.12}$$

(*H.B.G. Casimir*, 1938).

[1]) Имея в виду лишь качественное исследование вопроса, мы полностью пренебрегаем здесь анизотропией кристалла. Следует иметь в виду, что даже при кубической симметрии вязкость описывается не скалярным коэффициентом вязкости, а тензором четвертого ранга, имеющим более одной независимой компоненты.

§ 72. Поглощение звука в диэлектрике. Длинные волны

Характер поглощения звука в диэлектрическом кристалле существенно зависит от соотношения между длиной волны и длиной свободного пробега l тепловых фононов. Если длина волны велика по сравнению с l ($fl \ll 1$, где f — значение волнового вектора звуковой волны), то применима макроскопическая теория, основанная на уравнениях теории упругости (см. VII, § 35). Согласно этой теории, коэффициент поглощения звука складывается из двух членов, определяющихся соответственно теплопроводностью и вязкостью среды. Оба члена пропорциональны квадрату частоты. Наша цель состоит здесь в определении их температурной зависимости.

Теплопроводностный вклад в коэффициент поглощения звука выражается, по порядку величины, формулой [1])

$$\gamma_{\text{тепл}} \sim \omega^2 \frac{\varkappa T \alpha^2 \rho}{u C^2}, \tag{72.1}$$

где α — коэффициент теплового расширения тела, C — теплоемкость единицы объема, ρ — плотность. При высоких температурах, $T \gg \Theta$, теплопроводность $\varkappa \propto 1/T$, а C и α от температуры не зависят (см. V, § 65, 67). Поэтому в этой области $\gamma_{\text{тепл}}$ не зависит от температуры. При низких же температурах температурная зависимость $\gamma_{\text{тепл}}$ в основном определяется (в идеальной решетке) экспоненциально возрастающей, при уменьшении T, теплопроводностью.

Обратимся к определению вязкостной части коэффициента поглощения звука (*А.И. Ахиезер*, 1938).

Производя макроскопическую деформацию кристаллической решетки, внешнее звуковое поле меняет закон дисперсии фононов. Длина волны тепловых фононов мала по сравнению с длиной волны звука; поэтому по отношению к тепловому фонону деформацию можно считать однородной, т. е. считать фонон находящимся в решетке, по-прежнему регулярной, но с несколько измененными периодами. В первом приближении по малой деформации частота $\omega(\mathbf{k})$ фонона в такой решетке связана с его частотой $\omega^{(0)}(\mathbf{k})$ в недеформированной решетке формулой вида

$$\omega(\mathbf{k}) = \omega^{(0)}(\mathbf{k})(1 + \lambda_{\alpha\beta} U_{\alpha\beta}), \tag{72.2}$$

где

$$U_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial U_\beta}{\partial x_\alpha}\right)$$

[1]) Мы пишем, для определенности, коэффициент поглощения на единице пути. Частотная и температурная зависимости остаются теми же и для коэффициента поглощения в единицу времени, поскольку оба определения отличаются лишь постоянным множителем — скоростью звука.

— тензор деформации ($\mathbf{U}$ — вектор смещения). Характеризующий кристалл тензор $\lambda_{\alpha\beta}$ зависит, вообще говоря, от $\mathbf{k}$; для длинноволновых акустических фононов с линейным законом дисперсии он не зависит, однако, от абсолютной величины $\mathbf{k}$.

В скобках в (72.2) должен был бы стоять еще и член вида $\boldsymbol{\lambda}\operatorname{rot}\mathbf{U}$, выражающий собой тривиальное обстоятельство: если деформация приводит к повороту элемента объема решетки ($\operatorname{rot}\mathbf{U} \neq 0$), то меняется направление осей (обратной решетки), относительно которых должен определяться квазиимпульс фонона в законе дисперсии; член $\boldsymbol{\lambda}\operatorname{rot}\mathbf{U}$ выражал бы соответствующий пересчет $\mathbf{k}$. Мы не пишем этот члена в (72.2), так как заранее очевидно, что он не может отразиться на интересующей нас диссипации энергии в звуковой волне: реальный физический эффект — диссипация — не может зависеть от вектора $\operatorname{rot}\mathbf{U}$, отличного от нуля уже для простого поворота тела как целого.

Изменение функции распределения фононов, вызванное деформацией решетки, определяется кинетическим уравнением

$$\frac{\partial N}{\partial \omega}\dot{\omega} + \frac{\partial N}{\partial T}\dot{T} = \operatorname{St} N, \tag{72.3}$$

где $\operatorname{St} N$ — интеграл фонон-фононных столкновений (67.6), а $\dot{T}$ — скорость изменения температуры в данной точке кристалла, неизбежно связанная с деформацией. Обычным образом, линеаризуя это уравнение и введя функцию χ, согласно определению (67.15), сведем его к виду

$$\omega\frac{\partial N_0}{\partial \omega}\left(\lambda_{\alpha\beta}\dot{U}_{\alpha\beta} - \frac{\dot{T}}{T}\right) = I(\chi), \tag{72.4}$$

где $I(\chi)$ — линеаризованный интеграл столкновений (67.17). В левой части производная $\dot{\omega}$ выражена с помощью (72.2); индекс (0) у невозмущенной частоты здесь и ниже опускаем.

Производную $\dot{T}$ можно в принципе выразить с помощью того же тензора $\lambda_{\alpha\beta}$. После умножения обеих частей уравнения (72.4) на ω, интегрирования по $\mathbf{k}$-пространству и суммирования по всем ветвям спектра фононов правая часть уравнения обращается в нуль — в силу сохранения энергии при столкновениях. Левая же часть уравнения дает

$$\frac{\dot{T}}{T} = \overline{\lambda}_{\alpha\beta}\dot{U}_{\alpha\beta}, \tag{72.5}$$

где $\overline{\lambda}_{\alpha\beta}$ — усредненный по $\omega^2\partial N_0/\partial\omega$ тензор $\lambda_{\alpha\beta}$. В обоих предельных случаях — высоких и низких температур — $\overline{\lambda}_{\alpha\beta}$ не зависит от температуры. Действительно, при $T \gg \Theta$ в усреднении существенны фононы с независящим от температуры квазиимпульсом $k \sim k_{\max} \sim 1/d$. При $T \ll \Theta$ существенны длинноволно-

вые акустические фононы, для которых $\lambda_{\alpha\beta}$ не зависит от k, и потому усреднение тоже не вносит зависимости от температуры.

Обозначив $\lambda_{\alpha\beta} - \overline{\lambda}_{\alpha\beta} = \widetilde{\lambda}_{\alpha\beta}$, запишем кинетическое уравнение в виде

$$\omega \frac{\partial N_0}{\partial \omega} \widetilde{\lambda}_{\alpha\beta} \dot{U}_{\alpha\beta} = I(\chi). \tag{72.6}$$

Далее, выведем формулу, определяющую диссипацию энергии в неравновесном фононном газе. Для этого исходим из выражения энтропии единицы объема бозе-газа

$$S = \sum_g \int \{(N+1)\ln(N+1) - N\ln N\} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tag{72.7}$$

(см. V, § 55). Продифференцировав это выражение по времени, находим

$$\dot{S} = \sum_g \int \dot{N} \ln \frac{N+1}{N} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}. \tag{72.8}$$

Заменив здесь $\dot{N}$ интегралом $\mathrm{St}\, N$ (ср. § 4) и произведя определенные переобозначения переменных $\mathbf{k}$, $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ в двух членах выражения (67.6), приведем $\dot{S}$ к виду

$$\dot{S} = \frac{1}{2} \sum_{g_1 g_2 g_3} \int w(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3; \mathbf{k}_1) \delta(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3) \ln \frac{(N_1+1)N_2N_3}{N_1(N_2+1)(N_3+1)} \times$$
$$\times [(N_1+1)N_2N_3 - N_1(N_2+1)(N_3+1)] \frac{d^3k_1\, d^3k_2}{(2\pi)^6}.$$

Умножив это выражение на T, получим диссипативную функцию — энергию, диссипируемую в единицу времени в единице объема. Подставив сюда $N = N_0 + \delta N$ (с δN, представленным в виде (67.15)) и ограничиваясь первыми, квадратичными, членами разложения по δN, получим

$$T\dot{S} = \frac{1}{2T} \sum_{g_1 g_2 g_3} \int w(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3; \mathbf{k}_1) \delta(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3) \times$$
$$\times (N_{01}+1) N_{02} N_{03} (\chi_1 - \chi_2 - \chi_3)^2 \frac{d^3k_1\, d^3k_2}{(2\pi)^6}. \tag{72.9}$$

Написанных формул достаточно для определения температурной зависимости коэффициента поглощения звука. Рассмотрим сначала область высоких температур.

В этом случае интеграл столкновений $I(\chi)$ содержит температуру в виде множителя T^2 (см. начало § 68). В левой же части кинетического уравнения (72.6) имеем $\omega \partial N_0 / \partial \omega \approx -T/\omega$, причем

для основной массы фононов частота $\omega \sim \Theta$ не зависит от температуры. Таким образом, найдем, что для этих частот

$$\chi \sim \frac{1}{T}\dot{\lambda}_{\alpha\beta}U_{\alpha\beta}.$$

Из выражения (72.9), в котором надо положить $N_0 \approx T/\omega \gg 1$, найдем теперь, что диссипативная функция не зависит от температуры. То же самое относится и к коэффициенту поглощения, получающемуся делением диссипативной функции на независящую от температуры величину — плотность потока энергии в звуковой волне. Таким образом, при $T \gg \Theta$ вязкостная, как и теплопроводная части коэффициента поглощения звука не зависят от температуры.

Для низких температур необходимо прежде всего подчеркнуть принципиальное отличие от задачи о теплопроводности: конечное значение коэффициента поглощения звука получается уже в пренебрежении процессами переброса (частота которых при низких температурах мала). Напомним, что в случае теплопроводности отсутствие решения у кинетического уравнения без учета процессов переброса проявлялось в противоречии, возникающем при умножении этого уравнения на $\mathbf{k}$ и интегрировании по всему фононному спектру: правая часть уравнения обращается в нуль, между тем как левая часть заведомо отлична от нуля (ср. (69.6)). Для уравнения же (72.6) такого противоречия не возникает: поскольку его левая часть — четная функция $\mathbf{k}$, то после умножения на $\mathbf{k}$ она становится нечетной функцией и интегрирование по d^3k обращает ее в нуль. При этом подразумевается, что обращается в нуль также и интеграл от члена с оператором процессов переброса — интеграл от $\mathbf{k}I_U(\chi)$. Поскольку это не происходит автоматически в силу какого-либо закона сохранения, то тем самым налагается определенное условие на решение кинетического уравнения — функция $\chi(\mathbf{k})$ должна быть четной по $\mathbf{k}$ (тогда $\mathbf{k}I_U(\chi)$ — нечетная функция; легко видеть, что оператор I не меняет четности функции χ). Этим требованием устраняется произвол, связанный с существованием (в отсутствие процессов переброса) нечетного по $\mathbf{k}$ «паразитного» решения вида $\chi = \mathbf{k}\delta\mathbf{V}$, и обеспечивается правильный предельный переход к отсутствию этих процессов.

При $T \ll \Theta$ основную роль в интеграле столкновений (и в диссипативной функции) играют фононы с энергией $\omega \sim T$. Это — длинноволновые фононы акустических ветвей спектра; их частоты линейно зависят от $\mathbf{k}$, а потому их $k \sim T/u$. Согласно (66.14), для столкновений таких фононов в интеграле (67.17) функция $w \propto kk_1k_2$. Функция распределения N_0 зависит только от отношения ω/T, так что при $\omega \sim T$ имеем $N_0 \sim 1$. Интегрирование производится по $d^3k_1 = k_1^2\,dk_1\,do_1$, причем по k_1 — по

области $\sim T$. Каждый множитель k, k_1, k_2 вносит, следовательно, в интеграл по множителю T, а δ-функция — множитель $1/T$. Таким образом, найдем, что весь интеграл в смысле своей зависимости от температуры оценивается как χT^4. Левая же часть кинетического уравнения (72.6) при $\omega \sim T$ от температуры не зависит. Отсюда находим, что для $\omega \sim T$

$$\chi \backsim T^{-4}\widetilde{\lambda}_{\alpha\beta}\dot{U}_{\alpha\beta}.$$

После этого аналогичная оценка интеграла (72.9) приводит к результату, что диссипативная функция, а с нею и вязкостная часть коэффициента поглощения звука обратно пропорциональны T. Таким образом,

$$\gamma_{\text{вязк}} \backsim \frac{\omega^2}{T} \quad \text{при} \quad T \ll \Theta. \tag{72.10}$$

Отсутствие необходимости в процессах переброса приводит к тому, что эта часть коэффициента поглощения возрастает с понижением температуры лишь по степенному, а не по экспоненциальному закону.

Использование в изложенном выводе диссипативной функции позволило избежать вопроса о выражении тензора вязких напряжений в кристалле через функцию распределения фононов; нетривиальность этого вопроса связана с тем, что речь идет о тензоре плотности потока истинного импульса, отнюдь не совпадающего с квазиимпульсом фононов. Покажем, каким образом это выражение можно в свою очередь получить из вида диссипативной функции.

Для этого снова исходим из интеграла (72.8), представив в нем на этот раз производную $\dot{N}$ в виде выражения, стоящего в левой части кинетического уравнения (72.6). Логарифм же в подынтегральном выражении переписываем в виде (см. (67.16))

$$-\ln\frac{N}{N+1} = -\ln\left[\frac{N_0}{N_0+1}\left(1+\frac{\chi}{T}\right)\right] \approx \frac{\omega-\chi}{T}.$$

В результате находим

$$T\dot{S} = \sum_g \int \omega\widetilde{\lambda}_{\alpha\beta}\delta N \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\cdot \dot{U}_{\alpha\beta}, \tag{72.11}$$

где $\delta N = -\chi\partial N_0/\partial\omega$ (член же с множителем ω вместо χ тождественно обращается в нуль в силу определения $\widetilde{\lambda}_{\alpha\beta}$). Вместо $\widetilde{\lambda}_{\alpha\beta} = \lambda_{\alpha\beta} - \overline{\lambda}_{\alpha\beta}$ здесь можно писать просто $\lambda_{\alpha\beta}$, так как интеграл с постоянным множителем $\overline{\lambda}_{\alpha\beta}$ обращается в нуль в силу налагаемого на δN дополнительного условия (67.14).

С другой стороны, диссипативная функция (отнесенная к единице объема) выражается через тензор вязких напряжений $\sigma'_{\alpha\beta}$ как $-\sigma'_{\alpha\beta}\dot{U}_{\alpha\beta}$ (ср. VII, § 34). Сравнение с (72.11) приводит, таким образом, к следующему выражению для тензора вязких напряжений:

$$\sigma'_{\alpha\beta} = \sum_g \int \omega\lambda_{\alpha\beta}\delta N \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tag{72.12}$$

(*В.Л. Гуревич*).

§ 73. Поглощение звука в диэлектрике. Короткие волны

В обратном случае коротких длин волн, $fl \gg 1$, процесс затухания звуковой волны можно рассматривать как результат поглощения одиночных квантов звука при их столкновениях с тепловыми фононами (*Л.Д. Ландау*, *Ю.Б. Румер*, 1937). Допустимость такого подхода требует, чтобы энергия и импульс тепловых фононов были определены достаточно точно: при изменении в результате поглощения звукового кванта они должны попасть в область вне квантовой неопределенности, связанной с конечностью длины пробега; это условие обеспечивается неравенством $fl \gg 1$. Фактически такая ситуация может осуществляться лишь при низких температурах, когда длина пробега становится достаточно большой.

В первом приближении, т. е. при учете процессов с участием наименьшего числа фононов, речь идет о трехфононных процессах:

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{f} = \mathbf{k}_2, \quad \omega_1 + \omega = \omega_2, \tag{73.1}$$

где ω, $\mathbf{f}$ — энергия и квазиимпульс звукового кванта, а ω_1, $\mathbf{k}_1$ и ω_2, $\mathbf{k}_2$ относятся к тепловым фононам. Энергии и квазиимпульсы тепловых фононов $\omega_1, \omega_2 \sim T$; $k_1, k_2 \sim T/u$. Мы будем предполагать в дальнейшем, что

$$\hbar\omega \ll T. \tag{73.2}$$

Тогда ω_1, ω_2 и k_1, k_2 будут велики по сравнению с ω и f.

Как мы видели в § 68, законы сохранения (73.1) могут быть выполнены лишь, если скорость теплового фонона превышает скорость поглощаемых (или испускаемых) звуковых квантов. Не вдаваясь в обсуждение различных возможных случаев, будем считать, что звуковая волна не является «продольной» (т. е. не отвечает акустической ветви фононного спектра с наибольшей скоростью), так что указанное условие может быть выполнено. Ввиду малости ω и f, начальный и конечный тепловые фононы относятся, вообще говоря, к одной и той же акустической ветви фононного спектра; при низких температурах они являются длинноволновыми.

Вероятности испускания или поглощения фонона в трехфононном процессе даются формулами (66.9) или (66.11). При этом числа заполнения $N_1 \equiv N(\mathbf{k}_1)$ и $N_2 \equiv N(\mathbf{k}_2)$ даются равновесной функцией распределения Планка (67.9). Макроскопическая же звуковая волна соответствует очень большому числу заполнения заданного фононного состояния $\mathbf{f}$; по сравнению с этим числом единицей можно, конечно, пренебречь. Опустив множитель $N(\mathbf{f})$, мы получим вероятность, отнесенную к одному звуковому кванту.

Таким образом, вероятность поглощения звукового кванта при его столкновениях с тепловыми фононами со всеми возможными значениями $\mathbf{k}_1$ дается интегралом

$$\int Ak_1k_2fN_1(N_2+1)\delta(\omega_1+\omega-\omega_2)\frac{d^3k_1}{(2\pi)^3}. \tag{73.3}$$

Вероятность же обратного процесса испускания фонона f всевозможными фононами $\mathbf{k}_2$ есть

$$\int Ak_1k_2fN_2(N_1+1)\delta(\omega_1+\omega-\omega_2)\frac{d^3k_1}{(2\pi)^3}. \tag{73.4}$$

Фигурирующая в формулах (66.9), (66.11) функция w написана, согласно (66.14), в виде Ak_1k_2f с учетом того, что все три фонона — длинноволновые (A — функция направлений всех фононов).

Поглощение фононов (относительная скорость убывания их числа) определяется разностью этих двух вероятностей. Поскольку частота ω мала по сравнению с ω_1 и ω_2, то

$$N_1(N_2+1)-(N_1+1)N_2 = N_1 - N_2 = -\frac{\partial N_1}{\partial \omega_1}\omega.$$

Таким образом, коэффициент поглощения

$$\gamma \propto \omega f \int Ak_1k_2\left|\frac{\partial N_1}{\partial \omega_1}\right|\delta(\omega_1+\omega-\omega_2)\,d^3k_1. \tag{73.5}$$

Нас интересует зависимость этой величины от частоты звука ω и от температуры кристалла T. Она всецело определяется тем фактом, что все фигурирующие в (73.5) частоты — линейные функции волновых векторов. Для упрощения рассуждений достаточно считать, что $\omega = Uf$, $\omega_1 = uk_1$, $\omega_2 = uk_2$, где U и u — независящие от направления скорости.

Ввиду малости f можно положить $k_1 \approx k_2$. По той же причине

$$\omega_2 - \omega_1 \approx \frac{\partial \omega_1}{\partial \mathbf{k}_1}\mathbf{f} = uf\cos\theta = \omega\frac{u}{U}\cos\theta,$$

где θ — угол между $\mathbf{f}$ и $\mathbf{k}$. Тогда имеем

$$\delta(\omega_1 + \omega - \omega_2) = \frac{1}{\omega}\delta\left(1 - \frac{u}{U}\cos\theta\right)$$

и интеграл (73.5) принимает вид

$$\gamma \backsim \omega \int A k_1^2 \left|\frac{\partial N_1}{\partial \omega}\right| \delta\left(1 - \frac{u}{U}\cos\theta\right) k_1^2\, dk_1\, d\cos\theta, \tag{73.6}$$

или, после устранения δ-функции,

$$\gamma \backsim \omega \int k_1^4 \left|\frac{\partial N}{\partial k_1}\right| dk_1.$$

Поскольку N_1 — функция только от отношения $\omega_1/T = uk_1/T$ (ввиду быстрой сходимости интегрирование по k_1 можно распространить до ∞), оставшийся интеграл пропорционален T^4. Таким образом,

$$\gamma \backsim \omega T^4. \tag{73.7}$$

Отметим, что коэффициент поглощения звука оказывается здесь пропорциональным первой степени частоты.

Отметим также, что при принятом выше условии (73.2) рассмотренный механизм затухания звука вполне аналогичен затуханию Ландау в плазме. Роль «резонансных электронов» в данном случае играют фононы, движущиеся в фазе со звуковой волной. Естественно поэтому сходство между (73.6) и формулой (30.1) затухания Ландау.

ГЛАВА VIII

КВАНТОВЫЕ ЖИДКОСТИ

§ 74. Кинетическое уравнение для квазичастиц в ферми-жидкости

Кинетическое уравнение для квазичастиц в нормальной ферми-жидкости уже рассматривалось в другом томе этого курса в связи с вопросом о распространении колебаний в этой жидкости (см. IX, § 4, 5); для этих вопросов интеграл столкновений в уравнении был несуществен. Продолжим теперь изучение кинетического уравнения, имея в виду его применение к диссипативным процессам, связанным именно со столкновениями.

Квазичастицы в ферми-жидкости обладают спином 1/2. Соответственно этому, в общем случае их функция распределения является матрицей по отношению к спиновым переменным. Но в широкой категории задач достаточно рассматривать распределения, не зависящие от спиновых переменных. В таких случаях функция распределения сводится к скалярной функции $n(\mathbf{r}, \mathbf{p})$, нормированной так, что $n\, d^3p/(2\pi\hbar)^3$ есть число квазичастиц (в единице объема) с импульсами в интервале d^3p и с заданной проекцией спина; это и будет подразумеваться ниже в § 74–76.

Характерное свойство спектра ферми-жидкости состоит в том, что энергия квазичастиц ε является функционалом от функции распределения. Когда последняя меняется на малую величину,

$$n(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = n_0(\mathbf{p}) + \delta n(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \tag{74.1}$$

(n_0 — равновесное распределение), энергия меняется на

$$\delta\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \int f(\mathbf{p}, \mathbf{p}')\delta n(\mathbf{r}, \mathbf{p}')\frac{d^3p'}{(2\pi\hbar)^3}, \tag{74.2}$$

где $f(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ — функция взаимодействия квазичастиц. Таким образом, распределению (74.1) отвечает энергия квазичастиц

$$\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \varepsilon_0(\mathbf{p}) + \delta\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p}), \tag{74.3}$$

где $\varepsilon(\mathbf{p})$ — энергия, отвечающая равновесному распределению.

Кинетическое уравнение гласит:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}}\frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{r}}\frac{\partial n}{\partial \mathbf{p}} = \mathrm{St}\, n. \tag{74.4}$$

Его характерная особенность состоит в том, что в неоднородной жидкости левая часть уравнения содержит член с производной $\partial\varepsilon/\partial\mathbf{r}$ даже в отсутствие внешнего поля — за счет зависимости ε от координат, вносимой выражением (74.3).

Интеграл столкновений в правой части уравнения (74.4) имеет вид

$$\operatorname{St} n = \int w(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1; \mathbf{p}', \mathbf{p}'_1)[n' n'_1 (1-n)(1-n_1) - n n_1 (1-n')(1-n'_1)] \times \\ \times \delta(\varepsilon + \varepsilon_1 - \varepsilon' - \varepsilon'_1) \frac{d^3 p_1\, d^3 p'}{(2\pi\hbar)^6}, \qquad (74.5)$$

где n, n_1, n', n'_1 — функции импульсов $\mathbf{p}$, $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}'$, $\mathbf{p}'_1$ сталкивающихся квазичастиц. Закон сохранения импульса при столкновениях предполагается уже учтенным, так что $\mathbf{p} + \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}' + \mathbf{p}'_1$; интегрирование в (74.5) производится поэтому всего по двум (а не по трем) импульсам. Сохранение же энергии обеспечивается δ-функцией, выписанной в явном виде. Наконец, w — функция импульсов, определяющая вероятность столкновения. Первый и второй члены в фигурных скобках определяют соответственно числа квазичастиц, приходящих в заданное квантовое состояние и уходящих из него в результате столкновений. Эти члены отличаются от аналогичных членов в интеграле столкновений больцмановского газа множителями $(1-n)$, ... Появление этих множителей связано со статистикой Ферми, в силу которой столкновения могут привести квазичастицы лишь в еще не занятые состояния.

К столкновениям квазичастиц в ферми-жидкости борновское приближение, вообще говоря, неприменимо. Тем не менее вероятности прямого и обратного процессов рассеяния можно считать одинаковыми. Мы рассматриваем величины, уже усредненные по направлениям спинов квазичастиц. В этих условиях вероятность рассеяния оказывается зависящей только от начальных и конечных импульсов сталкивающихся квазичастиц. Это обстоятельство позволяет применить здесь те же соображения, которые были использованы в § 2 при выводе принципа детального равновесия в форме (2.8). При этом существенно, что в ферми-жидкости по-прежнему имеет место инвариантность относительно пространственной инверсии. Таким образом, приходим к равенству

$$w(\mathbf{p}', \mathbf{p}'_1; \mathbf{p}, \mathbf{p}_1) = w(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1; \mathbf{p}', \mathbf{p}'_1),$$

уже использованному в интеграле столкновений (74.5). Функция w зависит, вообще говоря, от чисел заполнения состояний и тем самым — от температуры. Но ввиду малости температуры (существенной для всей теории ферми-жидкости) под w в интегра-

ле столкновений следует понимать функцию, вычисленную для $T = 0$.

Как и следовало, интеграл (74.5) тождественно обращается в нуль при подстановке в качестве n равновесной функции распределения Ферми

$$n_0(\varepsilon) = \left[\exp\frac{\varepsilon-\mu}{T} + 1\right]^{-1}. \qquad (74.6)$$

Действительно, заметив, что

$$\frac{n_0}{1-n_0} = \exp\left(-\frac{\varepsilon-\mu}{T}\right),$$

сразу видим, что в силу закона сохранения энергии имеет место равенство

$$\frac{n_0 n_{01}}{(1-n_0)(1-n_{01})} = \frac{n_0' n_{01}'}{(1-n_0')(1-n_{01}')}. \qquad (74.7)$$

Выясним с помощью кинетического уравнения, каким образом выражаются, в терминах функции распределения, законы сохранения массы, энергии и импульса ферми-жидкости. Зависимость энергии квазичастиц от их распределения придает этому вопросу определенную специфику.

Проинтегрируем обе части уравнения (74.4) по $2d^3p/(2\pi\hbar)^3$ (множитель 2 учитывает два возможных направления спина). В силу сохранения числа квазичастиц при столкновениях, интеграл от $\mathrm{St}\, n$ обращается в нуль. В левой же части уравнения интеграл от члена $-(\partial n/\partial \mathbf{p})(\partial\varepsilon/\partial\mathbf{r})$ преобразуем по частям, в результате чего уравнение принимает вид

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \operatorname{div}\mathbf{i} = 0,$$

где N — плотность числа квазичастиц,

$$\mathbf{i} = \langle \mathbf{v} \rangle, \qquad (74.8)$$

а $\mathbf{v} = \partial\varepsilon/\partial\mathbf{p}$ — скорость квазичастиц [1]). Это — уравнение непрерывности для квазичастиц, так что $\mathbf{i}$ — плотность их потока. В силу совпадения числа квазичастиц в ферми-жидкости с числом истинных частиц, $\mathbf{i}$ есть в то же время плотность потока истинных частиц, так что $\mathbf{i} = \langle \mathbf{p}/m \rangle$.

Произведем теперь с уравнением (74.4) те же операции, предварительно умножив обе его части на $\mathbf{p}$. Интеграл от $\mathbf{p}\,\mathrm{St}\, n$ обра-

[1]) Здесь и ниже в этом параграфе символ $\langle\ldots\rangle$ означает интегрирование по распределению n:

$$\langle\ldots\rangle = \int \ldots n \frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3}.$$

щается в нуль в силу сохранения суммарного импульса квазичастиц при столкновениях. Левая же часть, написанная в векторных компонентах, дает

$$\frac{\partial\langle p_\alpha\rangle}{\partial t}+\int p_\alpha\left(\frac{\partial n}{\partial x_\beta}\frac{\partial\varepsilon}{\partial p_\beta}-\frac{\partial n}{\partial p_\beta}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_\beta}\right)\frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Подынтегральное выражение во втором члене переписываем в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(p_\alpha\frac{\partial\varepsilon}{\partial p_\beta}n\right)+n\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_\alpha}-\frac{\partial}{\partial p_\beta}\left(p_\alpha\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_\beta}n\right).$$

Интегрирование обращает третий член в нуль, а второй дает производную $\partial E/\partial x_\alpha$ от плотности энергии жидкости E; напомним, что энергия квазичастиц в ферми-жидкости определяется именно по вариации внутренней энергии:

$$\delta E=\int\varepsilon\delta n\frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3}. \tag{74.9}$$

Таким образом, получаем уравнение сохранения импульса в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle p_\alpha\rangle+\frac{\partial\Pi_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}=0,$$

где тензор плотности потока импульса

$$\Pi_{\alpha\beta}=\langle p_\alpha v_\beta\rangle+\delta_{\alpha\beta}(\langle\varepsilon\rangle-E). \tag{74.10}$$

Наконец, умножив обе части уравнения (74.4) на ε и проинтегрировав, аналогичным образом получим уравнение сохранения энергии,

$$\frac{\partial E}{\partial t}+\operatorname{div}\mathbf{q}=0,$$

где плотность потока энергии

$$\mathbf{q}=\langle\varepsilon\mathbf{v}\rangle. \tag{74.11}$$

В равновесии все потоки $\mathbf{i}$, $\mathbf{q}$, $\Pi_{\alpha\beta}$ обращаются в нуль. Получим для них выражения, линейные по малой поправке δn в возмущенном распределении (74.1).

Равновесная функция n_0 зависит только от энергии квазичастицы, причем сама эта энергия отвечает именно равновесному распределению. Отметив это обстоятельство индексом нуль у ε, запишем определение (74.1) в более точном виде:

$$n(\mathbf{r},\mathbf{p})=n_0(\varepsilon_0)+\delta n(\mathbf{r},\mathbf{p}). \tag{74.12}$$

Если же выразить n_0 в функции реальной энергии квазичастицы ε, то надо написать

$$n_0(\varepsilon_0) = n_0(\varepsilon) - \delta\varepsilon \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon}$$

и тогда возмущенная функция распределения представится в виде

$$n(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = n_0(\varepsilon) + \delta\widetilde{n}(\mathbf{r}, \mathbf{p}), \tag{74.13}$$

$$d\widetilde{n} = \delta n - \delta\varepsilon \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} = \delta n - \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \int f(\mathbf{p}, \mathbf{p}')\delta n(\mathbf{r}, \mathbf{p}') \frac{d^3p'}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Поскольку в интегралах (74.8)–(74.11) ε и $\mathbf{v} = \partial\varepsilon/\partial\mathbf{p}$ — уже реальные энергия и скорость квазичастицы, то достаточно подставить в них n в виде (74.13) и мы сразу же получим

$$\mathbf{i} = \int \mathbf{v}\delta\widetilde{n} \frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3}, \quad \mathbf{q} = \int \varepsilon\mathbf{v}\delta\widetilde{n} \frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3}, \quad \Pi_{\alpha\beta} = \int p_\alpha v_\beta \delta\widetilde{n} \frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \tag{74.14}$$

(в последнем выражении использовано также (74.9)). Теперь, когда выделены члены первого порядка по $\delta\widetilde{n}$, в интегралах (74.14) уже можно, конечно, понимать ε как $\varepsilon_0(\mathbf{p})$.

Подобно тому, как мы это уже неоднократно делали, представим δn в виде

$$\delta n = -\psi \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon}. \tag{74.15}$$

В данном случае выделение множителя $\partial n_0/\partial\varepsilon$ имеет особый смысл. Возмущение δn сконцентрировано в зоне размытости распределения Ферми. В той же зоне заметно отлична от нуля и производная $\partial n_0/\partial\varepsilon$; после выделения этого множителя остающаяся функция ψ будет уже медленно меняющейся. Наряду с (74.15) будем писать

$$\delta\widetilde{n} = -\varphi \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} = \frac{n_0(1-n_0)}{T}\varphi, \tag{74.16}$$

где

$$\varphi = \psi - \int f(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \frac{\partial n_0(\varepsilon')}{\partial \varepsilon'} \psi(\mathbf{r}, \mathbf{p}') \frac{d^3p'}{(2\pi\hbar)^3}. \tag{74.17}$$

В нулевом приближении по малому отношению T/ε_F функцию $n_0(\varepsilon)$ можно заменить ступенчатой функцией, обрывающейся на граничной энергии ε_F. Тогда

$$\frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} = -\delta(\varepsilon - \varepsilon_F) \tag{74.18}$$

и интегрирование по d^3p сводится к интегрированию по ферми-поверхности $\varepsilon = \varepsilon_F$. Элемент объема между двумя бесконечно

близкими изоэнергетическими поверхностями в импульсном пространстве равен

$$\frac{dS\,d\varepsilon}{|\partial\varepsilon/\partial\mathbf{p}|}, \tag{74.19}$$

где dS — элемент площади изоэнергетической поверхности. Поэтому интегрирование по d^3p преобразуется в интегрирование по ферми-поверхности формулой

$$\int \ldots \delta(\varepsilon-\varepsilon_F)\,d^3p = \int \ldots \frac{dS_F}{v_F}, \tag{74.20}$$

где v_F — значение скорости на ферми-поверхности. В (74.20) еще не использована сферичность поверхности; на сфере $dS_F = p_F^2\,do$ с постоянным p_F.

После такого преобразования определение (74.17) принимает вид

$$\varphi(\mathbf{r},\mathbf{p}) = \psi(\mathbf{r},\mathbf{p}) + \int f(\mathbf{p},\mathbf{p}'_F)\psi(\mathbf{r},\mathbf{p}'_F)\frac{dS'_F}{v'_F(2\pi\hbar)^3}, \tag{74.21}$$

где $\mathbf{p}_F$ обозначает импульс (с переменным направлением!) на ферми-поверхности. Выражение потока частиц:

$$\mathbf{i} = \int \frac{\mathbf{v}_F}{v_F}\varphi\frac{2dS_F}{(2\pi\hbar)^3} \tag{74.22}$$

и аналогично для потока импульса. В потоке же энергии приближение (74.18) заведомо недостаточно: оно свело бы $\mathbf{q}$ просто к конвективному переносу энергии $\varepsilon_F\mathbf{i}$ — первому члену в выражении

$$\mathbf{q} = \varepsilon_F\mathbf{i} - \int \mathbf{v}(\varepsilon-\varepsilon_F)\frac{\partial n_0}{\partial\varepsilon}\varphi\frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3}. \tag{74.23}$$

Для проведения линеаризации интеграла столкновений надо заметить, что он обращается в нуль равновесным распределением $n_0(\varepsilon)$ как функцией реальной энергии ε [1]). Поэтому линеаризация осуществляется подстановкой n в виде (74.13), (74.16). Вычисления производятся подобно тому, как это было сделано при переходе от (67.6) к (67.17). Пишем выражение в квадратных скобках в (74.5) в виде

$$(1-n)(1-n_1)(1-n')(1-n'_1)\left[\frac{n'}{1-n'}\frac{n'_1}{1-n'_1} - \frac{n}{1-n}\frac{n_1}{1-n_1}\right]$$

и замечаем, что

$$\delta\frac{n}{1-n} = \frac{n_0}{1-n_0}\frac{\varphi}{T}.$$

[1]) Подчеркнем общий характер этого замечания. Оно относится к любому интегралу столкновений с участием фермиевских квазичастиц, а не только к интегралу (74.5).

В результате получим

$$\operatorname{St} n \equiv I(\varphi) = \frac{1}{T} \int w n_0 n_{01} (1 - n_0')(1 - n_{01}')(\varphi' + \varphi_1' - \varphi - \varphi_1) \times \\ \times \delta(\varepsilon' + \varepsilon_1' - \varepsilon - \varepsilon_1) \frac{d^3 p_1\, d^3 p'}{(2\pi\hbar)^6}. \quad (74.24)$$

Обратим внимание на то, что искомое (при решении кинетического уравнения) возмущение функции распределения входит в интеграл столкновений в виде того же $\delta\tilde{n}$, которое фигурирует и в выражениях потоков (74.14). Если в левой части кинетического уравнения (74.4) членов с δn вообще не надо учитывать (как в задачах о вычислении коэффициентов теплопроводности и вязкости — см. следующий параграф), то функция взаимодействия квазичастиц $f(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ не фигурирует явным образом в системе получающихся уравнений: уравнения с f-функцией для неизвестного $\delta\tilde{n}$ такие же, какими они были бы при $f \equiv 0$ для неизвестного δn. Другими словами, в таких задачах «ферми-жидкостные» эффекты не проявляются, и задачи формально тождественны с таковыми для ферми-газа.

Покажем, что такая же ситуация имеет место и в определенной категории случаев, когда в левой части кинетического уравнения должны быть сохранены члены первого порядка по δn. При независящей от координат функции n_0 эти члены таковы:

$$\frac{\partial\, \delta n}{\partial t} + \frac{\partial\, \delta n}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial n_0}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial \delta\varepsilon}{\partial \mathbf{r}} = \\ = \frac{\partial\, \delta n}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial\, \delta n}{\partial \mathbf{r}} - \mathbf{v} \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \int f(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \delta n(\mathbf{r}, \mathbf{p}') \frac{d^3 p'}{(2\pi\hbar)^3}.$$

С $\delta\tilde{n}$ из (74.13) они сводятся к виду

$$\frac{\partial\, \delta n}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial\, \delta\tilde{n}}{\partial \mathbf{r}}. \quad (74.25)$$

Если производной по времени можно пренебречь, то и здесь будет фигурировать только $\delta\tilde{n}$.

Эти утверждения сохраняют силу не только для электрически нейтральной ферми-жидкости, о которой здесь идет речь, но и для электронной жидкости в металлах, которая будет рассматриваться в следующей главе. Имея в виду этот объект и чтобы не возвращаться вновь к этому вопросу, сделаем уже здесь несколько дополнительных замечаний.

Если квазичастицы несут электрический заряд $-e$, то в присутствии электромагнитного поля в производной $\dot{\mathbf{p}} = -\partial\varepsilon/\partial\mathbf{r}$ появляется дополнительный член — действующая на заряд ло-

ренцева сила. Соответственно в левой части кинетического уравнения появляется член

$$-e\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}\left[\frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{p}}\mathbf{B}\right]\right)\frac{\partial n}{\partial\mathbf{p}}.$$

Электрическое поле обычно предполагается слабым и в члене $-e\mathbf{E}\partial n/\partial\mathbf{p}$ достаточно положить $n = n_0$. Член же с магнитным полем обращается тождественно в нуль для функции $n_0(\varepsilon)$, зависящей только от ε. Но если поле сильное, то может оказаться необходимым сохранение также и членов первого порядка по δn. Эти члены таковы:

$$-\frac{e}{c}[\mathbf{vB}]\frac{\partial\,\delta n}{\partial\mathbf{p}}-\frac{e}{c}\left[\frac{\partial\,\delta\varepsilon}{\partial\mathbf{p}}\mathbf{B}\right]\frac{\partial n_0}{\partial\mathbf{p}}=-\frac{e}{c}[\mathbf{vB}]\left\{\frac{\partial\,\delta n}{\partial\mathbf{p}}-\frac{\partial n_0}{\partial\varepsilon}\frac{\partial\,\delta\varepsilon}{\partial\mathbf{p}}\right\}$$

(где $\mathbf{v} = \partial\varepsilon_0/\partial\mathbf{p}$). В фигурной скобке можно внести множитель $\partial n_0/\partial\varepsilon$, зависящий только от ε, под знак $\partial/\partial\mathbf{p}$ (его производная направлена вдоль $\mathbf{v}$ и дает нуль при умножении на $[\mathbf{vB}]$). В результате эти члены сведутся к виду

$$-\frac{e}{c}[\mathbf{vB}]\frac{\partial\,\delta\widetilde{n}}{\partial\mathbf{p}}, \qquad (74.26)$$

снова содержащему только $\delta\widetilde{n}$.

§ 75. Теплопроводность и вязкость ферми-жидкости

Температурные зависимости коэффициентов вязкости и теплопроводности ферми-жидкости могут быть установлены уже из простых качественных соображений (*И.Я. Померанчук*, 1950).

Согласно элементарной газокинетической формуле (8.11), коэффициент вязкости $\eta \sim mN\overline{v}l$, где m — масса частиц, N — плотность их числа, $\overline{v}$ — средняя тепловая скорость, l — длина свободного пробега. В данном случае роль частиц играют квазичастицы, но, поскольку числа тех и других совпадают, произведение mN есть независящая от температуры величина — плотность жидкости[1]). Скорость $\overline{v} \sim v_F$, где v_F — независящая от температуры скорость на ферми-поверхности. Длина пробега $l \sim v_F\tau$, где τ — время между столкновениями квазичастиц. Последнее меняется с температурой как T^{-2} (см. IX, § 1), так что и вязкость

$$\eta \propto T^{-2}. \qquad (75.1)$$

[1]) Поскольку мы ищем предельный закон зависимости $\eta(T)$ при низких температурах, то для всех величин, стремящихся при $T \to 0$ к конечному пределу, подразумевается, конечно, именно этот предел.

Коэффициент теплопроводности оценивается по формуле (7.10): $\varkappa \sim cN\overline{v}l$, где c — теплоемкость (отнесенная к одной частице). Для ферми-жидкости $c \propto T$, и потому

$$\varkappa \propto T^{-1}. \tag{75.2}$$

Для точного определения η и $\varkappa$ надо обратиться к кинетическому уравнению. Наметим, на примере теплопроводности, ход соответствующих вычислений.

Преобразование левой части кинетического уравнения (74.4) производится аналогично тому, как это было сделано в § 7 для задачи о теплопроводности классического газа.

Пусть вдоль жидкости существует градиент температуры, причем жидкость макроскопически неподвижна. В силу последнего условия, давление постоянно вдоль жидкости, а распределение температуры стационарно. В левой части уравнения (74.4) в качестве n и ε подставляем их локально-равновесные выражения с меняющейся вдоль жидкости температурой. Тогда $\partial\varepsilon/\partial\mathbf{r} = 0$ и остается лишь член $\mathbf{v}\partial n_0/\partial\mathbf{r}$ (индекс 0 у ε и $\mathbf{v}$ опускаем). Функция n содержит лишь комбинацию $(\varepsilon - \mu)/T$, а поскольку мы ищем лишь предельные (при $T \to 0$) законы, то химический потенциал $\mu(T)$ можно положить равным его значению при $T = 0$ (совпадающему с граничной энергией ε_F). Тогда

$$\mathbf{v}\frac{\partial n_0}{\partial\mathbf{r}} = \frac{\partial n_0}{\partial T}(\mathbf{v}\nabla T) = \frac{n_0(1-n_0)}{T}\frac{\varepsilon-\mu}{T}\mathbf{v}\nabla T$$

и кинетическое уравнение принимает вид

$$n_0(1-n_0)\frac{\varepsilon-\mu}{T^2}\mathbf{v}\nabla T = I(\varphi) \tag{75.3}$$

с $I(\varphi)$ из (74.24). На решение этого уравнения должно быть наложено дополнительное условие, выражающее отсутствие макроскопического переноса массы:

$$\int \mathbf{v}\varphi\frac{\partial n_0}{\partial\varepsilon}\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} = 0. \tag{75.4}$$

В силу этого условия, в потоке энергии (74.23) остается лишь второй член.

Как уже отмечалось в предыдущем параграфе, система уравнений (75.3)–(75.5) не содержит явно функции взаимодействия квазичастиц, так что задача о теплопроводности ферми-жидкости (и то же самое относится к задаче о вязкости) по форме совпадает с такой же задачей для ферми-газа.

Определяющую роль во всех интегралах играет область размытости распределения Ферми, в которой $\varepsilon - \mu \sim T$, а импульсы

квазичастиц близки к радиусу ферми-сферы p_F; в этой области $\varepsilon - \mu = v_F(p - p_F)$. Во всех местах, где импульсы фигурируют не в виде разности $p - p_F$, можно положить $p = p_F$, а скорость можно положить везде равной v_F. В частности, это можно сделать в w, которая становится в результате функцией только от углов, определяющих относительную ориентацию векторов $\mathbf{p}$, $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}'$, $\mathbf{p}'_1$. При заданных $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}_1$ закон сохранения импульса фиксирует угол между векторами $\mathbf{p}'$ и $\mathbf{p}'_1 = \mathbf{p} + \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'$; интегрирование по этому углу устраняет δ-функцию в интеграле столкновений. После этого остаются интегрирования по абсолютным величинам p_1 и p' (помимо интегрирований по остальным угловым переменным). Интегрирование по ним заменяем интегрированием по $T^2\,du_1\,du'$, где $u = (\varepsilon - \mu)/T = v_F(p - p_F)/T$ — переменные, от которых зависят функции распределения n_0; ввиду быстрой сходимости эти интегрирования можно распространить от $-\infty$ до ∞. В результате найдем, что весь интеграл $I(\varphi)$ пропорционален T, а решение уравнения (75.3) будет иметь вид

$$\varphi = -T^{-2}g(u)\mathbf{v}\nabla T.$$

После подстановки этой функции в (74.23) и интегрирования по направлениям $\mathbf{v}$ тепловой поток примет вид $\mathbf{q} = -\varkappa\nabla T$, причем

$$\varkappa = \frac{8\pi v_F p_F^2}{3T}\int\limits_{-\infty}^{\infty} ug(u)\left|\frac{\partial n_0}{\partial u}\right| du.$$

Отсюда снова видно, что $\varkappa \propto T^{-1}$.

Указанные выше упрощения интеграла столкновений оказываются достаточными для того, чтобы точно решить кинетическое уравнение (и то же самое относится к задаче о вязкости). В результате для коэффициентов $\varkappa$ и η получаются формулы, выражающие их через параметры p_F и v_F и через определенным образом усредненную по направлениям функцию w [1]).

§ 76. Поглощение звука в ферми-жидкости [2])

Напомним (см. IX, § 4), что характер распространяющихся в ферми-жидкости волн существенно зависит от величины произведения $\omega\tau$, где τ — время свободного пробега.

При $\omega\tau \ll 1$ мы имеем дело с обычными гидродинамическими звуковыми волнами. Частотную и температурную зависимости коэффициента γ их поглощения (на единице пути) можно

---

[1]) См. *Brooker G.A.*, *Sykes J.* // Phys. Rev. Lett. 1968. V. 21. P. 179.

[2]) Результаты этого параграфа принадлежат *Л.Д. Ландау* (1957).

найти по известной формуле $\gamma \sim \omega^2\eta/(\rho u^3)$, где η — коэффициент вязкости, ρ — плотность жидкости, u — скорость звука (см. VI, § 77). Поскольку в ферми-жидкости $\eta \propto T^{-2}$, то

$$\gamma \propto \frac{\omega^2}{T^2}. \tag{76.1}$$

Более формальным образом этот результат можно получить, заметив, что поглощение описывается первым по малому параметру поправочным членом в законе дисперсии звука:

$$k = \frac{\omega}{u}(1 + i\alpha\omega\tau) \tag{76.2}$$

(α — постоянная). Мнимая (при вещественной частоте) часть этого выражения и дает γ; поскольку $\tau \propto T^{-2}$, мы возвращаемся к (76.1).

При $\omega\tau \sim 1$ поглощение становится очень сильным, так что распространение звуковых волн невозможно.

При $\omega\tau \gg 1$ снова становится возможным распространение слабо затухающих волн — так называемый *нулевой звук*. Его поглощение описывается поправочным членом в законе дисперсии — на этот раз по малому параметру $1/(i\omega\tau)$:

$$k = \frac{\omega}{u_0}\left(1 + \frac{i\alpha}{\omega\tau}\right) \tag{76.3}$$

(u_0 — скорость распространения нулевого звука). Коэффициент этого поглощения, следовательно, пропорционален частоте столкновений: $\gamma \propto 1/\tau$. Последняя в свою очередь пропорциональна квадрату ширины области размытости распределения квазичастиц. При $\hbar\omega \ll T$ эта ширина определяется температурой, так что $1/\tau \propto T^2$ и коэффициент поглощения

$$\gamma = aT^2, \qquad T \gg \hbar\omega \gg \frac{\hbar}{\tau}. \tag{76.4}$$

Если же $\hbar\omega \gg T$ (но в то же время $\hbar\omega \ll \varepsilon_F$ как обязательное условие применимости всей теории), то распределение размыто в области шириной $\sim \hbar\omega$. В этом случае поглощение нулевого звука

$$\gamma = b\omega^2, \qquad \hbar\omega \gg T. \tag{76.5}$$

К этому случаю относится, в частности, нулевой звук всех частот при $T = 0$. Ниже будет показано, что постоянные a и b в формулах (76.4), (76.5) связаны между собой.

Разница в характере поглощения обычного и нулевого звуков связана с различием их физической природы. В волне обычного звука в каждом малом (по сравнению с длиной волны) элементе объема распределение квазичастиц, в первом приближении, отвечает равновесию при заданных локальных температуре и скорости жидкости. В этом приближении диссипация отсутствует

и поглощение звука появляется лишь при учете влияния градиентов температуры и скорости на распределение квазичастиц. В волне же нулевого звука уже сами по себе колебания вызывают неравновесность функции распределения в каждом элементе объема и учет столкновений квазичастиц приводит к поглощению звука.

Согласно основным представлениям теории нормальной ферми-жидкости, квазичастицу в ней можно рассматривать, в известном смысле, как частицу, находящуюся в самосогласованном поле окружающих частиц. В волне нулевого звука это поле периодично во времени и в пространстве. Согласно общим правилам квантовой механики, столкновение двух квазичастиц в таком поле сопровождается изменением их суммарных энергий и импульса соответственно на $\hbar\omega$ и на $\hbar\mathbf{k}$; можно сказать, что при столкновении происходит испускание или поглощение «кванта нулевого звука» [1]. Суммарный эффект таких столкновений приводит к убыванию общего числа звуковых квантов; коэффициент поглощения звука пропорционален скорости этого убывания.

При таком подходе к вопросу коэффициент поглощения нулевого звука дается выражением вида

$$\gamma = \int W\{n_1 n_2(1-n_1')(1-n_2') - n_1' n_2'(1-n_1)(1-n_2)\} \times \\ \times \delta(\varepsilon_1' + \varepsilon_2' - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \hbar\omega)\delta(\mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2' - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \hbar\mathbf{k}) \times \\ \times \frac{d^3p_1\, d^3p_2\, d^3p_1'\, d^3p_2'}{(2\pi\hbar)^{12}}. \qquad (76.6)$$

В подынтегральном выражении выписаны в явном виде δ-функции, обеспечивающие выполнение законов сохранения энергии и импульса при столкновениях. Первый член в фигурных скобках отвечает столкновениям $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2 \to \mathbf{p}_1'$, $\mathbf{p}_2'$ с поглощением кванта, а второй член — столкновениям $\mathbf{p}_1'$, $\mathbf{p}_2' \to \mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ с испусканием кванта. Функция W, связанная с вероятностью «радиационных» столкновений, определяется свойствами волны нулевого звука; саму эту волну можно рассматривать как распространяющуюся при $T = 0$ (см. IX, § 4), и тогда W не зависит от температуры [2].

В знании функции W, однако, нет необходимости, если поставить себе целью лишь выражение коэффициента поглощения через его значение в предельном случае $\hbar\omega \ll T$. Для этого заме-

[1] Испускание же (или поглощение) «кванта нулевого звука» одной квазичастицей невозможно, поскольку скорость нулевого звука превышает фермиевскую скорость v_F.

[2] Подчеркнем во избежание недоразумений, что функция W не совпадает с функцией w в интеграле столкновений (74.5).

тим, что в интеграле (76.6) существенны значения энергий квазичастиц лишь в области размытости распределения Ферми. В этой области сильно меняются в подынтегральном выражении лишь те множители, которые содержат функции $n(\varepsilon)$. Кроме того, следует учесть, что угловые интегралы в (76.6) практически не меняются при переходе от области $\hbar\omega \ll T$ к области $\hbar\omega \gg T$. Ввиду этого будет достаточно вычислить интеграл

$$J = \int \{n_1 n_2 (1 - n_1')(1 - n_2') - n_1' n_2' (1 - n_1)(1 - n_2)\} \times \\ \times \delta(\varepsilon_1' + \varepsilon_2' - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \hbar\omega)\, d\varepsilon_1\, d\varepsilon_2\, d\varepsilon_1'\, d\varepsilon_2', \quad (76.7)$$

взятый только по энергиям. Коэффициент же пропорциональности между γ и J зависит лишь от ω, но не от T, так что его можно будет определить по предельному значению γ при $\hbar\omega/T \ll 1$.

В интеграле (76.7) можно, конечно, пренебречь малым искажением функции распределения в волне, т. е. положить

$$n(\varepsilon) = [e^{(\varepsilon-\mu)/T} + 1]^{-1}.$$

Введя обозначения

$$x = \frac{\varepsilon - \mu}{T}, \quad \xi = \frac{\hbar\omega}{T},$$

получим

$$J = T^3 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 - e^{-\xi})\delta(x_1' + x_2' - x_1 - x_2 - \xi)\, dx_1\, dx_2\, dx_1'\, dx_2'}{(e^{x_1} + 1)(e^{x_2} + 1)(1 + e^{-x_1'})(1 + e^{-x_2'})}.$$

Ввиду быстрой сходимости интеграла область интегрирования может быть распространена от $-\infty$ до ∞.

Для проведения интегрирования переходим к переменным y_1, y_2, u_1, u_2, где $y = x - x'$, $u = e^x$. Интегрирование по u_1 и u_2 производится элементарно и дает

$$T^{-3} J = (1 - e^{-\xi}) \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \iint\limits_{0}^{\infty} \frac{\delta(y_1 + y_2 + \xi)\, du_1\, du_2\, dy_1\, dy_2}{(u_1 + 1)(u_2 + 1)(u_1 + e^{y_1})(u_2 + e^{y_2})} =$$

$$= (1 - e^{-\xi}) \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{y_1 y_2 \delta(y_1 + y_2 + \xi)\, dy_1\, dy_2}{(1 - e^{y_1})(1 - e^{y_2})} =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} y(\xi + y) \left\{ \frac{1}{e^y - 1} - \frac{1}{e^{y+\xi} - 1} \right\} dy.$$

Для вычисления получившейся разности двух расходящихся интегралов вводим предварительно конечный нижний предел $-\Lambda$ и пишем

$$T^{-3}J = \int\limits_{-\Lambda}^{\infty} \frac{y(\xi+y)\,dy}{e^y-1} - \int\limits_{-\Lambda+\xi}^{\infty} \frac{y(y-\xi)\,dy}{e^y-1} = \\ = 2\xi \int\limits_{-\Lambda}^{\infty} \frac{y\,dy}{e^y-1} - \int\limits_{-\Lambda+\xi}^{-\Lambda} \frac{y(y-\xi)\,dy}{e^y-1}.$$

Имея в виду перейти к пределу $\Lambda \to \infty$, во втором из стоящих здесь интегралов пренебрегаем e^y в знаменателе. Первый же переписываем следующим образом:

$$\int\limits_{-\Lambda}^{\infty} \frac{y\,dy}{e^y-1} = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{y\,dy}{e^y-1} + \int\limits_{-\Lambda}^{0} \frac{y\,dy}{e^y-1} = \\ = \frac{\pi^2}{6} + \int\limits_{-\Lambda}^{0} \left(\frac{y}{1-e^{-y}} - y\right) dy = \frac{\pi^2}{6} + \int\limits_{0}^{\Lambda} \frac{y\,dy}{e^y-1} + \frac{\Lambda^2}{2}.$$

Произведя сокращения и переходя после этого к пределу $\Lambda \to \infty$, получим окончательно

$$J = \frac{2\pi^2\xi T^3}{3}\left(1 + \frac{\xi^2}{4\pi^2}\right).$$

Коэффициент пропорциональности между γ и J определяется, как уже указано, требованием, чтобы при $\xi \ll 1$ было $\gamma = aT^2$ из (76.4). Таким образом, находим

$$\gamma = a\left[T^2 + \left(\frac{\hbar\omega}{2\pi}\right)^2\right]. \tag{76.8}$$

В частности, в пределе больших частот, $\hbar\omega \gg T$, отсюда получается

$$\gamma = \frac{a}{4\pi^2}(\hbar\omega)^2, \tag{76.9}$$

чем и устанавливается связь между коэффициентами в (76.4) и (76.5).

§ 77. Кинетическое уравнение для квазичастиц в бозе-жидкости

Если длина пробега квазичастиц в сверхтекучей бозе-жидкости мала по сравнению с характерными размерами задачи, движение жидкости описывается уравнениями двухскоростной

гидродинамики Ландау (см. VI, гл. XVI). Диссипативные члены в этих уравнениях содержат несколько кинетических коэффициентов (коэффициент теплопроводности и четыре коэффициента вязкости). Вычисление этих коэффициентов требует детального рассмотрения различных процессов рассеяния, многообразие которых связано с существованием двух типов квазичастиц — фононов и ротонов. В реальном жидком гелии ситуация усложняется еще и неустойчивостью начального участка фононного спектра. Эти вопросы здесь рассматриваться не будут.

Длины свободного пробега квазичастиц возрастают с понижением температуры (уже хотя бы из-за уменьшения плотности числа квазичастиц). Поэтому при достаточно низких температурах легко возникает существенная неравновесность системы квазичастиц. В этих условиях уравнения двухскоростной гидродинамики неприменимы. Более того, вообще теряют смысл понятия температуры и нормальной скорости $\mathbf{v}_n$ — их можно определить только по равновесному распределению квазичастиц; вместе с $\mathbf{v}_n$ теряет смысл и разделение плотности жидкости на сверхтекучую и нормальную части. Полная же плотность ρ и сверхтекучая скорость $\mathbf{v}_s$ сохраняют свой смысл, являясь в этом аспекте по существу механическими переменными. Полная система уравнений, описывающих сверхтекучую жидкость, должна состоять теперь из кинетического уравнения для функции распределения квазичастиц $n(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$, уравнения непрерывности для плотности ρ и уравнения для скорости $\mathbf{v}_s$.

Кинетическое уравнение имеет обычный вид[1])

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}}\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial n}{\partial \mathbf{p}}\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \mathbf{r}} = \operatorname{St} n, \tag{77.1}$$

где $\tilde{\varepsilon}$ — энергия квазичастицы, зависящая как от параметра от скорости сверхтекучего движения $\mathbf{v}_s$; обозначение ε сохраняем для энергии квазичастицы в покоящейся жидкости. Связь между ε и $\tilde{\varepsilon}$ выясняется следующими рассуждениями.

По определению, $\varepsilon(p)$ есть закон дисперсии квазичастиц в системе отсчета K_0, в которой $\mathbf{v}_s = 0$. Иными словами, при наличии всего одной квазичастицы энергия жидкости (отсчитываемая от энергии при $T = 0$) есть $\varepsilon(p)$, а ее импульс совпадает с импульсом квазичастицы $\mathbf{p}$. Совершим галилеевское преобразование в неподвижную систему отсчета K, в котором сверхтекучая скорость равна $\mathbf{v}_s$. В этой системе энергия и импульс массы M жидкости есть

$$E = \varepsilon(p) + \mathbf{p}\mathbf{v}_s + \frac{Mv_s^2}{2}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{p} + M\mathbf{v}_s. \tag{77.2}$$

---

[1]) Разумеется, предполагается выполненным условие квазиклассичности — медленного изменения всех величин на расстояниях порядка величины длины волны квазичастицы $\hbar/p$.

Отсюда видно, что в жидкости, совершающей сверхтекучее движение, энергия квазичастицы есть

$$\widetilde{\varepsilon}(\mathbf{p}) = \varepsilon(p) + \mathbf{p}\mathbf{v}_s \tag{77.3}$$

(ср. рассуждения при выводе условия сверхтекучести в IX, § 23).

Таким образом, фигурирующие в кинетическом уравнении производные[1])

$$\begin{gathered}\frac{\partial\widetilde{\varepsilon}}{\partial\mathbf{p}} = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{p}} + \mathbf{v}_s,\\ \frac{\partial\widetilde{\varepsilon}}{\partial\mathbf{r}} = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{r}} + \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}(\mathbf{p}\mathbf{v}_s) = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\nabla\rho + (\mathbf{p}\nabla)\mathbf{v}_s.\end{gathered} \tag{77.4}$$

Во втором равенстве учтено, что энергия ε может зависеть от координат за счет переменной плотности ρ, от которой ε зависит как от параметра. Учтено также (при преобразовании производной от $\mathbf{p}\mathbf{v}_s$), что сверхтекучее движение всегда потенциально,

$$\operatorname{rot}\mathbf{v}_s = 0. \tag{77.5}$$

Уравнение непрерывности для плотности есть

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{i} = 0, \tag{77.6}$$

где $\mathbf{i}$, по определению, есть импульс единицы объема жидкости. Выражение для $\mathbf{i}$ можно найти прямо из второй формулы (77.2), просуммировав ее по всем квазичастицам в этом объеме:

$$\mathbf{i} = \rho\mathbf{v}_s + \langle\mathbf{p}\rangle. \tag{77.7}$$

Здесь и ниже в этом параграфе угловые скобки означают интегрирование по импульсному распределению:

$$\langle\ldots\rangle = \int\ldots n\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Остается найти уравнение для сверхтекучей скорости. Для этого исходим из закона сохранения импульса, выражаемого уравнением

$$\frac{\partial i_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial\Pi_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = 0, \tag{77.8}$$

где $\mathbf{i}$ дается формулой (77.7), а $\Pi_{\alpha\beta}$ — тензор потока импульса.

[1]) Строго говоря, формула (77.2) выведена для однородного сверхтекучего потока, $\mathbf{v}_s = \mathrm{const}$. В неоднородном потоке в энергии могли бы появиться еще и члены, содержащие пространственные производные от $\mathbf{v}_s$. В предположении медленности изменения $\mathbf{v}_s$, однако, эти члены привели бы в кинетическом уравнении к поправкам высших порядков малости.

Пусть $\Pi^{(0)}_{\alpha\beta}$ — значение этого тензора в системе отсчета K_0. Совершив преобразование к системе K, получим [1])

$$\Pi_{\alpha\beta} = \Pi^{(0)}_{\alpha\beta} + \rho v_{s\alpha} v_{s\beta} + v_{s\alpha} i^{(0)}_{\beta} + v^{s\beta} i^{(0)}_{\alpha} = \\ = \Pi^{(0)}_{\alpha\beta} + \rho v_{s\alpha} v_{s\beta} + v_{s\alpha}\langle p_\beta\rangle + v_{s\beta}\langle p_\alpha\rangle \quad (77.9)$$

($\mathbf{i}^{(0)} = \langle \mathbf{p}\rangle$ — импульс единицы объема жидкости в системе K_0). Этим определяется зависимость тензора $\Pi_{\alpha\beta}$ от скорости $\mathbf{v}_s$.

Для дальнейшего преобразования уравнения (77.8) вернемся к кинетическому уравнению (77.1), умножим его на p_α и проинтегрируем по $d^3p/(2\pi\hbar)^3$. Ввиду сохранения суммарного импульса квазичастиц при столкновениях, правая часть уравнения обратится в нуль. Интеграл же в левой части уравнения преобразуем точно так, как это делалось в § 74 (при выводе (74.10)), и находим

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle p_\alpha\rangle + \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left\langle p_\alpha \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_\beta}\right\rangle + \left\langle \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_\alpha}\right\rangle = 0. \quad (77.10)$$

Подставим теперь в (77.8) выражения (77.7) и (77.9) для $\mathbf{i}$ и $\Pi_{\alpha\beta}$ и затем исключим $\partial\rho/\partial t$ и $\partial\langle\mathbf{p}\rangle/\partial t$ с помощью (77.6) и (77.10). В результате получим

$$\frac{\partial v_{s\alpha}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{v_s^2}{2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \Pi^{(0)}_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} - \frac{1}{\rho}\left\langle \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right\rangle \frac{\partial \rho}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left\langle p_\alpha \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_\beta}\right\rangle = 0.$$

Из условия $\operatorname{rot}\mathbf{v}_s = 0$ (учтенного уже и во втором члене) следует, что сумма трех последних членов должна быть градиентом некоторой функции. Кроме того, тензор $\Pi^{(0)}_{\alpha\beta}$ в отсутствие квазичастиц должен быть равен $P_0\delta_{\alpha\beta}$, где $P_0(\rho)$ — давление жидкости при $T = 0$. Из этих требований однозначно следует вид тензора $\Pi^{(0)}_{\alpha\beta}$:

$$\Pi^{(0)}_{\alpha\beta} = \left\langle p_\alpha \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_\beta}\right\rangle + \delta_{\alpha\beta}\left[P_0 + \rho\left\langle \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right\rangle\right]. \quad (77.11)$$

Уравнение для $\mathbf{v}_s$ принимает теперь вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \nabla\left[\frac{v_2^2}{2} + \frac{\mu_0}{m} + \left\langle \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right\rangle\right] = 0, \quad (77.12)$$

---

[1]) Формулу галилеевского преобразования для $\Pi_{\alpha\beta}$ легко найти, рассмотрев классическую систему частиц, для которой $\Pi_{\alpha\beta} = \sum p_\alpha v_\beta = \sum m v_\alpha v_\beta$, где суммирование производится по всем частицам в единице объема.

где μ_0 — химический потенциал жидкости (при $T = 0$), связанный с давлением P_0 термодинамическим соотношением $d\mu_0 = m dP_0/\rho$ (m — масса частицы жидкости, m/ρ — молекулярный объем).

Уравнения (77.1), (77.6), (77.12) составляют полную систему уравнений, описывающих сверхтекучую жидкость в неравновесном состоянии (*И.М. Халатников*, 1952).

Остановимся еще, для полноты, на законе сохранения энергии. Он выражается уравнением вида

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{q} = 0, \qquad (77.13)$$

где $\mathbf{q}$ — плотность потока энергии жидкости. Согласно (77.2),

$$E = E(\rho) + \langle\varepsilon\rangle + \mathbf{v}_s\langle\mathbf{p}\rangle + \frac{\rho v_s^2}{2}, \qquad (77.14)$$

где $E_0(\rho)$ — энергия при $T = 0$, связанная с химическим потенциалом соотношением $dE_0 = \mu_0\, d\rho/m$. Дифференцируя выражение (77.14) по времени и используя известные уже уравнения для всех величин, можно найти плотность потока энергии. Опустив вычисления, приведем окончательный результат

$$\mathbf{q} = (\langle\mathbf{p}\rangle + \rho\mathbf{v}_s)\left[\frac{\mu_0}{m} + \left\langle\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right\rangle + \frac{v_s^2}{2}\right] + \left\langle(\varepsilon + \mathbf{p}\mathbf{v}_s)\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{p}} + \mathbf{v}_s\right)\right\rangle. \qquad (77.15)$$

Равновесная функция распределения квазичастиц в системе отсчета, в которой «газ квазичастиц» как целое покоится (т. е. нормальная скорость $\mathbf{v}_n = 0$), есть обычное распределение Бозе с энергией квазичастицы $\widetilde{\varepsilon}$, даваемой выражением (77.3). Распределение же в системе отсчета, в которой нормальная скорость отлична от нуля, получается заменой $\widetilde{\varepsilon}$ на $\widetilde{\varepsilon} - \mathbf{p}\mathbf{v}_n$. Таким образом, равновесное распределение квазичастиц при наличии обоих движений есть

$$n(\mathbf{p}) = \left[\exp\frac{\varepsilon + (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n)\mathbf{p}}{T} - 1\right]^{-1}. \qquad (77.16)$$

Путем усреднения полученных выше уравнений по этому распределению можно получить систему уравнений двухскоростной гидродинамики (в этом приближении — без диссипативных членов); мы на этом здесь останавливаться не будем.

Задача

Определить коэффициент поглощения звука в бозе-жидкости при частотах $\omega \gg \nu$, где ν — частота столкновений квазичастиц. Температура предполагается настолько низкой, что практически все квазичастицы являются фононами (*Л.Ф. Андреев, И.М. Халатников*, 1963).

Решение. В рассматриваемых условиях можно пренебречь интегралом столкновений в уравнении (77.1). Положим $\rho = \rho_0 + \delta\rho$, $n = n_0 + \delta n$ (где $\delta\rho$, δn — малые поправки к равновесным плотности жидкости и функции распределения фононов) и линеаризуем уравнения (77.1), (77.6) и (77.12) по малым величинам $\delta\rho$, δn, $\mathbf{v}_s$. Предполагая все эти величины пропорциональными $\exp(-i\omega t + i\mathbf{kr})$, получим уравнения

$$(\mathbf{kv} - \omega)\delta n = \frac{\partial n}{\partial \varepsilon}\mathbf{vk}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\delta\rho + \mathbf{pv}_s\right), \tag{1}$$

$$\omega\delta\rho - \mathbf{kv}_s\rho = \int \mathbf{kp}\delta n \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}, \tag{2}$$

$$\omega\mathbf{v}_s - \mathbf{k}u_0^2\frac{\delta\rho}{\rho} = \mathbf{k}\int\left\{n\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\rho^2}\delta\rho + \frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\delta n\right\}\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}. \tag{3}$$

Здесь использованы термодинамические соотношения

$$d\frac{\mu_0}{m} = \frac{dP_0}{\rho} = \frac{u_0^2}{\rho}\,d\rho,$$

где u_0 — скорость звука при $T = 0$; индекс 0 у ρ и n здесь и ниже опускаем.

Ввиду малого числа фононов при температурах вблизи нуля, выражения в правых частях уравнений (1)–(3) представляют собой малые поправки. Опустив их вовсе, получим из уравнений (2) и (3)

$$\omega = u_0 k, \qquad \mathbf{v}_s = u_0\frac{\delta\rho}{\rho}\frac{\mathbf{k}}{k}. \tag{4}$$

В следующем приближении подставляем (4) в правую часть уравнения (1) и находим

$$\delta n = \frac{\partial n}{\partial\varepsilon}\frac{v\cos\theta}{v\cos\theta - \omega/k}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho} + \frac{pu_0}{\rho}\cos\theta\right)\delta\rho \tag{5}$$

(θ — угол между $\mathbf{p}$ и $\mathbf{k}$). Закон дисперсии фононов пишем в виде

$$\varepsilon(p) = u_0 p(1 + \alpha p^2), \quad v = \frac{\partial\varepsilon}{\partial p} = u_0(1 + 3\alpha p^2)$$

с учетом следующего, после линейного, члена разложения (для жидкого гелия при обычных давлениях $\alpha > 0$, что означает неустойчивость фононов по отношению к самопроизвольному распаду).

Наличие в (5) «резонансного» знаменателя приводит (см. ниже) к появлению при интегрировании большого логарифмического множителя. Ограничившись «логарифмической» точностью, пренебрегаем в правой части уравнения (3) членом с $\delta\rho$, не содержащим такого знаменателя. Исключив затем $\mathbf{v}_s$ из уравнений (2) и (3), получим окончательно следующее дисперсионное уравнение:

$$\frac{\omega^2}{k^2} - u_0^2 = A\frac{u_0^2}{\rho}\int\frac{p^2}{\cos\theta - 1 + 3\alpha p^2 - i0}\frac{\partial n}{\partial\varepsilon}\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}, \tag{6}$$

где

$$A = \left(1 + \frac{\rho}{u_0}\frac{du_0}{d\rho}\right)^2.$$

Мнимая часть интеграла по $\cos\theta$ определяется обходом полюса (полюс находится в области интегрирования, если $\alpha > 0$). Вещественную же часть

вычисляем с логарифмической точностью, обрезая интегрирование снизу при $1 - \cos\theta \sim \alpha p^2 \sim \alpha T^2/u_0^2$, а сверху — при $1 - \cos\theta \sim 1$. Левую часть уравнения (6) пишем в виде

$$2u_0\left(\delta u - \frac{u_0}{\omega}\gamma\right),$$

где γ — коэффициент поглощения, а δu — поправка к скорости звука ($u = u_0 + \delta u$). Вычисление интеграла приводит к результату

$$\delta u = \frac{3\rho_n u_0 A}{4\rho}\ln\frac{u_0^2}{\alpha T^2}, \qquad \gamma = \frac{3\pi\omega\rho_n A}{4\rho}, \tag{7}$$

где $\rho_n = \dfrac{2\pi^2 T^4}{45\hbar^3 u_0^5}$ — фононная часть нормальной плотности жидкости. Частотная и температурная зависимости γ совпадают, естественно, с найденными в § 73.

ГЛАВА IX

МЕТАЛЛЫ

§ 78. Остаточное сопротивление

Кинетические свойства металлов значительно сложнее, чем у диэлектриков, уже ввиду существования в них квазичастиц различных родов — электронов проводимости и фононов.

Перенос электрического заряда осуществляется, разумеется, электронами проводимости. Перенос же тепла осуществляется как электронами, так и фононами. Фактически, однако, в достаточно чистых металлах электроны играют основную роль и в теплопроводности, прежде всего — ввиду того, что их скорость (скорость v_F на ферми-поверхности) велика по сравнению со скоростью фононов (скоростью звука). Кроме того, при низких температурах электронная теплоемкость значительно больше фононной.

Электроны проводимости испытывают столкновения различных типов — друг с другом, с фононами, с примесными атомами (и другими дефектами решетки). Частота столкновений первых двух типов убывает с уменьшением температуры. Поэтому при достаточно низких температурах определяющую роль в кинетических явлениях играет рассеяние электронов на примесях. Эту температурную область называют областью *остаточного сопротивления*. С нее мы и начнем изучение кинетики металлов.

Связь электрического тока $\mathbf{j}$ и диссипативного потока энергии $\mathbf{q}'$ в металле с электрическим полем $\mathbf{E}$ и градиентом температуры записывается в виде соотношений (44.12), (44.13):

$$\mathbf{E} + \nabla\frac{\mu}{e} = \frac{1}{\sigma}\mathbf{j} + \alpha\nabla T, \tag{78.1}$$

$$\mathbf{q}' = \mathbf{q} - \left(\varphi - \frac{\mu}{e}\right)\mathbf{j} = \alpha T\mathbf{j} - \varkappa\nabla T. \tag{78.2}$$

В таком виде они относятся к кристаллам кубической симметрии, что и будет предполагаться, для простоты, везде ниже. Для кристаллов не кубической симметрии коэффициенты σ, $\varkappa$, α заменяются тензорами второго ранга. Соотношение (78.2) будет удобнее использовать, выразив в нем $\mathbf{j}$ через $\mathbf{E}$ из первого равенства:

$$\mathbf{q}' = \sigma\alpha T\left(\mathbf{E} + \nabla\frac{\mu}{e}\right) - (\varkappa + T\sigma\alpha^2)\nabla T. \tag{78.3}$$

Все сказанное в § 74 о кинетическом уравнении для ферми-жидкости в значительной мере остается в силе и для электронной жидкости в металле. Роль импульса квазичастиц играет теперь их квазиимпульс, а ферми-поверхность имеет, вообще говоря, сложную форму, свою для каждого конкретного металла.

Кинетические коэффициенты металла вычисляются в принципе с помощью линеаризованного кинетического уравнения

$$-e\mathbf{E}\mathbf{v}\frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} + \mathbf{v}\frac{\partial n_0}{\partial \mathbf{r}} = I(\delta\widetilde{n}),$$

где $\mathbf{v} = \partial\varepsilon/\partial\mathbf{p}$, а интеграл столкновений линеаризован по искомой малой функции $\delta\widetilde{n}$, определенной согласно (74.13). Дифференцирование n_0 по $\mathbf{r}$ можно условно производить при $\mu = \mathrm{const}$, так как градиент μ все равно вошел бы в комбинации $e\mathbf{E} + \nabla\mu$, как должно быть согласно (78.1). Тогда

$$\frac{\partial n_0}{\partial T} = -\frac{\varepsilon-\mu}{T}\frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon}$$

и кинетическое уравнение принимает вид

$$-\left(e\mathbf{E} + \frac{\varepsilon-\mu}{T}\nabla T\right)\mathbf{v}\frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} = I(\delta\widetilde{n}). \tag{78.4}$$

Плотность тока и плотность диссипативного потока энергии даются интегралами

$$\mathbf{j} = -e\int \mathbf{v}\delta\widetilde{n}\frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3}, \qquad \mathbf{q}' = \int (\varepsilon-\mu)\mathbf{v}\delta\widetilde{n}\frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \tag{78.5}$$

(вычисляя $\mathbf{q}'$ как поток кинетической энергии $\varepsilon - \mu$, нет необходимости вычитать из него конвективный перенос потенциальной энергии $\varphi\mathbf{j}$).

Характерной особенностью рассеяния электронов проводимости на атомах примесей является его упругость. Ввиду большой массы атомов и их «привязанности» к решетке, энергию электрона при столкновении можно считать не меняющейся. Покажем, что уже одного только предположения об упругости рассеяния достаточно, чтобы связать простой формулой электро- и теплопроводность металла.

Для этого заметим, что оператор упругих столкновений не затрагивает зависимости функции $\delta\widetilde{n}$ от энергии ε; столкновения лишь перемещают частицы по изоэнергетической поверхности. Это значит, что любой множитель в $\delta\widetilde{n}$, зависящий только от ε, может быть вынесен из-под знака I. В свою очередь это позволяет искать решение кинетического уравнения в виде

$$\delta\widetilde{n} = \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon}\left(e\mathbf{E} + \frac{\varepsilon-\mu}{T}\nabla T\right)\mathbf{l}(\mathbf{p}), \tag{78.6}$$

где $\mathbf{l}(\mathbf{p})$ удовлетворяет уравнению

$$I(\mathbf{l}) = -\mathbf{v}. \tag{78.7}$$

Вычисленная по распределению (78.6) плотность тока

$$\mathbf{j} = -e\int\left\{e(\mathbf{El})\mathbf{v} + \frac{\varepsilon-\mu}{T}(\mathbf{l}\nabla T)\mathbf{v}\right\}\frac{\partial n_0}{\partial\varepsilon}\frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3}. \tag{78.8}$$

Из первого члена находим тензор проводимости

$$\sigma_{\alpha\beta} = -e^2\int v_\alpha l_\beta \frac{\partial n_0}{\partial\varepsilon}\frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3}. \tag{78.9}$$

В кристалле кубической симметрии $\sigma_{\alpha\beta} = \sigma\delta_{\alpha\beta}$, так что проводимость

$$\sigma = -\frac{e^2}{3}\int \mathbf{lv}\frac{\partial n_0}{\partial\varepsilon}\frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3},$$

или, преобразовав интеграл согласно (74.18)–(74.20),

$$\sigma = \frac{2e^2}{3}J_F, \qquad J = \int \mathbf{lv}\frac{dS}{v(2\pi\hbar)^3}. \tag{78.10}$$

Интегрирование в J_F производится по всем листам ферми-поверхности в пределах одной элементарной ячейки обратной решетки.

Аналогичным образом, из второго члена в (78.8), сравнив его с (78.1) находим

$$\alpha\sigma = \frac{2e}{3T}\int \eta(\mathbf{vl})\frac{\partial n_0}{\partial\varepsilon}\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3},$$

где обозначено $\eta = \varepsilon - \mu$. Интегрирование по d^3p заменяем интегрированием по изоэнергетическим поверхностям $\eta = \text{const}$ и интегрированием по η. Введя снова обозначение J из (78.10), имеем

$$\alpha\sigma = \frac{2e}{3T}\int J\eta\frac{\partial n_0}{\partial\eta}\,d\eta. \tag{78.11}$$

Функция

$$\frac{\partial n_0}{\partial\varepsilon} = -\frac{1}{T(e^{\eta/T}+1)(e^{-\eta/T}+1)}$$

экспоненциально убывает при $\eta \to \pm\infty$; поэтому интегрирование по η можно распространить от $-\infty$ до ∞. Интеграл определяется в основном областью $|\eta| \sim T$; величина же $J(\eta)$ существенно меняется лишь на интервале $\eta \sim \mu \gg T$. Поэтому достаточно положить

$$J \approx J_F + \eta\frac{dJ}{d\varepsilon_F}.$$

При подстановке в (78.11) интеграл от первого члена обращается в нуль ввиду нечетности подынтегрального выражения по η, а второй член дает

$$\alpha\sigma = \frac{2e}{3T}\frac{dJ}{d\varepsilon_F}\cdot 2\int_0^\infty \eta^2\frac{\partial n_0}{\partial\eta}\,d\eta = -\frac{8e}{3T}\frac{dJ}{d\varepsilon_F}\int_0^\infty \eta n_0\,d\eta.$$

Интеграл

$$\int_0^\infty \frac{\eta\,d\eta}{e^{\eta/T}+1} = \frac{\pi^2}{12}T^2;$$

использовав также (78.10), получим

$$\alpha = -\frac{\pi^2 T}{3e}\frac{d\ln J}{d\varepsilon_F}. \qquad (78.12)$$

По порядку величины $|\alpha| \sim T/(e\varepsilon_F)$.

Положим теперь $\mathbf{E} = 0$ и вычислим поток энергии. Снова использовав кубическую симметрию, находим

$$\mathbf{q}' = \frac{2\nabla T}{3T}\int_{-\infty}^{\infty} J\eta^2\frac{\partial n_0}{\partial\eta}\,d\eta.$$

Здесь достаточно положить $J = J_F$, после чего получим

$$\mathbf{q}' = -\frac{2\pi^2}{9}TJ_F\nabla T.$$

Сравнив это выражение с (78.3) и (78.10) мы видим, что

$$\varkappa + T\sigma\alpha^2 = \frac{\pi^2\sigma T}{3e^2}.$$

Указанная выше оценка α показывает, что член $T\sigma\alpha^2$ в левой части равенства мал по сравнению с его правой частью в отношении $(T/\varepsilon_F)^2$. Пренебрегая им, находим окончательно следующее соотношение между тепло- и электропроводностью:

$$\varkappa = \frac{\pi^2 T}{3e^2}\sigma \qquad (78.13)$$

— закон *Видемана–Франца* [1]).

---

[1]) Формула вида (78.13) была получена качественно *Друде* (*P. Drude*, 1900), впервые сформулировавшим представление об электронах проводимости, участвующих в тепловом равновесии металла. Количественный вывод в классической статистике был дан *Лоренцем* (*H.A. Lorenz*, 1905), а в статистике Ферми — *Зоммерфельдом* (*A. Sommerfeld*, 1928).

Снова подчеркнем, что в выводе этого соотношения использована лишь упругость рассеяния электронов проводимости. Проследив за выводом, легко также заметить, что предположение кубической симметрии лишь упрощало запись формул. В общем случае произвольной симметрии кристалла такая же связь (78.13) имеет место между тензорами $\varkappa_{\alpha\beta}$ и $\sigma_{\alpha\beta}$.

Для определения температурной зависимости каждого из коэффициентов $\varkappa$ и σ в отдельности надо выписать интеграл столкновений. Для столкновений с примесными атомами он имеет вид, вполне аналогичный интегралу (70.3) для рассеяния фононов на примесях:

$$\operatorname{St} n = N_{\text{пр}} \int w(\mathbf{p}, \mathbf{p}')[n'(1-n) - n(1-n')]\delta(\varepsilon - \varepsilon')\frac{2d^3p'}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (78.14)$$

Множители $1-n$ или $1-n'$ учитывают принцип Паули — переход может произойти лишь в незанятые состояния; множители же n' или n учитывают, что рассеяние может иметь место лишь из занятого состояния. Как и в (70.3), в интеграле (78.14) подразумевается, что примесные атомы расположены хаотически, а среднее расстояние между ними много больше амплитуды рассеяния; тогда различные атомы рассеивают независимо. В интеграле (78.14) уже использовано равенство $w(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = w(\mathbf{p}', \mathbf{p})$. К рассеянию электронов проводимости на примесных атомах борновское приближение, вообще говоря, неприменимо. Написанное равенство можно обосновать соображениями, использованными при выводе принципа детального равновесия в форме (2.8). При этом, однако, подразумевается, что положения, занимаемые атомами примеси в решетке металла, обладают симметрией, допускающей инверсию.

Линеаризация интеграла столкновений сводится к замене разности $n'(1-n) - n(1-n') = n' - n$ на $\delta\tilde{n}' - \delta\tilde{n}$. Уравнение (78.7) принимает тогда вид

$$N_{\text{пр}} \int w(\mathbf{p}, \mathbf{p}')(\mathbf{l}' - \mathbf{l})\delta(\varepsilon - \varepsilon')\frac{2d^3p'}{(2\pi\hbar)^3} = -\mathbf{v}. \quad (78.15)$$

Это уравнение не содержит температуры. Поэтому не будет зависеть от температуры и его решение $\mathbf{g}(\mathbf{p})$, а согласно (78.10) и проводимость σ. Таким образом, при достаточно низких температурах, когда рассеяние на примесях является основным механизмом электрического сопротивления, сопротивление стремится к постоянному (остаточному) значению. Соответственно в этой области теплопроводность $\varkappa$ пропорциональна T [1]).

[1]) В этих рассуждениях подразумевается, что уравнение (78.15) не содержит быстро меняющихся вблизи $\varepsilon = \varepsilon_F$ величин, что позволяет заменить в (78.9) $\mathbf{l}$ на $\mathbf{l}_F$. Это действительно так для рассеяния на обычных примесях, но не на парамагнитных атомах.

Для грубой количественной оценки остаточного сопротивления можно воспользоваться элементарной формулой (43.7), положив в ней (для электронов в металле) $p \sim p_F$:

$$\sigma \sim e^2 N \frac{l}{p_F}, \tag{78.16}$$

где N — плотность электронов. При рассеянии на примесях длина свободного пробега $l \sim 1/(N_{\text{пр}}\sigma_t)$, где σ_t — транспортное сечение рассеяния. Поэтому остаточное сопротивление $\rho_{\text{ост}} = 1/\sigma$,

$$\rho_{\text{ост}} \sim \frac{N_{\text{пр}}\sigma_t p_F}{e^2 N}. \tag{78.17}$$

К сказанному в этом параграфе надо сделать еще следующее замечание. Общее условие применимости кинетического уравнения для ферми-жидкости требует, чтобы квантовая неопределенность энергии электрона была мала по сравнению с шириной ($\sim T$) зоны тепловой размытости распределения Ферми. Указанная неопределенность $\sim \hbar/\tau$, где $\tau \sim l/v_F$ — время свободного пробега. Для рассеяния на примесях $l \sim 1/(N_{\text{пр}}\sigma_t)$, неопределенность $\hbar/\tau$ не зависит от температуры и тем самым размывает ферми-границу даже при $T = 0$. На первый взгляд отсюда следует, что все проведенное выше рассмотрение ограничено очень жестким условием

$$T \gg \hbar v_F \sigma_t N_{\text{пр}}, \tag{78.18}$$

зависящим от концентрации примесей. В действительности, однако, такое ограничение отсутствует (*Л.Д. Ландау*, 1934).

Дело в том, что ввиду закрепленности положений примесных атомов и упругости рассеяния электронов на них, вся задача о вычислении электрического тока может быть сформулирована в принципе как квантовомеханическая задача о движении электрона в некотором заданном сложном, но потенциальном внешнем поле. Для состояний электрона, определенных как стационарные состояния в этом поле, энергия не имеет неопределенности; при $T = 0$ электроны будут заполнять область состояний, ограниченную резкой ферми-поверхностью — но не в импульсном пространстве, а в пространстве квантовых чисел движения в этом поле. В такой постановке задачи условия типа (78.18) вообще не возникают.

§ 79. Электрон-фононное взаимодействие

В достаточно чистых металлах основным механизмом установления равновесия в широком диапазоне температур является взаимодействие электронов проводимости с фононами.

Условие возможности испускания (или поглощения) фонона электроном требует, чтобы скорость электрона превосходила скорость фонона — ср. аналогичный вывод в § 68 для испускания фонона фононом. Но скорость электронов у ферми-поверхности обычно велика по сравнению со скоростью фононов, так что это условие выполнено и основной вклад в электрон-фононный интеграл столкновений вносят именно указанные «однофононные» процессы.

С учетом этих процессов интеграл столкновений имеет следующий вид, аналогичный фонон-фононному интегралу (67.6) [1]):

$$\mathrm{St}_{e,ph}\, n_{\mathbf{p}} = \int w(\mathbf{p}',\mathbf{k};\mathbf{p})\{n_{\mathbf{p}'}(1-n_p)N_{\mathbf{k}} - n_{\mathbf{p}}(1-n_{\mathbf{p}'})(1+N_{\mathbf{k}})\}\times \\ \times\,\delta(\varepsilon_{\mathbf{p}}-\varepsilon_{\mathbf{p}'}-\omega_{\mathbf{k}})\frac{d^3k}{(2\pi)^3} + \\ + \int w(\mathbf{p}';\mathbf{p},\mathbf{k})\{n_{\mathbf{p}'}(1-n_{\mathbf{p}})(1+N_{\mathbf{k}}) - n_{\mathbf{p}}(1-n_{\mathbf{p}'})N_{\mathbf{k}}\}\times \\ \times\,\delta(\varepsilon_{\mathbf{p}}+\omega_{\mathbf{k}}-\varepsilon_{\mathbf{p}'})\frac{d^3k}{(2\pi)^3}. \qquad (79.1)$$

Первый член отвечает процессам испускания фонона с квазиимпульсом $\mathbf{k}$ электроном с заданным квазиимпульсом $\mathbf{p}$ и обратным процессам поглощения фонона $\mathbf{k}$ электронами $\mathbf{p}'$ с восстановлением квазиимпульса $\mathbf{p}$:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}' + \mathbf{k} + \mathbf{b}; \qquad (79.2а)$$

в этих процессах переходы осуществляются между электронным состоянием с заданной энергией $\varepsilon_{\mathbf{p}}$ и нижележащими (по энергии) состояниями. Второй же член отвечает процессам поглощения фонона электроном $\mathbf{p}$ и обратным процессам его испускания электронами $\mathbf{p}'$:

$$\mathbf{p} + \mathbf{k} = \mathbf{p}' + \mathbf{b}; \qquad (79.2б)$$

в этих процессах переходы осуществляются между заданным и вышележащими электронными состояниями. По тем же причинам, что и для испускания фонона фононом в § 66, значение $\mathbf{b}$ в равенствах (79.2) однозначно определяется заданием значений $\mathbf{k}$, $\mathbf{p}$ и требованием, чтобы $\mathbf{p}'$ оказалось в той же выбранной ячейке обратной решетки. δ-функционные множители в (79.1) выражают закон сохранения энергии; $\varepsilon_{\mathbf{p}}$ — энергии электронов, $\omega_{\mathbf{k}}$ — энергии фононов. Как и в гл. VII, функция распределения (числа заполнения состояний) фононов обозначена через $N_{\mathbf{k}}$; функция

[1]) В § 79–83 используется система единиц, в которой $\hbar = 1$.

же распределения электронов обозначается через $n_{\mathbf{p}}$. Индексы, указывающие ветвь фононного спектра (и знаки суммирования по ним), мы для краткости не выписываем. Предполагается, что вероятности переходов не зависят от спина электрона, не меняющегося при переходе.

Аналогичным образом записывается фонон-электронный интеграл столкновений, который должен быть добавлен к фонон-фононному интегралу в правой части кинетического уравнения для функции распределения фононов:

$$\mathrm{St}_{ph,e} N_{\mathbf{k}} = \int w(\mathbf{p};\mathbf{p}',\mathbf{k})\{n_{\mathbf{p}}(1-n_{\mathbf{p}'})(1+N_{\mathbf{k}})-n_{\mathbf{p}'}(1-n_{\mathbf{p}})N_{\mathbf{k}}\}\times \\ \times\,\delta(\varepsilon_{\mathbf{p}'}+\omega_{\mathbf{k}}-\varepsilon_{\mathbf{p}})\frac{2d^3p}{(2\pi)^3}, \qquad (79.3)$$

причем $\mathbf{p}=\mathbf{p}'+\mathbf{k}+\mathbf{b}$. Этот интеграл — разность между числом фононов $\mathbf{k}$, испускаемых электронами со всеми возможными квазиимпульсами $\mathbf{p}$, и числом фононов, поглощаемых электронами со всеми возможными $\mathbf{p}'$. Множитель 2 учитывает два возможных направления спина излучающего (или поглощающего) электрона.

В первом порядке теории возмущений фигурирующие в этих интегралах вероятности испускания и поглощения фонона электроном определяются оператором электрон-фононного взаимодействия, линейным по фононным операторам $\widehat{\mathbf{U}}_s(\mathbf{n})$ (66.2); линейность отвечает тому, что эти операторы ответственны за переходы с изменением на 1 всего одного из чисел заполнения фононных состояний. Не повторяя вновь изложенных в § 66 рассуждений, укажем, что в пределе стремящегося к нулю квазиимпульса фонона $\mathbf{k}$ вероятность испускания (или поглощения) фонона пропорциональна первой степени k:

$$w \propto k. \qquad (79.4)$$

Согласно общему свойству вероятностей перехода в борновском приближении, вероятности прямого и обратного переходов одинаковы; поэтому [1])

$$w(\mathbf{p}',\mathbf{k};\mathbf{p}) = w(\mathbf{p};\mathbf{p}',\mathbf{k}). \qquad (79.5)$$

Это свойство уже учтено в интегралах (79.1) и (79.3).

Дальнейшее упрощение достигается при учете симметрии (выраженной вещественностью операторов $\widehat{\mathbf{U}}_s$), с которой операторы рождения и уничтожения фононов входят в оператор

[1]) Напомним, что квантовые числа начального (i) и конечного (f) состояний в обозначениях вероятностей перечисляются везде в порядке fi.

электрон-фононного взаимодействия. В силу этой симметрии, испускание фонона с квазиимпульсом $\mathbf{k}$ эквивалентно поглощению фонона с квазиимпульсом $-\mathbf{k}$. Учтем также близость энергий электрона $\varepsilon_{\mathbf{p}}$ и $\varepsilon_{\mathbf{p}'}$ к фермиевской энергии ε_F. Пусть $\mathbf{p}_F$ и $\mathbf{p}'_F$ — векторы, проведенные в направлениях $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$ и оканчивающиеся на ферми-поверхности. Пусть функции w выражены в зависимости от направлений $\mathbf{p}_F$, $\mathbf{p}'_F$ и разностей $\eta_{\mathbf{p}} = \varepsilon_{\mathbf{p}} - \varepsilon_F$, $\eta_{\mathbf{p}'} = \varepsilon_{\mathbf{p}'} - \varepsilon_F$, характеризующих степень близости энергии электрона к ε_F. Относительно последних переменных w является медленной функцией, заметно меняющейся лишь на интервалах $\sim \varepsilon_F \gg T$. Пренебрегая величинами $\sim \eta \sim T$, можно положить в этих функциях $\eta_{\mathbf{p}} = \eta_{\mathbf{p}'} = 0$. Тогда указанная выше эквивалентность выразится равенством

$$w(\mathbf{p}'_F, \mathbf{k}; \mathbf{p}_F) = w(\mathbf{p}'_F; \mathbf{p}_F, -\mathbf{k}), \tag{79.6}$$

причем w являются функциями только от направлений $\mathbf{p}_F$ и $\mathbf{p}'_F$. Если теперь переобозначить во втором члене в (79.1) переменную интегрирования $\mathbf{k} \to -\mathbf{k}$, то коэффициенты w в обоих интегралах станут одинаковыми; поскольку $\omega_{-\mathbf{k}} = \omega_{\mathbf{k}}$, то переобозначение приводит лишь к замене $N_{\mathbf{k}}$ на $N_{-\mathbf{k}}$.

Интегралы (79.1) и (79.3) обращаются, конечно, в нуль равновесными функциями распределения электронов и фононов. Линеаризация этих интегралов при малых отклонениях от равновесия производится одновременно по обеим функциям распределения, которые представляем в виде

$$\begin{gathered} n = n_0(\varepsilon) + \delta\widetilde{n}, \quad N = N_0(\omega) + \delta N, \\ \delta\widetilde{n} = -\frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon}\varphi = \frac{n_0(1-n_0)}{T}\varphi, \\ \delta N = -\frac{\partial N_0}{\partial \omega}\chi = \frac{N_0(1+N_0)}{T}\chi. \end{gathered} \tag{79.7}$$

Преобразование производится вполне аналогично тому, как это делалось в § 67 и 74. Так, выражение в фигурных скобках в первом члене в (79.1), переписанное как

$$(1-n)(1-n')(1+N)\left[\frac{n'}{1-n'}\frac{N}{1+N} - \frac{n}{1-n}\right],$$

приводится к виду

$$n_0(1-n'_0)(1+N_0)\frac{1}{T}(\varphi' - \varphi + \chi).$$

Это выражение целесообразно преобразовать дальше, воспользовавшись равенством

$$n_0(\varepsilon)[1 - n_0(\varepsilon')] = [n_0(\varepsilon) - n_0(\varepsilon')]N_0(\varepsilon - \varepsilon'), \tag{79.8}$$

которое легко проверить прямым вычислением. Тогда получим

$$(n_0 - n_0')\frac{N_0(1+N_0)}{T}(\varphi' - \varphi + \chi) = -\frac{\partial N_0}{\partial\omega}(n_0 - n_0')(\varphi' - \varphi + \chi).$$

Таким же образом преобразуются остальные члены, и в результате получим следующие линеаризованные интегралы столкновений:

$$\begin{aligned}\mathrm{St}_{e,ph}\, n = I_{e,ph}(\varphi, \chi) = \\ = -\int \frac{\partial N_0}{\partial\omega} w(n_0' - n_0)\{(\varphi_{\mathbf{p}'} - \varphi_{\mathbf{p}} + \chi_{\mathbf{k}})\delta(\varepsilon_{\mathbf{p}} - \varepsilon_{\mathbf{p}'} - \omega_{\mathbf{k}}) - \\ - (\varphi_{\mathbf{p}'} - \varphi_{\mathbf{p}} - \chi_{-\mathbf{k}})\delta(\varepsilon_{\mathbf{p}} - \varepsilon_{\mathbf{p}'} + \omega_{\mathbf{k}})\}\frac{d^3k}{(2\pi)^3},\end{aligned} \qquad (79.9)$$

$$\begin{aligned}\mathrm{St}_{ph,e}\, N = I_{ph,e}(\chi, \varphi) = \\ = \frac{\partial N_0}{\partial\omega}\int w(n_0' - n_0)\{(\varphi_{\mathbf{p}'} - \varphi_{\mathbf{p}} + \chi_{\mathbf{k}})\delta(\varepsilon_{\mathbf{p}} - \varepsilon_{\mathbf{p}'} - \omega_{\mathbf{k}})\frac{2d^3p}{(2\pi)^3},\end{aligned} \qquad (79.10)$$

причем в обоих $\mathbf{p} = \mathbf{p}' + \mathbf{k} + \mathbf{b}$.

Эти интегралы естественным образом разбиваются на две части — линейные интегральные операторы, действующие соответственно на функции φ и χ. Так,

$$I_{e,ph}(\varphi, \chi) = I_{e,ph}^{(1)}(\varphi) + I_{e,ph}^{(2)}(\chi). \qquad (79.11)$$

Отметим важное свойство оператора $I_{e,ph}^{(1)}$: он не меняет четности функции $\varphi(\eta, \mathbf{p}_F)$ по переменной η, т. е. оставляет четную функцию четной и нечетную — нечетной. Действительно, в смысле своего воздействия на функцию от η оператор $I_{e,ph}^{(1)}$ имеет вид

$$I_{e,ph}^{(1)}(\varphi(\eta)) \sim \int K(\eta, \eta')[\varphi(\eta') - \varphi(\eta)]\, d\eta,$$

где

$$K(\eta, \eta') = [n_0(\eta') - n_0(\eta)][\delta(\eta - \eta' - \omega) - \delta(\eta' - \eta - \omega)].$$

Заметив, что

$$n_0(\eta) = \frac{1}{2}\left[1 - \mathrm{th}\,\frac{\eta}{2T}\right] \qquad (79.12)$$

и поэтому

$$n_0(\eta') - n_0(\eta) = \frac{1}{2}\left[\mathrm{th}\,\frac{\eta}{2T} - \mathrm{th}\,\frac{\eta'}{2T}\right],$$

мы видим, что

$$K(\eta, \eta') = K(-\eta, -\eta'),$$

откуда непосредственно следует указанное выше свойство оператора. Это свойство будет использовано в § 80, 82.

Интегралы столкновений (79.9), (79.10) обращаются тождественно в нуль функциями

$$\varphi = \text{const} \cdot \varepsilon, \quad \chi = \text{const} \cdot \omega \tag{79.13}$$

(с одинаковыми коэффициентами const). Это «паразитное» решение кинетического уравнения соответствует (как и решение (67.18) в фонон-фононном уравнении) изменению температуры системы на малую постоянную величину. Но интегралы (79.9–10) обращаются в нуль также и постоянной

$$\varphi = \text{const} \tag{79.14}$$

при $\chi = 0$. Это решение связано с постоянством полного числа электронов (в отличие от полного числа фононов); с формальной точки зрения оно отвечает изменению химического потенциала электронов на малую постоянную величину.

Для дальнейших количественных оценок напомним, что порядки величины параметров электронного спектра в металле выражаются лишь через постоянную решетки d и эффективную массу электрона m^*; так, фермиевский импульс (обычные единицы) $p_F \sim \hbar/d$, скорость $v_F \sim p_F/m^* \sim \hbar/(m^* d)$, энергия $\varepsilon_F \sim v_F p_F \sim \hbar^2/(m^* d^2)$. Параметры фононного спектра и электрон-фононного взаимодействия содержат еще и массу атомов M. Плотность вещества $\rho \propto M$, а скорость звука $u \propto \rho^{-1/2} \propto M^{-1/2}$; дополнив до нужной размерности с помощью величин $\hbar$, d, m^* (что можно сделать лишь одним способом), получим оценку

$$u \sim v_F \left(\frac{m^*}{M}\right)^{1/2}. \tag{79.15}$$

Отсюда дебаевская температура

$$\Theta \sim \hbar\omega_{\max} \sim \frac{\hbar u}{d} \sim \varepsilon_F \left(\frac{m^*}{M}\right)^{1/2}. \tag{79.16}$$

В оператор же электрон-фононного взаимодействия масса M входит только через операторы смещения атомов $\widehat{\mathbf{U}}_s$ (66.2); никакой другой малости по $1/M$ это взаимодействие не содержит — его энергия становится $\sim \varepsilon_F$, когда $U_s \sim d$. Матричные элементы операторов $\widehat{\mathbf{U}}_s$, а с ними и матричные элементы оператора электрон-фононного взаимодействия, $\propto (M\omega)^{-1/2} \propto M^{-1/4}$ (при заданном квазиимпульсе k частота $\omega \sim uk \propto M^{-1/2}$). Вероятность же рассеяния определяется квадратом матричного элемента. Поэтому функция w в интеграле столкновений пропорциональна

$M^{-1/2}$, или, дополнив до требуемой размерности,

$$w \sim \Theta v_F d^2. \qquad (79.17)$$

Эту оценку надо изменить в случае, если речь идет об испускании или поглощении длинноволнового акустического фонона. Тот факт, что в таком случае w пропорциональна k, означает, что в оценку надо ввести дополнительный множитель $k/k_{\max} \sim kd$:

$$w \sim \Theta v_F k d^3. \qquad (79.18)$$

§ 80. Кинетические коэффициенты металла. Высокие температуры

При высоких температурах, $T \gg \Theta$, в кристалле возбуждены фононы со всеми возможными квазиимпульсами, вплоть до максимальных, совпадающих по порядку величины с фермиевским импульсом электронов: $k_{\max} \sim p_F \sim 1/d$. По самому определению дебаевской температуры, максимальная энергия фононов $\omega_{\max} \sim \Theta$ и, таким образом, для всех вообще фононов $\omega \ll T$.

Таким образом, в рассматриваемых условиях энергии фононов малы по сравнению с шириной области размытости фермиевского распределения электронов. Это позволяет приближенно рассматривать испускание или поглощение фонона как упругое рассеяние электрона. Углы же рассеяния отнюдь не малы, поскольку квазиимпульсы электронов и фононов в рассматриваемых условиях одинакового порядка величины.

При высоких температурах, когда числа заполнения фононных состояний велики, установление равновесия в каждом элементе объема фононного газа (фонон-фононная релаксация) происходит очень быстро. По этой причине при рассмотрении электро- и теплопроводности металла можно считать фононную функцию распределения равновесной, т. е. положить в интегралах столкновений $\chi = 0$ (к количественной оценке χ мы вернемся еще в конце параграфа). Другими словами, достаточно рассматривать кинетическое уравнение лишь для электронов.

Сразу же отметим, что в приближении, предполагающем упругость рассеяния электронов, остаются в силе полученные в § 78 результаты, основанные лишь на этом предположении. В том числе остается справедливым закон Видемана–Франца (78.13), определяющий отношение $\sigma/\varkappa$. Для определения же температурной зависимости каждого из коэффициентов σ и $\varkappa$ по отдельности надо более детально рассмотреть электрон-фононный интеграл столкновений (79.9).

В рассматриваемых условиях этот интеграл сильно упрощается. Ввиду малости энергии фонона $\omega = \pm(\varepsilon' - \varepsilon)$, можно раз-

ложить разность $n'_0 - n_0$ по ее степеням [1]):

$$n'_0 - n_0 \approx \pm\, \omega \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon}.$$

После этого в аргументах δ-функций можно уже положить $\omega = 0$; тогда

$$I_{e,ph}(\varphi) = 2 \int w \frac{\partial N_0}{\partial \omega} \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \delta(\varepsilon' - \varepsilon)(\varphi' - \varphi)\omega \frac{d^3k}{(2\pi)^3}.$$

При $\omega \ll T$ функция распределения фононов $N_0 \approx T/\omega$, так что $\partial N_0/\partial\omega \approx -T/\omega^2$. Производная же $\partial n_0/\partial\varepsilon \sim -1/T$. Интеграл определяется областью значений $k \sim k_{\max}$, в которой $\omega \sim \Theta$. С учетом δ-функций интегрирование по d^3k вносит в оценку интеграла множитель $k^2_{\max}/v_F$:

$$I_{e,ph}(\varphi) \sim -w \frac{T}{\Theta} \frac{k^2_{\max}}{v_F} \frac{\varphi}{T}.$$

Используя оценку (79.17), находим отсюда

$$I_{e,ph}(\varphi) \sim -\varphi \sim -T\delta\widetilde{n}. \tag{80.1}$$

Это значит, что частота электрон-фононных столкновений $\nu_{e,ph} \sim T$ ($T/\hbar$ в обычных единицах), длина пробега $l \sim v_F/T$ и из (78.16) находим для электропроводности (обычные единицы) [2]):

$$\sigma \sim \frac{Ne^2\hbar}{m^*T}. \tag{80.2}$$

Таким образом, электропроводность металла при $T \gg \Theta$ обратно пропорциональна температуре. Из закона Видемана–Франца следует тогда, что коэффициент теплопроводности постоянен:

$$\varkappa \sim \frac{N\hbar}{m^*}. \tag{80.3}$$

---

[1]) Учет ω в этой разности не противоречит принятому приближению — упругости рассеяния электронов. Он понадобился ввиду того, что при приведении интеграла столкновений к виду (79.9) было использовано равенство (79.8), правая часть которого становится при $\varepsilon = \varepsilon'$ неопределенной.

[2]) Заметим, что квантовая неопределенность энергии электронов, $\sim \hbar\nu_{e,ph} \sim T$, оказывается порядка величины ширины области размытия их распределения. Это обстоятельство, однако, не нарушает применимости полученных результатов по причине, аналогичной той, которая была объяснена в конце § 78 в связи с рассеянием на примесях. Ввиду относительной медленности колебаний атомов в решетке и упругости рассеяния электронов, задача может быть в принципе сформулирована как задача о движении электронов в заданном потенциальном поле деформированной решетки.

Оценим теперь поправочные функции φ и χ в распределениях электронов и фононов с целью оправдания пренебрежения χ в интеграле столкновений. Сделаем это, например, для случая наличия электрического поля при равном нулю градиенте температуры.

Поскольку электрическое поле не влияет на движение фононов, левая часть кинетического уравнения для фононов равна нулю. Уравнение сводится поэтому к равенству нулю суммы интегралов столкновения фононов с электронами и друг с другом:

$$I^{(1)}_{ph,e}(\varphi) + I^{(2)}_{ph,e}(\chi) + I_{ph,ph}(\chi) = 0 \tag{80.4}$$

(индексы (1) и (2) отличают две части интеграла (79.10) подобно тому, как это сделано в (79.11)).

Интеграл $I_{ph,e}$ оценивается подобно тому, как это сделано выше для интеграла $I_{e,ph}$. При этом, однако, надо учесть, что интегрирование по квазиимпульсам электрона $\mathbf{p}$ производится фактически лишь вблизи ферми-поверхности по объему слоя толщины $\sim T/v_F$ и площадью $\sim p_F^2$. Наличие δ-функции вносит в оценку интеграла еще множитель $1/\varphi_F$. В результате получим

$$I^{(2)}_{ph,e}(\chi) \sim -w\frac{\chi}{T}\frac{T}{\Theta}\frac{Tp_F^2}{v_F\varepsilon_F} \sim -\chi\frac{T}{\varepsilon_F}, \quad I^{(1)}_{ph,e}(\varphi) \sim -\varphi\frac{T}{\varepsilon_F}. \tag{80.5}$$

Интеграл же фонон-фононных столкновений оценивается как

$$I_{ph,ph}(\chi) \sim -\nu_{ph,ph}\delta N \sim -\nu_{ph,ph}\frac{T}{\Theta^2}\chi$$

с эффективной частотой столкновений из (68.3):

$$\nu_{ph,ph} \sim \frac{T}{Mud} \sim T\sqrt{\frac{m^*}{M}}.$$

Таким образом,

$$I_{ph,ph}(\chi) \sim -\frac{T^2}{\Theta^2}\sqrt{\frac{m^*}{M}}\chi \sim -\frac{T^2}{\Theta\varepsilon_F}\chi. \tag{80.6}$$

Сравнив (80.5) и (80.6), мы видим, прежде всего, что

$$\frac{I^{(2)}_{ph,e}(\chi)}{I_{ph,ph}(\chi)} \sim \frac{\Theta}{T} \ll 1$$

— эффективная частота фонон-электронных столкновений (при равновесных электронах, т. е. при $\varphi = 0$) мала по сравнению с частотой фонон-фононных столкновений. По этой причине в

уравнении (80.4) можно пренебречь вторым членом. Сравнение же двух оставшихся членов приводит к результату

$$\frac{\chi}{\varphi} \sim \frac{\Theta}{T} \ll 1, \tag{80.7}$$

чем и оправдывается пренебрежение функцией χ в электрон-фононном интеграле столкновений. Тот же результат (80.7) получается, как легко убедиться, и при наличии градиента температуры.

Пренебрежение функцией χ в кинетическом уравнении электронов может, однако, оказаться недопустимым при рассмотрении термоэлектрических явлений.

Согласно формуле (78.12) (вывод которой основан только на предположении об упругости рассеяния электронов) термоэлектрический коэффициент

$$\alpha^{\rm I} \sim \frac{T}{e\varepsilon_F} \tag{80.8}$$

(смысл индекса I указан ниже). Эта величина «аномально» мала в том смысле, что порядок величины интеграла в (78.8) (второй член в формуле) оказался уменьшенным в отношении T/ε_F из-за нечетности функции

$$\varphi^{\rm I} = -\frac{\eta}{T}\mathbf{l}\nabla T \tag{80.9}$$

по переменной $\eta = \varepsilon - \mu$. Это обстоятельство в известном смысле «случайно»; благодаря нему может оказаться, что сравнительно малая добавка к φ, связанная с неравновесностью фононов, приведет к сравнимому с (80.8) вкладу в α.

Будем искать решение кинетического уравнения электронов

$$\frac{\partial n_0}{\partial T}\mathbf{v}\nabla T = -\frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon}\frac{\eta}{T}\mathbf{v}\nabla T = I^{(1)}_{e,ph}(\varphi) + I^{(2)}_{e,ph}(\chi) \tag{80.10}$$

в виде суммы $\varphi = \varphi^{\rm I} + \varphi^{\rm II}$, где $\varphi^{\rm I}$ — решение уравнения без второго члена в правой части, а $\varphi^{\rm II}$ — решение уравнения

$$I^{(1)}_{e,ph}(\varphi) + I^{(2)}_{e,ph}(\chi) = 0. \tag{80.11}$$

Функция $\varphi^{\rm I}$ является «большой» частью функции φ; ввиду отмеченной в § 79 четности оператора $I^{(1)}_{e,ph}$ по переменной η, эта часть имеет вид (80.9) и нечетна по переменной η. Из уравнения же (80.11) следует, что $\varphi^{\rm II} \sim \chi$ и потому

$$\frac{\varphi^{\rm II}}{\varphi^{\rm I}} \sim \frac{\chi}{\varphi^{\rm I}} \sim \frac{\Theta}{T} \ll 1.$$

Но в отличие от $\varphi^{\rm I}$, функция $\varphi^{\rm II}$ вовсе не обращается в нуль при $\varepsilon = \mu$. Поэтому при вычислении соответствующего вклада

в плотность тока не происходит погашения члена основного порядка и результат мал только в смысле относительной малости φ^{II}. Это значит, что вклад последней в термоэлектрический коэффициент

$$\alpha^{\mathrm{II}} \sim \alpha^{\mathrm{I}} \frac{\varepsilon_F}{T} \frac{\Theta}{T} \sim \frac{\Theta}{eT}. \tag{80.12}$$

На нижней границе рассматриваемой температурной области, при $T \sim \Theta$, имеем $e\alpha^{\mathrm{II}} \sim 1$ вместо малой величины $e\alpha^{\mathrm{I}} \sim \Theta/\varepsilon_F$.

Таким образом, термоэлектрический коэффициент складывается из двух аддитивных частей. Эти части могут быть одинакового порядка величины, но имеют различную температурную зависимость. Физическое происхождение второго слагаемого в α состоит в том, что при теплопередаче в кристалле возникает поток фононов («фононный ветер»), который увлекает за собой электроны [1]).

§ 81. Процессы переброса в металле

Характер электрон-фононного рассеяния при низких температурах радикально отличен от характера рассеяния при $T \gg \Theta$. При $T \ll \Theta$ в кристалле возбуждены фононы с энергиями $\omega \sim T$ (относящиеся, вообще говоря, к акустическим ветвям спектра). При испускании или поглощении такого фонона энергия электрона меняется на величину $\sim T$, т. е. на порядок величины всей ширины области размытости ферми-распределения. Изменение же квазиимпульса электрона совпадает с квазиимпульсом фонона. Поскольку $k \sim T/u \ll k_{\max}$, а $k_{\max} \sim p_F$, то это значит, что квазиимпульс электрона изменяется лишь на относительно малую величину. Таким образом, при низких температурах имеет место предельный случай, обратный по отношению к упругому рассеянию: релаксация электронов по энергиям происходит значительно быстрее, чем по направлениям их квазиимпульсов.

Релаксация по энергиям представляет собой быстрое «перемешивание» в зоне размытости фермиевского распределения. Релаксация же по направлениям есть выравнивание распределения вдоль этой поверхности; оно происходит малыми ($\sim T/u$) скачками, т. е. имеет характер медленной диффузии по этой поверхности.

Прежде чем перейти к детальному рассмотрению кинетических явлений в этих условиях, сделаем некоторые общие замечания о роли процессов переброса.

[1]) Выяснение роли увлечения электронов фононами в кинетических явлениях в металлах принадлежит *Л.Э. Гуревичу* (1946).

Как и в диэлектрических кристаллах, конечность кинетических коэффициентов идеального (без примесей или дефектов) металлического кристалла связана с существованием процессов переброса. С учетом одних лишь нормальных процессов, идущих с сохранением суммарного квазиимпульса электронов и фононов, кинетические уравнения имели бы паразитные решения, отвечающие движению электронной и фононной систем как целого относительно решетки. Это — решения вида

$$\varphi = \mathbf{p}\delta\mathbf{V}, \quad \chi = \mathbf{k}\delta\mathbf{V} \tag{81.1}$$

с постоянным вектором $\delta\mathbf{V}$ (ср. (67.19)); эти функции обращают в нуль интегралы столкновений (79.9), (79.10), если испускание или поглощение фононов электронами происходит с сохранением квазиимпульса ($\mathbf{p} = \mathbf{p}' + \mathbf{k}$).

При высоких температурах, когда квазиимпульсы как электронов, так и фононов велики ($\sim 1/d$), процессы переброса происходят, вообще говоря, с той же частотой, что и нормальные процессы. Необходимость их учета не приводит поэтому ни к каким специфическим особенностям в кинетических явлениях.

Квазиимпульсы электронов расположены вблизи ферми-поверхности и в этом смысле от температуры практически не зависят. Но при низких температурах становятся малыми квазиимпульсы фононов, в связи с чем процессы переброса могут оказаться затрудненными. В этом отношении ситуация существенно различна в случаях закрытых и открытых ферми-поверхностей.

Открытая ферми-поверхность при любом выборе элементарной ячейки в $\mathbf{p}$-пространстве (обратной решетке) пересекает границы ячейки. Ясно, что в этом случае всегда возможны процессы переброса с испусканием или поглощением фонона со сколь угодно малой энергией: уже малое изменение квазиимпульса электрона вблизи границы ячейки может «перебросить» его в соседнюю ячейку. В течении своей диффузии по ферми-поверхности все электроны в конце концов достигают границ ячейки и, таким образом, могут участвовать в процессах переброса. Следовательно, и в этом случае вероятность процессов переброса не обладает какой-либо дополнительной (по сравнению с нормальными процессами) малостью. Само разделение процессов на нормальные и с перебросом зависит от способа выбора ячейки обратной решетки и в этом смысле условно. При открытой ферми-поверхности указанное выше свойство (отсутствие особой малости частоты процессов переброса) остается при любом выборе ячейки. В этом случае целесообразно вообще отказаться от разделения актов рассеяния на два типа, рассматривая их все как нормальные (т. е. идущие с сохранением квазиимпульса), но допуская значения квазиимпульса электронов во всей обратной решетке. Для фононов же элементарная ячейка выбирается так, чтобы точка

$\mathbf{k} = 0$ находилась в ее центре; тогда все длинноволновые фононы (которые только и надо рассматривать при $T \ll \Theta$) находятся в малой части объема одной ячейки в окрестности ее центра. Исключение же паразитного решения (81.1) достигается при таком рассмотрении путем наложения на функцию распределения электронов условия периодичности в обратной решетке:

$$n(\mathbf{p} + \mathbf{b}) = n(\mathbf{p}). \tag{81.2}$$

Равновесное распределение, зависящее только от энергии электрона $\varepsilon(\mathbf{p})$, удовлетворяет этому условию автоматически ввиду периодичности функции $\varepsilon(\mathbf{p})$. Вместе с $n_0(\mathbf{p})$ периодична и производная $\partial n_0/\partial\varepsilon$, а потому должен быть периодичен и множитель $\varphi(\mathbf{p})$ в $\delta\tilde{n}$; этим требованием устраняется не удовлетворяющее ему решение (81.1).

Обратимся к случаю закрытой ферми-поверхности. В этом случае можно выбрать основную ячейку обратной решетки таким образом, чтобы ферми-поверхность нигде не пересекала ее границ[1]). Тогда процессам переброса отвечают переходы электрона между какими-либо точками ферми-поверхности в основной ячейке и ее повторения в соседней ячейке, как это показано

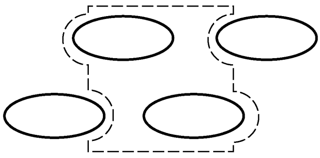


Рис. 28

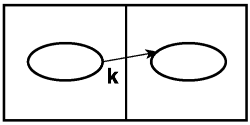


Рис. 29

схематически на рис. 29. Соединяющий эти точки вектор $\mathbf{k}$ — квазиимпульс испускаемого или поглощаемого фонона. Расстояние k, вообще говоря, велико ($k \sim 1/d$), и при низких температурах число фононов с энергией $\omega(\mathbf{k})$ экспоненциально мало — пропорционально $\exp\left(-\omega(\mathbf{k})/T\right)$. Эффективная частота актов рассеяния с перебросом в этих условиях зависит от температуры по закону

$$\nu_U \propto \exp\left\{-\frac{\omega(\mathbf{k}_{\min})}{T}\right\}, \tag{81.3}$$

[1]) Однако, если ферми-поверхность состоит из нескольких замкнутых полостей, то для этого может оказаться необходимым определить основную ячейку не как параллелепипед с плоскими гранями. Это пояснено схематически на рис. 28 на примере плоской решетки с двумя неэквивалентными замкнутыми полостями «ферми-поверхности». Штриховой линией показана основная ячейка, не пересекающая этих полостей. Никаким выбором прямоугольной ячейки нельзя было бы исключить пересечений.

где $\mathbf{k}_{\min}$ — значение квазиимпульса фонона (среди всех векторов указанного типа), для которого энергия $\omega(\mathbf{k})$ имеет минимальное значение. Здесь существенно, конечно, что скорость электронов много больше скорости фононов ($v_F \gg u$). Именно поэтому нельзя уменьшить экспоненту в (81.3), изменяя длину вектора $\mathbf{k}$ путем удаления от ферми-поверхности. Хотя энергия фонона может при этом уменьшиться на величину $\sim u\delta k$, но одновременно возросла бы на значительно большую величину, $\sim v_F\delta k$, энергия участвующего в процессе электрона, что привело бы в результате к уменьшению, а не увеличению ν_U. Для нахождения $\mathbf{k}_{\min}$ достаточно поэтому рассматривать ферми-поверхность как таковую, не учитывая размытия распределения вблизи нее. Фактически обычно оказываются существенными точки вблизи максимального сближения ферми-поверхности с ее повторением в соседней ячейке.

Решение (81.1) означает наличие макроскопического потока электронов в отсутствие электрического поля, т. е. бесконечную электропроводность. Экспоненциально же малая частота процессов переброса приводит к экспоненциально большой электропроводности (*R. Peierls*).

Теплопроводность же металла с закрытой ферми-поверхностью остается конечной и при пренебрежении процессами переброса. Дело в том, что коэффициент теплопроводности $\varkappa$ определяет, согласно (78.2), тепловой поток в отсутствие электрического тока; условие же $\mathbf{j} = 0$ автоматически исключает паразитное решение (81.1). Учет процессов переброса может изменить величину $\varkappa$ лишь в меру своей малости. То же самое относится и к термоэлектрическому коэффициенту α, который связывает (согласно определению (78.1)) градиент температуры с электрическим полем опять-таки при условии $\mathbf{j} = 0$ (см. задачу к § 82).

Сказанное, однако, не относится к компенсированным металлам с замкнутыми электронными и дырочными ферми-поверхностями, т. е. к металлам с одинаковыми числами электронов и дырок: $N_e = N_h$ (см. IX, § 61). Дело в том, что в этом случае решение (81.1) не связано с существованием электрического тока. Действительно, плотность тока, отвечающая этому решению, есть

$$\mathbf{j} = e\int \mathbf{v}\frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon}(\mathbf{p}\delta\mathbf{V})\frac{2d^3p}{(2\pi)^3} = e\int \frac{\partial n_0}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{p}\delta\mathbf{V})\frac{2d^3p}{(2\pi)^3} =$$
$$= e\int \frac{\partial n_0^{(e)}}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{p}\delta\mathbf{V})\frac{2d^3p}{(2\pi)^3} - e\int \frac{\partial n_0^{(h)}}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{p}\delta\mathbf{V})\frac{2d^3p}{(2\pi)^3}.$$

Первый интеграл берется по объему электронных, а второй — по объему дырочных полостей ферми-поверхности; в последнем вве-

дено распределение дырок согласно $n^{(h)} = 1 - n$. Теперь можно преобразовать интегралы по частям; возникающие при этом интегралы по поверхности граней ячейки обращаются в нуль ввиду быстрого убывания $n_0^{(e)}$ и $n_0^{(h)}$ при удалении от соответствующих ферми-поверхностей. В результате найдем, что

$$\mathbf{j} = e\delta\mathbf{V}(N_h - N_e). \tag{81.4}$$

Для компенсированного металла $\mathbf{j} = 0$.

Это значит, что электропроводность компенсированного металла конечна уже и без учета процессов переброса. Напротив, коэффициент теплопроводности и термоэлектрический коэффициент определяются именно процессами переброса и без учета последних оказались бы бесконечными, поскольку условие $\mathbf{j} = 0$ в этом случае не исключает паразитного решения (81.1).

В рассуждениях и оценках в этом (и в следующем) параграфе по существу подразумеваются простейшие предположения о форме ферми-поверхности: предполагается, что она либо закрыта, либо открыта, причем все ее характерные размеры порядка величины $1/d$. Между тем ферми-поверхности реальных металлов, вообще говоря, имеют сложную форму и могут состоять из нескольких различных листов; мы не будем останавливаться на анализе соответствующих усложнений в поведении кинетических коэффициентов реальных металлов. Так, листы открытых ферми-поверхностей в различных ячейках обратной решетки могут быть связаны тонкими (с толщиной $\Delta p \ll p_F$) перемычками. Появление в задаче малого параметра $\Delta p/p_F$ может привести к появлению новых «промежуточных» областей температуры со своими законами температурной зависимости кинетических коэффициентов. Листы замкнутых ферми-поверхностей могут подходить «аномально» близко друг к другу; это может привести к отодвиганию экспоненциального закона (81.3) в область «аномально» низких температур.

§ 82. Кинетические коэффициенты металла. Низкие температуры

В количественном исследовании кинетических явлений при низких температурах мы будем иметь в виду случай открытых ферми-поверхностей, соответственно чему не будем специально заботиться о процессах переброса.

Прежде всего покажем, что релаксация в фононной системе осуществляется (при $T \ll \Theta$) в основном за счет фонон-электронных, а не фонон-фононных столкновений.

Для оценки фонон-электронного интеграла столкновений (79.10) замечаем, что при низких температурах $\omega \sim T$, $\varepsilon - \mu \sim T$

и поэтому $N_0 \sim n_0 \sim 1$, $\partial N_0/\partial\omega \sim 1/T$. Интегрирование по d^3p производится по объему слоя толщины $\sim T/v_F$ вдоль ферми-поверхности. Ввиду малости k/p, аргумент δ-функции можно представить в виде

$$\varepsilon(\mathbf{p}) - \varepsilon(\mathbf{p}-\mathbf{k}) - \omega(\mathbf{k}) \approx \mathbf{k}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{p}} - \omega \approx \mathbf{v}_F\mathbf{k} - \omega. \tag{82.1}$$

δ-функция устраняется интегрированием по направлениям $\mathbf{p}$ (или, что то же, по направлениям $\mathbf{v}_F$) при заданном $\mathbf{k}$, что вносит в подынтегральное выражение множитель $1/v_f k$. Наконец, w оценивается по формуле (79.18). В результате найдем

$$I_{ph,e}(\chi) \sim -\chi\left(\frac{m^*}{M}\right)^{1/2} \sim -T\left(\frac{m^*}{M}\right)^{1/2}\delta N,$$

т. е. эффективная частота столкновений

$$\nu_{ph,e} \sim T\sqrt{\frac{m^*}{M}}. \tag{82.2}$$

Эффективная же частота фонон-фононных столкновений при низких температурах, согласно оценке (69.15):

$$\nu_{ph,ph} \sim T\sqrt{\frac{m^*}{M}}\left(\frac{T}{\Theta}\right)^4 \ll \nu_{ph,e}, \tag{82.3}$$

что и доказывает сделанное утверждение.

Ниже мы будем пренебрегать фонон-фононными столкновениями. Тогда кинетическое уравнение для фононов имеет вид

$$\mathbf{u}\frac{\partial N_0}{\partial\mathbf{r}} = -\frac{\omega}{T}\frac{\partial N_0}{\partial\omega}\mathbf{u}\nabla T = I_{ph,e}(\chi,\varphi). \tag{82.4}$$

Это уравнение может быть решено в явном виде относительно фононной функции χ. Поскольку $\mathbf{k}$ в этом уравнении — заданная величина, то функция $\chi_\mathbf{k}$ может быть вынесена из содержащего ее интеграла и получается

$$\chi_\mathbf{k} = -\frac{\omega}{T\nu_{ph,e}}(\mathbf{u}\nabla T) + \\ + \frac{1}{\nu_{ph,e}}\int w(n_0' - n_0)\delta(\varepsilon - \varepsilon' - \omega)(\varphi - \varphi')\frac{2d^3p}{(2\pi)^3} \equiv \chi_1 + \chi_2, \tag{82.5}$$

где

$$\nu_{ph,e} = \int w(n_0' - n_0)\delta(\varepsilon - \varepsilon' - \omega)\frac{2d^3p}{(2\pi)^3}. \tag{82.6}$$

Легко видеть, что $\chi_2 \gg \chi_1$. Действительно, из определения функции χ_2 видно, что $\chi_2 \sim \varphi$ (интегралы в числителе и знаменателе отличаются только множителем $\varphi - \varphi'$ в подынтегральном

выражении). Порядок же величины функции φ определяется кинетическим уравнением для электронов:

$$(\mathbf{v}\nabla T)\frac{\partial n_0}{\partial T} = I_{e,ph}(\varphi) \sim -\nu_{e,ph}\delta\widetilde{n} \sim -\nu_{e,ph}\frac{\varphi}{T},$$

откуда

$$\varphi \sim \frac{v_F}{\nu_{e,ph}}|\nabla T|.$$

Эффективная же частота электрон-фононных столкновений оценивается так же, как это было сделано выше для $\nu_{ph,e}$; разница состоит лишь в том, что интегрирование по d^3k в интеграле $I_{e,ph}$ производится по объему импульсного пространства $\sim (T/u)^3$ (вместо объема $\sim p_F^2 T/v_F$ при интегрировании по d^3p в интеграле $I_{ph,e}$):

$$\nu_{e,ph} \sim \frac{T^3}{\Theta^2}. \tag{82.7}$$

Наконец, заметив, что $\chi_1 \sim |\nabla T|u/\nu_{ph,e}$, находим

$$\frac{\chi_1}{\chi_2} \sim \frac{u\nu_{e,ph}}{v_F\nu_{ph,e}} \sim \frac{T^2}{\Theta^2} \ll 1, \tag{82.8}$$

что и требовалось доказать.

При вычислении электро- и теплопроводности (но не термоэлектрического коэффициента — см. ниже) можно пренебречь малой величиной χ_1. Подставив затем выражение $\chi \approx \chi_2$ из (82.5) в электрон-фононный линеаризованный интеграл столкновений (представленный в виде (79.11)), получим

$$I_{e,ph}(\varphi,\chi) = I_{e,ph}^{(1)}(\varphi) + I_{e,ph,e}(\varphi), \tag{82.9}$$

где $I_{e,ph,e}(\varphi)$ обозначает результат подстановки χ_2 в интеграл $I_{e,ph}^{(2)}(\chi)$. Первый член в (82.9) есть интеграл столкновений электронов с равновесными фононами, а второй можно назвать интегралом столкновений между электронами через посредство фононов.

Введем (как это уже делалось в § 79) в качестве независимых переменных в функции $\varphi(\mathbf{p})$ величину $\eta = \varepsilon - \mu$ и вектор $\mathbf{p}_F$, проведенный в направлении $\mathbf{p}$ и оканчивающийся на ферми-поверхности. Оба члена в (82.9) содержат в своих подынтегральных выражениях разность

$$\varphi(\eta, \mathbf{p}_F) - \varphi(\eta', \mathbf{p}'_F), \tag{82.10}$$

причем

$$\eta - \eta' = \pm\omega, \quad \mathbf{p}_F - \mathbf{p}'_F = \boldsymbol{\varkappa},$$

где $\boldsymbol{\varkappa}$ — проекция вектора $\mathbf{k}$ на плоскость, касательную к ферми-поверхности в точке $\mathbf{p}_F$.

По переменной $\mathbf{p}_F$ функция $\varphi(\eta, \mathbf{p}_F)$ существенно меняется на интервалах $\sim p_F$; разность же $\varkappa \sim k \ll p_F$. В этом смысле зависимость φ от переменной $\mathbf{p}_F$ является медленной, и в первом приближении можно положить в разности (82.10) $\mathbf{p}'_F = \mathbf{p}_F$, т. е. заменить ее на

$$\varphi(\eta, \mathbf{p}_F) - \varphi(\eta', \mathbf{p}_F). \tag{82.11}$$

Зависимость же от переменной η является сильной в том смысле, что разность $|\eta - \eta'| = \omega \sim T$ совпадает, по порядку величины, с тем интервалом, на котором функция φ существенно меняется.

Обозначим оператор, получающийся из $I_{e,ph}$ (82.9) заменой (82.10) на (82.11), через L_0; тогда $I_{e,ph}$ представится в виде

$$I_{e,ph}(\varphi) = L_0(\varphi) + L_1(\varphi),$$

причем $L_0 \gg L_1$. Кинетическое уравнение для электронов (при наличии как электрического поля, так и градиента температуры) имеет вид

$$-\left(e\mathbf{E} + \frac{\eta}{T}\nabla T\right)\mathbf{v}\frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} = L_0(\varphi) + L_1(\varphi). \tag{82.12}$$

Два члена в правой части имеют существенно различный физический смысл: первый ответствен за быструю релаксацию по энергии, а второй — за медленную, «диффузионную», релаксацию по направлениям квазиимпульса.

Отметим два очевидных свойства оператора L_0. Во-первых, он обращается в нуль для всякой функции, зависящей только от $\mathbf{p}_F$ (так как обращается в нуль разность (82.11)). Во-вторых, обращается в нуль интеграл

$$\int L_0(\varphi)\, d\eta = 0; \tag{82.13}$$

оператор L_0 описывает столкновения с изменением только энергии, и равенство (82.13) означает просто сохранение числа электронов с заданным направлением $\mathbf{p}$.

Будем искать решение кинетического уравнения в виде

$$\varphi(\eta, \mathbf{p}_F) = a(\mathbf{p}_F) + b(\eta, \mathbf{p}_F), \tag{82.14}$$

где $a(\mathbf{p}_F)$ — функция только от $\mathbf{p}_F$, причем $|a| \gg |b|$. Тот факт, что функция a (обращающая в нуль часть L_0 интеграла столкновений) велика, выражает собой быстроту процесса релаксации по энергиям. Подставив (82.14) в (82.12) и пренебрегая относительно малым членом $L_1(b)$, получим уравнение

$$-\left(e\mathbf{E} + \frac{\eta}{T}\nabla T\right)\mathbf{v}\frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} = L_0(b) + L_1(a). \tag{82.15}$$

Оба члена в его правой части, вообще говоря, одинакового порядка величины. Но при вычислении коэффициентов электро-

или теплопроводности существен каждый раз лишь один из этих членов.

В этом легко убедиться, вспомнив, что линеаризованный электрон-фононный оператор $I_{e,ph}$ (а с ним и операторы L_0 и L_1) при воздействии на функцию $\varphi(\eta, \mathbf{p}_F)$ не меняет ее четности по переменной η [1]). Имея это в виду, разделим функцию φ на четную (φ_g) и нечетную (φ_u) по η части:

$$\varphi_g = a + b_g, \quad \varphi_u = b_u$$

(независящая от η функция a по определению четна). Подставив $\varphi = \varphi_g + \varphi_u$ в (82.15) и отделив нечетные и четные по η члены уравнения, получим два уравнения:

$$-\frac{\eta}{T}\frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon}\mathbf{v}_F \nabla T = L_0(b_u) \tag{82.16}$$

$$-\frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} e\mathbf{E}\mathbf{v}_F = L_0(b_g) + L_1(a); \tag{82.17}$$

в левой части уравнений скорость $\mathbf{v}$ заменена, с достаточной точностью, независящей от η скоростью $\mathbf{v}_F$ на ферми-поверхности. Второе из этих уравнений проинтегрируем еще по η; ввиду свойства (82.13) член с L_0 в результате выпадает и остается

$$e\mathbf{E}\mathbf{v}_F = \int L_1(a)\, d\eta. \tag{82.18}$$

Тепловой поток (при $\mathbf{E} = 0$) целиком определяется решением уравнения (82.16), содержащего только оператор L_0, — как и следовало ожидать, он зависит от процессов релаксации по энергиям электронов. По решению уравнения (82.16) тепловой поток вычисляется как интеграл

$$\mathbf{q}' = \int \mathbf{v}\eta\delta\widetilde{n}\frac{2d^3p}{(2\pi)^3} \approx -\int \mathbf{v}_F \eta \frac{\partial n_0}{\partial \eta} b_u \frac{2d^3p}{(2\pi)^3}; \tag{82.19}$$

четная по η часть функции φ не дает вклада в интеграл ввиду нечетности получающегося под интегралом выражения.

Оператор L_0 — основная часть электрон-фононного интеграла столкновений. Отвечающая ему эффективная частота столкновений есть поэтому $\nu_{e,ph}$ из (82.7); об этой величине надо, точнее, говорить как об эффективной частоте столкновений по отношению к обмену энергией. Соответствующая длина пробега электронов есть $l \sim v_F/\nu_{e,ph}$. Коэффициент же теплопроводности можно оценить по газокинетической формуле (7.10): $\varkappa \sim c\bar{v}lN$. В данном случае N — плотность числа электронов,

[1]) Для оператора $I^{(1)}_{e,ph}$ это было показано в § 79. Мы не будем останавливаться на вполне аналогичном доказательстве для оператора $I_{e,ph,e}$.

c — электронная часть теплоемкости (отнесенная к одному электрону проводимости), а $\overline{v} \sim v_F$. Величины N и v_F от температуры не зависят, теплоемкость электронной ферми-жидкости пропорциональна T, а согласно (82.7) длина пробега $l \propto T^{-3}$. Поскольку вычисленный таким образом тепловой поток относится к $\mathbf{E} = 0$, коэффициент в нем есть не сам коэффициент теплопроводности $\varkappa$, а сумма $\varkappa' = \varkappa + T\sigma\alpha^2$ (см. (78.3)). Таким образом, $\varkappa' \propto T^{-2}$. Член $T\sigma\alpha^2$, однако, оказывается малым по сравнению с $\varkappa'$ (см. ниже примеч. на с. 421); поэтому и $\varkappa \propto T^{-2}$. Положив для грубой оценки

$$c \sim \frac{m^* p_F T}{N\hbar^3}$$

(обычные единицы; ср. IX, (1.15)), получим

$$\varkappa \sim \frac{\varepsilon_F p_F}{\hbar^2} \frac{\Theta^2}{T^2}. \tag{82.20}$$

Электропроводность определяется решением уравнения (82.18), содержащего только оператор L_1 — как и следовало ожидать, электрический ток зависит от процессов релаксации по направлениям квазиимпульсов электронов. В начале § 81 было отмечено, что эти процессы имеют характер диффузии вдоль ферми-поверхности. В следующем параграфе будет показано, каким образом кинетическое уравнение (82.18) может быть действительно приведено к виду уравнения диффузии. Закон же температурной зависимости электропроводности может быть выяснен уже путем следующих простых рассуждений.

Перемещение вдоль ферми-поверхности происходит малыми скачками — на расстояния $k \sim T/u$; эта величина играет роль «длины свободного пробега» в импульсном пространстве (l_p), частота же «актов рассеяния» совпадает с частотой электрон-фононных столкновений $\nu_{e,ph}$. Коэффициент диффузии вдоль ферми-поверхности можно оценить по газокинетической формуле $D \sim l\overline{v} \sim l^2\nu$, написав в ней l_p и $\nu_{e,ph}$ в качестве l и ν. Таким образом, получим (обычные единицы)

$$D_p \sim \frac{p_F^2\Theta}{\hbar}\left(\frac{T}{\Theta}\right)^5. \tag{82.21}$$

Отсюда можно найти время релаксации, которое должно фигурировать в оценке электропроводности согласно (78.16): $\sigma \sim e^2 N v_F \tau / p_F$. Это — время, за которое квазиимпульс электрона меняется на величину порядка его самого. Другими словами, за время τ электрон должен продиффундировать вдоль ферми-поверхности на расстояние $\sim p_F$. Но при диффузионном перемещении средний квадрат смещения пропорционален времени (и коэффициенту диффузии). Отсюда находим соотношение

$p_F^2 \sim D_p \tau$, и затем для проводимости (обычные единицы):

$$\sigma \sim \frac{\hbar e^2 N}{m^* \Theta} \left(\frac{\Theta}{T} \right)^5. \tag{82.22}$$

Таким образом, при низких температурах проводимость пропорциональна T^{-5} [1]).

Остановимся на вопросе о термоэлектрическом коэффициенте. Ситуация здесь аналогична той, которая имеет место при высоких температурах.

Если вычислить ток $\mathbf{j}$ по функции b_n — решению уравнения (82.16), то ввиду нечетности этой функции по переменной η интеграл обращается в первом приближении в нуль, а отличный от нуля результат получается лишь с учетом следующего по η/ε_F члена разложения подынтегрального выражения. Это приводит (как и при $T \gg \Theta$) к значению термоэлектрического коэффициента (обычные единицы)

$$\alpha^{\mathrm{I}} \sim \frac{T}{e\varepsilon_F} \tag{82.23}$$

вместо «нормального» порядка величины $\alpha \sim 1/e$ [2]).

Другой вклад в термоэлектрический коэффициент возникнет от отброшенного в (82.5) члена χ_1 в фононной функции χ; этот вклад связан с эффектом увлечения электронов фононами. Если сохранить этот член, то в интеграле столкновений (82.9) добавится член

$$I_{e,ph}^{(2)}(\chi_1) \sim \nu_{e,ph} \chi_1 \frac{\partial N_0}{\partial \omega} \sim -\nu_{e,ph} \frac{u|\nabla T|}{\nu_{ph,e} T}. \tag{82.24}$$

Этот член можно перенести затем в левую часть кинетического уравнения (82.12), где его следует сравнивать с членом

$$-\frac{\partial n_0}{\partial T} \frac{\eta}{T} (\mathbf{v} \nabla T). \tag{82.25}$$

Член (82.24) мал по сравнению с (82.25) в отношении T^2/Θ^2 (оценка, аналогичная (82.8)). Но учет этого члена приводит к появлению в решении φ кинетического уравнения слагаемого (пропорционального ∇T), которое не будет уже нечетным по η. Поэтому при вычислении соответствующего вклада в ток никаких дополнительных малостей не возникает и в термоэлектрическом коэффициенте появляется слагаемое

$$\alpha^{\mathrm{II}} \sim \frac{T^2}{e\Theta^2} \tag{82.26}$$

---

[1]) Этот результат был впервые получен *Блохом* (*F. Bloch*, 1929).

[2]) Из оценок (82.20)–(82.23) видно, что $T\alpha^2\sigma/\varkappa \sim (\Theta/\varepsilon_F)^2 \ll 1$, чем оправдывается сделанное при выводе (82.21) пренебрежение.

(*Л.Э. Гуревич*, 1946) [1]).

По мере понижения температуры частота электрон-фононных столкновений уменьшается и в конце концов главная роль в создании электро- и теплосопротивления переходит к столкновениям электронов с примесными атомами. Отметим, что ввиду различной температурной зависимости переход к «остаточному теплосопротивлению» происходит позже, чем переход к остаточному электрическому сопротивлению.

В очень чистых металлах может существовать область температур, в которой кинетические свойства металла определяются электрон-электронными столкновениями. Соответствующая длина свободного пробега в электронной жидкости в металле, как и во всякой другой ферми-жидкости, зависит от температуры как T^{-2}, причем малым параметром разложения является отношение T/ε_F (см. § 75). При $T \sim \varepsilon_F$ этот пробег должен был бы стать $\sim d$, так что

$$l_{ee} \sim d\left(\frac{\varepsilon_F}{T}\right)^2. \qquad (82.27)$$

Отсюда следует закон температурной зависимости электро- и теплопроводности

$$\sigma \propto T^{-2}, \quad \varkappa \propto T^{-1} \qquad (82.28)$$

(*Л.Д. Ландау, И.Я. Померанчук*, 1936). При понижении температуры эффективная частота ν_{ee} электрон-электронных столкновений убывает медленнее, чем частота электрон-фононных столкновений $\nu_{e,ph}$. Но поскольку малым параметром в ν_{ee} является T/ε_F, а не T/Θ, как в $\nu_{e,ph}$, электрон-электронные столкновения могут стать определяющими лишь при очень низких температурах.

Отметим также, что законы (82.28) могут в принципе относиться к случаям как открытых, так и закрытых ферми-поверхностей. Поскольку квазиимпульсы электронов велики, то необходимость в существовании процессов переброса не являет-

---

1) Здесь надо сделать следующее замечание. Ввиду малости квазиимпульса фонона, из закона сохранения энергии имеем

$$\varepsilon(\mathbf{p}) - \varepsilon(\mathbf{p}-\mathbf{k}) \approx \mathbf{v}_F\mathbf{k} \approx \pm\omega(\mathbf{k}),$$

откуда видно, что угол θ между $\mathbf{v}_F$ и $\mathbf{k}$ близок к $\pi/2$: $\cos\theta \sim \omega/(v_F k) \sim u/v_F \ll 1$. В изотропном случае направления квазиимпульса $\mathbf{k}$ и скорости $\mathbf{u}$ фонона совпадают, так что мало и произведение $\mathbf{u}\mathbf{v}_F$. Такое же произведение возникает и в интеграле, определяющем ток по функции φ, пропорциональной $\mathbf{u}\nabla T$; это обстоятельство привело бы, в изотропном случае, к дополнительной малости в α^{II}. В анизотропном же кристалле (в том числе кубической симметрии) оснований для появления такой малости, вообще говоря, нет.

ся, вообще говоря, в случае закрытых ферми-поверхностей источником какой-либо дополнительной малости.

Задача

Вычислить термоэлектрический коэффициент α для металла с закрытой ферми-поверхностью при низких температурах в пренебрежении процессами переброса.

Решение. Кинетическое уравнение для электронов:

$$-e\mathbf{E}\frac{\partial n_0}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\varepsilon-\mu}{T}\frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon}(\mathbf{v}\nabla T) = \mathrm{St}_{e,ph}\, n. \tag{1}$$

Кинетическое уравнение для фононов записываем в виде

$$-\frac{\omega}{T}\frac{\partial N_0}{\partial \mathbf{k}}\nabla T = \mathrm{St}_{ph,e}\, N, \tag{2}$$

заметив, что

$$\mathbf{u}\frac{\partial N_0}{\partial T} = -\frac{\omega}{T}\frac{\partial N_0}{\partial \omega}\mathbf{u} = -\frac{\omega}{T}\frac{\partial N_0}{\partial \mathbf{k}}.$$

Умножим уравнение (1) на $\mathbf{p}$, уравнение (2) на $\mathbf{k}$, проинтегрируем их соответственно по $2d^3p/(2\pi)^3$ и по $d^3k/(2\pi)^3$, после чего сложим оба уравнения почленно. Правая часть обратится в нуль в силу сохранения суммарного квазиимпульса электронов и фононов в отсутствие процессов переброса. В результате получим

$$\int e\left(\mathbf{E}\frac{\partial n_0}{\partial \mathbf{p}}\right)\mathbf{p}\frac{2d^3p}{(2\pi)^3} + \\ + \frac{\nabla T}{3}\int \frac{\varepsilon-\mu}{T}\frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon}(\mathbf{v}\mathbf{p})\frac{2d^3p}{(2\pi)^3} + \frac{\nabla T}{3}\int \frac{\omega}{T}\left(\frac{\partial N_0}{\partial \mathbf{k}}\mathbf{k}\right)\frac{d^3k}{(2\pi)^3} = 0; \tag{3}$$

второй и третий интегралы записаны в предположении кубической симметрии кристалла.

Первый интеграл в (3) преобразуется как при выводе (81.4) и дает $-e\mathbf{E}(N_e - N_h)$. Второй интеграл вычисляется как при выводе (78.12) и равен $-AT\nabla T$, где

$$A = \frac{\pi^2}{9}\left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\int \mathbf{v}\mathbf{p}\frac{dS}{v(2\pi)^3}\right]_{\varepsilon=\varepsilon_F}$$

(интеграл берется по изоэнергетической поверхности $\varepsilon = \mathrm{const}$). Третий интеграл после преобразования по частям принимает вид

$$-\frac{\nabla T}{3T}\int N_0(3\omega + \mathbf{k}\mathbf{u})\frac{d^3k}{(2\pi)^3}$$

(интеграл по поверхности граней ячейки обратной решетки обращается в нуль ввиду быстрого убывания функции N_0 с увеличением ω при низких температурах). Для акустических длинноволновых фононов (которые только и существенны при малых T) скорость $\mathbf{u}$ и отношение $\boldsymbol{\varkappa} = \mathbf{k}/\omega$ зависят только от направления $\mathbf{k}$ (но не от ω). Использовав для интеграла по ω известное выражение, найдем, что третий интеграл в (3) равен $-BT^3\nabla T$, где

$$B = \frac{\pi^4}{15}\sum\int\left(1+\frac{\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{u}}{3}\right)\varkappa^2\frac{do_{\mathbf{k}}}{(2\pi)^3}$$

(суммирование по трем акустическим ветвям фононного спектра).

Таким образом, равенство (3) принимает вид

$$-e\mathbf{E}(N_e - N_h) = \nabla T(AT + BT^3).$$

Сравнив его с (78.1) (при $\mathbf{j} = 0$), найдем термоэлектрический коэффициент

$$\alpha = \frac{AT + BT^3}{N_h - N_e}. \tag{4}$$

Условие $\mathbf{j}$ может быть обеспечено должным образом подобранным слагаемым вида (81.1) в решении кинетического уравнения. В соответствии со сказанным в § 81, выражение (4) конечно для некомпенсированного металла, но обращается в бесконечность при $N_e = N_h$.

§ 83. Диффузия электронов по ферми-поверхности

В этом параграфе будет показано, каким образом кинетическое уравнение задачи об электрической проводимости при низких температурах (82.17) может быть приведено к диффузионному виду [1]). Интересуясь только этой задачей, мы будем рассматривать лишь независящую от $\eta = \varepsilon - \mu$ часть функции φ и обозначать ее как $\varphi(\mathbf{p}_F)$ (вместо специального обозначения $a(\mathbf{p}_F)$ в предыдущем параграфе). Как и в § 82, будем иметь в виду случай открытых ферми-поверхностей.

Функция

$$\frac{\delta\tilde{n}}{(2\pi)^3} = -\frac{\partial n_0}{\partial\varepsilon}\frac{\varphi}{(2\pi)^3}$$

есть неравновесная добавка к распределению электронов по импульсному пространству. От него можно перейти к распределению по ферми-поверхности, написав элемент объема d^3p в виде $d\varepsilon\, dS/v$ (74.19), проинтегрировав по $d\varepsilon = d\eta$ и приближенно заменив зависящие от ε элемент площади изоэнергетической поверхности dS и скорость v их значениями dS_F и v_F на ферми-поверхности. Функция φ, по предположению, от ε не зависит, а интегрирование множителя $-\partial n_0/\partial\varepsilon$ дает 1. Таким образом, плотность распределения на ферми-поверхности дается выражением

$$\frac{\varphi(\mathbf{p}_F)}{(2\pi)^3 v_F}. \tag{83.1}$$

Для большей наглядности вывода напишем сначала кинетическое уравнение (82.17) с частной производной по времени в его левой части, как если бы распределение было нестационарным:

$$-\frac{\partial n_0}{\partial\varepsilon}\frac{\partial\varphi}{\partial t} - e\mathbf{E}\mathbf{v}_F\frac{\partial n_0}{\partial\varepsilon} = L_1(\varphi).$$

[1]) В излагаемом ниже выводе мы следуем *Р.Н. Гуржи* и *А.И. Копелиовичу* (1971).

Здесь уже опущен член с L_0, выдающий после интегрирования уравнения по $d\eta/v_F$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\varphi}{v_F} - \int L_1(\varphi)\frac{d\eta}{v_F} = -\frac{e\mathbf{E}\mathbf{v}_F}{v_F}. \qquad (83.2)$$

Первый член слева — скорость изменения плотности электронов на ферми-поверхности. Уравнение должно иметь вид уравнения непрерывности, т. е. второй член слева должен представлять собой дивергенцию от плотности потока $\mathbf{s}$ электронов на ферми-поверхности; член же с электрическим полем в правой части уравнения играет роль плотности источников и стоков. Здесь идет речь о двумерной дивергенции на искривленной поверхности; ее, однако, удобно записать в трехмерных обозначениях:

$$-\int L_1(\varphi)\frac{d\eta}{v_F} = \{\nabla_\mathbf{p} - \mathbf{n}_F(\mathbf{n}_F\nabla_\mathbf{p})\}\mathbf{s}. \qquad (83.3)$$

Здесь $\nabla_\mathbf{p}$ — обычный оператор дифференцирования по декартовым координатам в $\mathbf{p}$-пространстве, а оператор в фигурных скобках — его проекция на плоскость, касательную к ферми-поверхности в каждой заданной ее точке ($\mathbf{n}_F$ — единичный вектор нормали к поверхности)[1]). Вектор $\mathbf{s}(\mathbf{p}_F)$ задан на ферми-поверхности, но в (83.3) рассматривается формально как заданный во всем пространстве (но зависящий лишь от направления $\mathbf{p}_F$). Кинетическое уравнение (в котором опускаем теперь производную по времени) принимает вид

$$\{\nabla_\mathbf{p} - \mathbf{n}_F(\mathbf{n}_F\nabla_\mathbf{p})\}\mathbf{s} = -e\mathbf{E}\frac{\mathbf{v}_F}{v_F}. \qquad (83.4)$$

Задача состоит в нахождении потока $\mathbf{s}$ — его выражения через функцию φ.

Введем декартову систему координат в $\mathbf{p}$-пространстве с осью z по направлению нормали к ферми-поверхности в точке, в которой вычисляется $\mathbf{s}(\mathbf{p}_F)$, и с началом в этой же точке. По определению, компонента s_x потока есть разность между числом электронов, пересекающих (в 1 с) благодаря столкновениям полосу единичной ширины на плоскости yz слева направо (в положительном направлении оси x), и числом электронов, пересекающих эту полосу справа налево.

[1]) Этот оператор фигурирует в двумерном аналоге теоремы Гаусса

$$\oint \mathbf{e}\mathbf{s}\,dl = \int \{\nabla - \mathbf{n}(\mathbf{n}\nabla)\}\,\mathbf{s}\,dS.$$

Интеграл слева берется по замкнутому контуру, лежащему на заданной поверхности ($\mathbf{e}$ — единичный вектор нормали, внешней к контуру в плоскости, касательной к поверхности в данной ее точке); интеграл справа берется по участку поверхности, ограниченному контуром.

Рассмотрим разность между числом актов испускания фононов с квазиимпульсом $\mathbf{k}$ в заданном интервале d^3k электронами с квазиимпульсами в интервале d^3p и числом обратных актов поглощения таких же фононов. Она дается (с обратным знаком) первым членом подынтегрального выражения в (79.9):

$$d^3p\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{\partial N_0}{\partial\omega}w(n_0'-n_0)\delta(\varepsilon-\varepsilon'-\omega_{\mathbf{k}})(\varphi_{\mathbf{p}'}-\varphi_{\mathbf{p}}+\chi_{\mathbf{k}}), \qquad (83.5)$$

причем $\mathbf{p}=\mathbf{p}'+\mathbf{k}$ [1]. Фононная функция $\chi_{\mathbf{k}}$ здесь должна быть выражена через φ согласно (82.5):

$$\chi_{\mathbf{k}}=-\frac{1}{\nu_{ph,e}}\int w(n_0'-n_0)\delta(\varepsilon-\varepsilon'-\omega_{\mathbf{k}})(\varphi_{\mathbf{p}'}-\varphi_{\mathbf{p}})\frac{2d^3p}{(2\pi)^3} \qquad (83.6)$$

с $\nu_{ph,e}$ из (82.6).

Если $k_x<0$, то в результате испускания фонона пройдут через рассматриваемую полосу (причем в направлении слева направо) те электроны, у которых x-компонента первоначального квазиимпульса лежит в интервале

$$k_x<p_x<0; \qquad (83.7а)$$

для таких значений $\mathbf{p}$ выражение (83.5) дает положительный вклад в поток s_x. Если же $k_x>0$, то в результате испускания фонона через полосу пройдут (причем справа налево) электроны с

$$0<p_x<k_x; \qquad (83.7б)$$

соответствующий вклад в s_x отрицателен.

Из сказанного ясно, что для нахождения s_x надо: 1) проинтегрировать выражение (83.5) по единичному интервалу p_y и по всей области изменения p_z; ввиду быстрой сходимости, последнее интегрирование можно распространить от $-\infty$ до ∞; 2) проинтегрировать по интервалу (83.7) значений p_x. Но ввиду медленной зависимости всех величин от p_x вдоль ферми-поверхности, это интегрирование сводится просто к умножению на длину интервала; с учетом знака, с которым результат интегрирования должен войти в s_x, это означает просто умножение на $-k_x$; 3) наконец, надо проинтегрировать по d^3k.

---

[1]) В проведенных выше рассуждениях мы опускали множитель $(2\pi)^{-3}$ в определении поверхностной плотности (83.1). В соответствии с этим опускаем один такой множитель и в (83.5).

Напомним также, что мы условились в случае открытых ферми-поверхностей допускать значения квазиимпульса электронов во всей обратной решетке (см. § 81); поэтому закон сохранения квазиимпульса пишется без слагаемого $\mathbf{b}$.

Компонента s_y потока отличается от s_x лишь заменой в подынтегральном выражении k_x на k_y. Поэтому поток можно записать в векторном виде:

$$\mathbf{s}(\mathbf{p}_F) = -\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{\varkappa} \left\{ \frac{\partial n_0}{\partial \omega} w(n_0' - n_0) \delta(\varepsilon - \varepsilon' - \omega)(\varphi_{\mathbf{p}'} - \varphi_{\mathbf{p}} + \chi_{\mathbf{k}}) \right\} dp_z, \quad (83.8)$$

где $\boldsymbol{\varkappa}$ — проекция $\mathbf{k}$ на касательную плоскость в точке $\mathbf{p}_F$.

Прежде всего пишем $d^3k = dk_z\, d^2\varkappa$ и проводим интегрирование по k_z. Ввиду малости $\mathbf{k}$ можно преобразовать аргумент δ-функции в (83.8):

$$\delta(\varepsilon_{\mathbf{p}} - \varepsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}}) \approx \delta(\mathbf{k}\mathbf{v}_F - \omega) = \frac{1}{v_F} \delta\left(k_z - \frac{\omega}{v_F}\right)$$

(направление $\mathbf{v}_F$ совпадает с нормалью к ферми-поверхности). Интегрирование по k_z устраняет δ-функцию, одновременно заменяя везде k_z на ω/v_F. Но поскольку $\omega/v_F \sim ku/v_F \ll k$, то можно положить просто $k_z = 0$, т. е. заменить

$$\mathbf{k} \to \boldsymbol{\varkappa}. \quad (83.9)$$

Можно провести в общем виде также и интегрирование по $dp_z = d\varepsilon/v_z$, поскольку быстро меняющейся функцией ε в подынтегральном выражении является только разность

$$n_0(\varepsilon - \omega) - n_0(\varepsilon) \approx -\omega \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon};$$

интегрирование по ε превращает этот множитель в ω. После этих операций выражение (83.8) принимает вид

$$\mathbf{s}(\mathbf{p}_F) = -\frac{1}{2\pi v_F^2} \int \boldsymbol{\varkappa} \omega_{\varkappa} \frac{\partial N_0(\omega_{\varkappa})}{\partial \omega_{\varkappa}} w(\varphi_{\mathbf{p}'} - \varphi_{\mathbf{p}} + \chi_{\varkappa}) \frac{d^2\varkappa}{(2\pi)^2}. \quad (83.10)$$

Для дальнейшего преобразования интеграла пишем в нем, снова используя малость $\mathbf{k}$:

$$\varphi(\mathbf{p} - \mathbf{k}) - \varphi(\mathbf{p}) \approx -\mathbf{k}\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{p}} \approx -\boldsymbol{\varkappa}\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{p}} = -\varkappa \mathbf{t}\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{p}},$$

где $\mathbf{t} = \boldsymbol{\varkappa}/\varkappa$ — единичный вектор касательной к ферми-поверхности в направлении $\boldsymbol{\varkappa}$. Поскольку такая же разность содержится и в интеграле (83.6), то можно представить функцию $\chi(\mathbf{k})$ в виде

$$\chi(\mathbf{k}) = \boldsymbol{\varkappa}\mathbf{a}(\mathbf{t}). \quad (83.11)$$

Наконец, ввиду (79.4) представим w в виде

$$w = \varkappa M(\mathbf{p}_F, \mathbf{t}). \tag{83.12}$$

С этими обозначениями имеем

$$\mathbf{s} = -\frac{1}{2\pi v_F^2}\int \mathbf{t}\varkappa^3\omega_{\boldsymbol{\varkappa}}\frac{\partial N_0}{\partial\omega_{\boldsymbol{\varkappa}}}M\left(\mathbf{ta} - \mathbf{t}\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{p}}\right)\frac{\varkappa\, d\varkappa\, d\phi}{(2\pi)^2}, \tag{83.13}$$

где φ — полярный угол направления $\boldsymbol{\varkappa}$ в касательной плоскости.

Интегрирование по $\varkappa$ в (83.13) сводится к вычислению интеграла

$$J = \int\limits_0^\infty \varkappa^4\omega_{\boldsymbol{\varkappa}}\frac{\partial N_0}{\partial\omega_{\boldsymbol{\varkappa}}}\, d\varkappa;$$

ввиду быстрой сходимости интегрирование можно распространить до ∞. Энергия фонона с малым квазиимпульсом $\boldsymbol{\varkappa} = \varkappa\mathbf{t}$: $\omega_{\boldsymbol{\varkappa}} = u(\mathbf{t})\varkappa$. Поэтому

$$J = \frac{1}{u^5}\int\limits_0^\infty \omega^5\frac{\partial N_0}{\partial\omega}\, d\omega = -\frac{5}{u^5}\int\limits_0^\infty N_0\omega^4\, d\omega = \\ = -\frac{5T^5}{u^5}\int\limits_0^\infty \frac{x^4\, dx}{e^x - 1} = -120\zeta(5)\frac{T^5}{u^5}$$

(значение ζ-функции: $\zeta(5) = 1,037$).

Таким образом, мы приходим к следующему выражению для плотности потока электронов вдоль ферми-поверхности:

$$\mathbf{s} = -\frac{30\zeta(5)T^5}{\pi^2 v_F^2}\left\langle \frac{M(\mathbf{t})}{u^5(\mathbf{t})}\mathbf{t}\left(\mathbf{t}\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{p}} - \mathbf{ta}\right)\right\rangle, \tag{83.14}$$

где угловые скобки означают усреднение по направлениям $\mathbf{t}$ в касательной плоскости в данной точке $\mathbf{p}_F$ ферми-поверхности. Остается получить максимально упрощенное выражение для $\mathbf{a}$.

Согласно определению (83.11) из (83.6) имеем

$$\mathbf{a} = \frac{\int M(n_0' - n_0)\delta(\varepsilon - \varepsilon' - \omega)(\partial\varphi/\partial\mathbf{p})\, d^3p}{\int M(n_0' - n_0)\delta(\varepsilon - \varepsilon' - \omega)\, d^3p}$$

(сокращены общие множители в числителе и знаменателе). Интегрирование по d^3p заменяем (ср. начало этого параграфа) интегрированием по $dS_F\, d\varepsilon/v_F$. От ε зависит только множитель $n_0(\varepsilon - \omega) - n_0(\varepsilon)$, одинаковый в обоих интегралах; результаты интегрирования в числителе и знаменателе сокращаются. После

этого аргумент δ-функции пишем в виде $\mathbf{kv}_F - \omega \approx \boldsymbol{\varkappa}\mathbf{v}_F$ (пренебрегая величинами относительного порядка u/v_F). Окончательно находим

$$\mathbf{a} = \frac{\int v_F^{-2} M\delta(\mathbf{nt})(\partial\varphi/\partial\mathbf{p})\, dS_F}{\int v_F^{-2} M\delta(\mathbf{nt})\, dS_F} \tag{83.15}$$

(M — функция точки $\mathbf{p}_F$ на ферми-поверхности и направления $\mathbf{t}$; n — единичный вектор нормали). В силу наличия δ-функций, интегралы фактически берутся лишь вдоль линии на ферми-поверхности, на которой нормаль перпендикулярна направлению $\mathbf{t}$ квазиимпульса фонона.

Формулы (83.4) и (83.14), (83.15) решают задачу о приведении кинетического уравнения к диффузионному виду. Это уравнение — интегродифференциальное. Плотность потока (83.14) можно записать в виде

$$s_\alpha = -D_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p_\beta} - a_\beta\right), \tag{83.16}$$

где

$$D_{\alpha\beta} = T^5 \frac{30\zeta(5)}{\pi^2 v_F^2}\left\langle \frac{M(\mathbf{t})}{u^5(\mathbf{t})} t_\alpha t_\beta \right\rangle \tag{83.17}$$

(α, β — двумерные векторные индексы). Первый член имеет обычный дифференциальный вид с тензором коэффициентов диффузии $D_{\alpha\beta}$; этот член связан с рассеянием электронов равновесными фононами. Второй же член — интегральный; он связан с эффектом увлечения электронов неравновесными фононами.

Плотность тока вычисляется по функциям φ как интеграл

$$\mathbf{j} = -\frac{2e}{(2\pi)^3}\int \varphi\mathbf{n}\, dS_F.$$

Из уравнения (83.4) с $\mathbf{s}$ из (83.16), (83.17) ясно, что функция φ (а с нею и проводимость металла) зависит от температуры как T^{-5} — в согласии с результатом предыдущего параграфа. Обратим внимание на то, что увлечение электронов фононами не меняет этого закона, хотя и отражается на виде кинетического уравнения.

§ 84. Гальваномагнитные явления в сильных полях. Общая теория

Характерным безразмерным параметром, определяющим влияние магнитного поля на электропроводность металла, является отношение r_B/l, где r_B — ларморовский радиус орбиты электрона, а l — длина свободного пробега.

Напомним (см. IX, § 57), что движение электронов проводимости в магнитном поле практически всегда квазиклассично в

связи с очень малой величиной отношения $\hbar\omega_B/\varepsilon_F$ (где ω_B — ларморовская частота). Траекторией в импульсном пространстве является при этом контур сечения изоэнергетической поверхности $\varepsilon(\mathbf{p}) = \text{const}$ плоскостью $p_z = \text{const}$, причем ось z направлена вдоль поля. Поскольку энергии электронов близки к граничной энергии ε_F, то и изоэнергетические поверхности, о которых может здесь идти речь, близки к ферми-поверхности. Поэтому размеры траектории в импульсном пространстве совпадают с линейными размерами p_F соответствующего сечения ферми-поверхности. Размеры же траектории в обычном пространстве

$$r_B \sim \frac{cp_F}{eB}.$$

Эта величина обратно пропорциональна магнитному полю. Поэтому в гальваномагнитных явлениях надо считать слабыми поля, для которых $r_B \gg l$, а сильными — для которых

$$r_B \ll l. \tag{84.1}$$

В случае слабых магнитных полей кинетическое рассмотрение не приводит (при произвольном законе дисперсии электронов) к чему-либо новому по сравнению с результатами чисто феноменологической теории. Характер зависимости компонент тензора проводимости $\sigma_{\alpha\beta}$ от магнитного поля в этом случае соответствует просто разложению по степеням B с учетом требований, налагаемых принципом симметрии кинетических коэффициентов (см. VIII, § 21).

В сильных же магнитных полях выяснение этой зависимости требует кинетического рассмотрения. Условие сильного поля (84.1) фактически выполняется лишь при низких температурах, когда пробег l достаточно велик. При этом металл обычно находится в области своего остаточного сопротивления, связанного с рассеянием электронов на примесных атомах; этот случай мы и будем иметь в виду. Взаимодействие электронов проводимости с атомом примеси происходит на расстояниях порядка величины постоянной решетки d. Если $r_B \ll l$, но в то же время $r_B \gg d$, то наличие магнитного поля не сказывается на этом взаимодействии и тем самым — на интеграле столкновений. В этих условиях характер зависимости тензора проводимости от магнитного поля оказывается не зависящим от конкретного вида интеграла столкновений. В то же время он существенно зависит от структуры энергетического спектра электронов проводимости — от формы ферми-поверхности[1]).

Приступим к составлению кинетического уравнения, описывающего гальваномагнитные явления.

[1]) Излагаемая ниже теория принадлежит *И.М. Лифшицу*, *М.Я. Азбелю* и *М.И. Каганову* (1956).

Функцию распределения будет целесообразным выражать теперь не через декартовы составляющие квазиимпульса **p**, а через другие переменные, связанные с траекторией электрона: энергию ε, компоненту квазиимпульса p_z вдоль направления магнитного поля (ось z) и «время движения электрона по импульсной траектории» от некоторой фиксированной точки в данную. Последняя переменная (которую мы обозначим буквой τ) вводится с помощью квазиклассического уравнения движения электрона проводимости в магнитном поле

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = -\frac{e}{c}[\mathbf{vB}], \qquad \mathbf{v} = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{p}};$$

x- и y-компоненты этого уравнения:

$$\frac{dp_x}{d\tau} = -\frac{e}{c}v_yB, \qquad \frac{dp_y}{d\tau} = \frac{e}{c}v_xB. \tag{84.2}$$

Взяв сумму квадратов этих уравнений и введя элемент ds длины импульсной траектории в плоскости xy ($ds^2 = dp_x^2 + dp_y^2$), получим

$$d\tau = \frac{c}{eB}\frac{ds}{v_\perp}, \qquad v_\perp^2 = v_x^2 + v_y^2; \tag{84.3}$$

интегрированием этого равенства и определяется новая переменная τ через старые p_x, p_y, p_z.

Левая часть кинетического уравнения в новых переменных принимает вид [1])

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\partial n}{\partial\varepsilon}\dot{\varepsilon} + \frac{\partial n}{\partial p_z}\dot{p}_z + \frac{\partial n}{\partial\tau}\dot{\tau}. \tag{84.4}$$

Как обычно, функцию распределения будем искать в виде

$$n = n_0(\varepsilon) + \delta\tilde{n}(\varepsilon, p_z, \tau). \tag{84.5}$$

В конце § 74 было показано, что в постоянных электрическом и магнитном полях линеаризованное по $\delta\tilde{n}$ кинетическое уравнение для квазичастиц ферми-жидкости пишется так же, как оно писалось бы для частиц ферми-газа. При этом производные $\dot{\varepsilon}$, $\dot{p}_z$, $\dot{\tau}$ надо выразить с помощью уравнения движения отдельного электрона в электромагнитном поле:

$$\dot{\mathbf{p}} = -e\mathbf{E} - \frac{e}{c}[\mathbf{vB}]. \tag{84.6}$$

Для производной $\dot{\varepsilon}$ имеем отсюда

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{p}}\dot{\mathbf{p}} = -e\mathbf{vE};$$

[1]) Использование квазиклассического кинетического уравнения означает пренебрежение эффектами, связанными с квантованием уровней энергии в магнитном поле. Эти эффекты будут обсуждены ниже, в § 90.

магнитное поле выпадает в соответствии с тем, что оно не производит работы над зарядом. Далее, при поле $\mathbf{B}$, направленном по оси z, имеем $\dot{p}_z = -eE_z$. Наконец, из сравнения уравнений (84.2) и (84.6) видно, что производная $d\tau/dt$ отличается от 1 только за счет поля $\mathbf{E}$ (учет этого отличия не понадобится).

Поскольку равновесная функция распределения n_0 зависит только от ε, а ε, p_z, τ — независимые переменные, то $\partial n_0/\partial p_z = 0$, $\partial n_0/\partial\tau = 0$. Электрическое поле рассматривается как сколь угодно малое; при линеаризации кинетического уравнения члены, содержащие одновременно малые величины $\delta\widetilde{n}$ и $\mathbf{E}$, следует опустить. Тогда выражение (84.4) сводится к

$$\frac{dn}{dt} \approx -\frac{\partial n_0}{\partial\varepsilon}e\mathbf{vE} + \frac{\partial\delta\widetilde{n}}{\partial\tau}.$$

Представим $\delta\widetilde{n}$ в виде

$$\delta\widetilde{n} = \frac{\partial n_0}{\partial\varepsilon}e\mathbf{Eg}, \qquad \mathbf{g} = \mathbf{g}(\varepsilon, p_z, \tau) \tag{84.7}$$

(ср. (78.6)). Тогда окончательно левая часть кинетического уравнения примет вид

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\partial n_0}{\partial\varepsilon}e\mathbf{E}\left(-\mathbf{v} + \frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\tau}\right). \tag{84.8}$$

Интеграл же столкновений в правой части кинетического уравнения после линеаризации запишем в виде

$$\operatorname{St} n = \frac{\partial n_0}{\partial\varepsilon}e\mathbf{E}I(\mathbf{g}) \tag{84.9}$$

(напомним, что в интеграле столкновений, описывающем упругое рассеяние на примесных атомах, любой множитель в $\delta\widetilde{n}$, зависящий только от ε, может быть вынесен из-под знака интеграла); конкретный вид линейного интегрального оператора $I(\mathbf{g})$ нам не понадобится.

Приравняв друг другу выражения (84.8) и (84.9), получим окончательно кинетическое уравнение, определяющее функцию $\mathbf{g}$:

$$\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\tau} - I(\mathbf{g}) = \mathbf{v}. \tag{84.10}$$

Тензор проводимости дается интегралом (78.9):

$$\sigma_{\alpha\beta} = -e^2\int\frac{\partial n_0}{\partial\varepsilon}v_\alpha g_\beta\frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Переход в этом интеграле к новым переменным осуществляется заменой $d^3p \to |J|\, d\varepsilon\, dp_z\, d\tau$, где

$$J = \frac{\partial(p_x, p_y, p_z)}{\partial(\tau, \varepsilon, p_z)}$$

— якобиан преобразования. Его легко найти прямо из уравнений (84.2), определяющих переменную τ. Записав обе части, скажем, первого из этих уравнений, в виде якобианов,

$$\frac{\partial(p_x, \varepsilon, p_z)}{\partial(\tau, \varepsilon, p_z)} = -\frac{eB}{c}\frac{\partial(\varepsilon, p_x, p_z)}{\partial(p_y, p_x, p_z)},$$

и умножив обе части равенства на $\dfrac{\partial(p_y, p_x, p_z)}{\partial(\varepsilon, p_x, p_z)}$, найдем $|J| = eB/c$.

Пренебрегая температурным размытием распределения n_0, полагаем, как обычно, $\partial n_0/\partial\varepsilon = -\delta(\varepsilon - \varepsilon_F)$, после чего получим окончательное выражение

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{2e^3B}{c(2\pi\hbar)^3}\int v_\alpha g_\beta\, d\tau\, dp_z, \tag{84.11}$$

где интегрирование производится по ферми-поверхности.

Согласно определению (84.3), переменная τ пропорциональна $1/B$. Поэтому член $\partial\mathbf{g}/\partial\tau$ в линейном уравнении (84.10) пропорционален B и тем самым велик по сравнению с остальными членами. Это дает возможность решать уравнение последовательными приближениями, в виде ряда по степеням $1/B$:

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}^{(0)} + \mathbf{g}^{(1)} + \ldots, \tag{84.12}$$

где $\mathbf{g}^{(n)} \propto B^{-n}$ [1]. Для членов этого ряда имеем уравнения

$$\frac{\partial\mathbf{g}^{(0)}}{\partial\tau} = 0,\quad \frac{\partial\mathbf{g}^{(1)}}{\partial\tau} = I(\mathbf{g}^{(0)}) + \mathbf{v},\quad \frac{\partial\mathbf{g}^{(2)}}{\partial\tau} = I(\mathbf{g}^{(1)}),\ \ldots \tag{84.13}$$

Решение этих уравнений:

$$\begin{gathered}\mathbf{g}^{(0)} = \mathbf{C}^{(0)},\\ \mathbf{g}^{(1)} = \int_0^\tau [I(\mathbf{C}^{(0)}) + \mathbf{v}(\tau)]\, d\tau + \mathbf{C}^{(1)},\\ \mathbf{g}^{(2)} = \int_0^\tau I(\mathbf{g}^{(1)})\, d\tau + \mathbf{C}^{(2)},\ \ldots,\end{gathered} \tag{84.14}$$

где $\mathbf{C}^{(0)}$, $\mathbf{C}^{(1)}$, ... — функции только от ε и p_z.

[1]) Подобно тому, как это делалось в § 59 при вычислении кинетических коэффициентов плазмы в сильном магнитном поле.

Функция $\mathbf{g}$ должна удовлетворять определенным условиям. Если импульсные траектории электронов (т. е. контуры сечений ферми-поверхности плоскостями $p_z = \text{const}$) замкнуты, то движение электронов периодично; соответственно должна быть периодична по переменной τ (с периодом T, зависящим от p_z) также и функция $\mathbf{g}(\varepsilon, p_z, \tau)$. Если же траектория открыта, то движение в импульсном пространстве инфинитно и функция $\mathbf{g}$ должна удовлетворять лишь условию конечности.

Усредним уравнения (84.13) по τ. Если функции $\mathbf{g}$ периодичны, то среднее по периоду значение

$$\overline{\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \tau}} = \frac{1}{T} \int\limits_0^T \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \tau}\, d\tau = \frac{\mathbf{g}(T) - \mathbf{g}(0)}{T}$$

равно нулю, так как $\mathbf{g}(T) = \mathbf{g}(0)$. Если функции $\mathbf{g}$ не периодичны, то усреднение производится по бесконечному интервалу τ и среднее значение обращается в нуль ввиду конечности $\mathbf{g}$. Таким образом, во всех случаях усреднение уравнений дает

$$\overline{I(\mathbf{g}^{(0)})} \equiv \overline{I(\mathbf{C}^{(0)})} = -\overline{\mathbf{v}}, \quad \overline{I(\mathbf{g}^{(1)})} = 0, \ \ldots\,; \tag{84.15}$$

эти соотношения определяют в принципе функции $\mathbf{C}^{(0)}$, $\mathbf{C}^{(1)}$, ...

Переходя к вычислению тензора проводимости, напомним предварительно некоторые общие его свойства, известные из феноменологической теории (см. VIII, § 21).

Согласно принципу симметрии кинетических коэффициентов,

$$\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{B}) = \sigma_{\beta\alpha}(-\mathbf{B}). \tag{84.16}$$

Тензор $\sigma_{\alpha\beta}$ можно разделить на симметричную и антисимметричную части:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma^{(s)}_{\alpha\beta} + \sigma^{(a)}_{\alpha\beta}. \tag{84.17}$$

Для них имеем, с учетом (85.16):

$$\begin{aligned} \sigma^{(s)}_{\alpha\beta}(\mathbf{B}) &= \sigma^{(s)}_{\beta\alpha}(\mathbf{B}) = \sigma^{(s)}_{\alpha\beta}(-\mathbf{B}), \\ \sigma^{(a)}_{\alpha\beta}(\mathbf{B}) &= -\sigma^{(a)}_{\beta\alpha}(\mathbf{B}) = -\sigma^{(a)}_{\alpha\beta}(-\mathbf{B}). \end{aligned} \tag{84.18}$$

Таким образом, компоненты $\sigma^{(s)}_{\alpha\beta}$ являются четными, а $\sigma^{(a)}_{\alpha\beta}$ — нечетными функциями $\mathbf{B}$. Вместо антисимметричного тензора $\sigma^{(a)}_{\alpha\beta}$ можно ввести дуальный ему аксиальный вектор $\mathbf{a}$ по определению

$$a_{xy} = a_z, \quad a_{zx} = a_y, \quad a_{yz} = a_x.$$

Тогда компоненты вектора плотности тока представятся в виде

$$j_\alpha = \sigma_{\alpha\beta} E_\beta = \sigma^{(s)}_{\alpha\beta} E_\beta + [\mathbf{Ea}]_\alpha. \tag{84.19}$$

Диссипация энергии при протекании тока определяется лишь симметричной частью тензора проводимости: $\mathbf{jE} = \sigma^{(s)}_{\alpha\beta} E_\alpha E_\beta$. Таким же образом можно разложить и обратный тензор $\rho_{\alpha\beta} = \sigma^{-1}_{\alpha\beta}$ на симметричную часть и антисимметричную часть, дуальную аксиальному вектору $\mathbf{b}$. Тогда $\mathbf{E}$ выразится через $\mathbf{j}$ формулой

$$E_\alpha = \rho^{(s)}_{\alpha\beta} j_\beta + [\mathbf{jb}]_\alpha. \tag{84.20}$$

Член $[\mathbf{Ea}]$ в токе, или член $[\mathbf{jb}]$ в электрическом поле, описывает *эффект Холла.*

§ 85. Гальваномагнитные явления в сильных полях. Частные случаи

Замкнутые траектории. Начнем со случаев, когда все (т. е. при всех p_z) импульсные траектории электронов при заданном направлении $\mathbf{B}$ замкнуты. Траектории всегда замкнуты при любом направлении $\mathbf{B}$ при замкнутых ферми-поверхностях. Что касается открытых ферми-поверхностей, то здесь возможны как случаи, когда траектории замкнуты при любом направлении $\mathbf{B}$, так и случаи, когда сечения замкнуты лишь при определенных (или в определенных интервалах) направлениях поля.

При движении по замкнутой (в плоскости xy) траектории средние значения скоростей в этой плоскости равны нулю: $\overline{v}_x = \overline{v}_y = 0$; это ясно из уравнений движения (84.2) с учетом того, что при прохождении траектории p_x и p_y возвращаются к исходным значениям. Значение же $\overline{v}_z$ всегда отлично от нуля ввиду инфинитности движения в направлении поля. Первое из равенств (84.15) дает теперь

$$\overline{I(C_x^{(0)})} = \overline{I(C_y^{(0)})} = 0,$$

откуда $C_x^{(0)} = C_y^{(0)} = 0$ [1]). Решение (84.14) принимает в этом случае вид

$$\begin{aligned} g_x &= \frac{c}{eB} p_y + C_x^{(1)} + g_x^{(2)} + \ldots, \\ g_y &= -\frac{c}{eB} p_x + C_y^{(1)} + g_y^{(2)} + \ldots, \\ g_z &= C_z^{(0)} + g_z^{(1)} + \ldots \end{aligned} \tag{85.1}$$

[1]) Нет никаких оснований для того, чтобы линейное однородное уравнение $\overline{I(C)} = 0$ имело бы какие-либо решения помимо тривиального $C = 0$.

(интегрирование функции $\mathbf{v}(\tau)$ произведено с помощью уравнений (84.2)).

Компоненты тензора проводимости вычисляются по формуле (84.11). Так,

$$\sigma_{xx} = \frac{2e^2}{(2\pi\hbar)^3} \int\oint \frac{dp_y}{d\tau} \left[\frac{c}{eB}p_y + C_x^{(1)} + \chi_x^{(2)}\right] d\tau\, dp_z$$

(v_x снова выражено с помощью (84.2)). Поскольку $C_x^{(1)}$ не зависит от τ, интегрирование по τ в первых двух членах сводится к интегрированию производных $dp_y^2/d\tau$ и $dp_y/d\tau$ и дает нуль. Таким образом, вклад в интеграл дает лишь член с $g_x^{(2)}$, так что $\sigma_{xx} \backsim B^{-2}$.

Далее, вычисляем

$$\sigma_{xy} = \frac{2e^2}{(2\pi\hbar)^3} \int\oint \frac{dp_y}{d\tau} \left[-\frac{c}{eB}p_x + C_y^{(1)}\right] d\tau\, dp_z.$$

Интегрирование второго члена снова дает нуль, а в первом имеем

$$\oint p_x \frac{dp_y}{d\tau}\, d\tau = \int p_x\, dp_y = \pm S(p_z),$$

где $S(p_z)$ — площадь сечения ферми-поверхности плоскостью $p_z = \text{const}$. Знаки + и – относятся соответственно к случаям, когда внутри контура находится область меньших или больших энергий, т. е. когда замкнутая траектория является электронной или дырочной (см. IX, § 61); обозначим площадь S в первом случае как S_e, а во втором — как S_h. Разница в знаках в этих случаях возникает от изменения направления обхода траектории. Интегрирование площади S по p_z дает объем Ω импульсного пространства, заключенный внутри ферми-поверхности (если замкнутые траектории расположены на открытой ферми-поверхности, то Ω — объем, ограниченный этой поверхностью и гранями ячейки обратной решетки). Таким образом,

$$\sigma_{xy} = \frac{ec}{B} \frac{2(\Omega_h - \Omega_e)}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{ec}{B}(N_h - N_e), \tag{85.2}$$

где Ω_e и Ω_h — объемы электронных и дырочных полостей ферми-поверхности. Величины

$$N_e = \frac{2\Omega_e}{(2\pi\hbar)^3}, \quad N_h = \frac{2\Omega_h}{(2\pi\hbar)^3}$$

представляют собой соответственно числа занятых электронных состояний с энергиями $\varepsilon < \varepsilon_F$ и свободных состояний с $\varepsilon > \varepsilon_F$

(отнесенные к единице объема кристалла). В случае замкнутых ферми-поверхностей эти понятия имеют вполне определенный смысл и величины N_e и N_h представляют собой характеристику электронного спектра металла, не зависящую от направления поля **B**; в случае же открытых поверхностей смысл этих величин становится более условным, так как они могут оказаться зависящими от направления **B**.

Выражение (85.2) — нечетная функция **B** и потому входит в антисимметричную часть тензора $\sigma_{\alpha\beta}$ [1]). Компонента же $\sigma_{xy}^{(s)}$ симметричной части тензора дается следующим членом разложения σ_{xy}, пропорциональным B^{-2}.

Аналогичным образом определяется зависимость от B остальных компонент $\sigma_{\alpha\beta}$. Так,

$$\sigma_{zz} = \frac{2e^3 B}{(2\pi\hbar)^3 c} \int\oint v_z C_z^{(0)}\, d\tau\, dp_z.$$

Интегрирование по τ вносит множитель B^{-1}, а $C_z^{(0)}$ от B не зависит; поэтому и σ_{zz} не зависит от B.

В результате найдем, что

$$\sigma_{zz}^{(s)} = \text{const}, \text{ остальные } \sigma_{\alpha\beta}^{(s)} \propto B^{-2}, \quad \mathbf{a} \propto B^{-1}. \tag{85.3}$$

При этом все компоненты $\sigma_{\alpha\beta}^{(s)}$ и **a** зависят от вида интеграла столкновений, за исключением лишь

$$a_z = \frac{ec}{B}(N_h - N_e).$$

Отметим, что все $\sigma_{\alpha\beta}$, за исключением лишь σ_{zz}, стремятся при $B \to \infty$ к нулю. Физическая причина такого поведения состоит в локализации электронов на орбитах, малых по сравнению с длиной пробега; конечность же σ_{zz} связана с тем, что движение электронов вдоль магнитного поля всегда остается инфинитным.

Малым параметром разложения является отношение r_B/l. Поэтому пропорциональные B^{-2} компоненты $\sigma_{\alpha\beta}^{(s)}$ можно оценить по порядку величины как

$$\sigma^{(s)} \sim \sigma_0 \left(\frac{r_B}{l}\right)^2, \quad \sigma_0 \sim \frac{Ne^2 l}{p_F}.$$

Обратим внимание на то, что $\sigma^{(s)} \propto 1/l$; это значит, что при увеличении длины пробега поперечная проводимость в магнитном

---

[1]) Из вывода кинетического уравнения ясно, что B входит в него не как абсолютная величина вектора **B**, а как проекция $B_z = B$. Замена $\mathbf{B} \to -\mathbf{B}$ требует поэтому и замены $B \to -B$ в написанных формулах.

поле стремится к нулю, а не к бесконечности, как в отсутствие поля.

Компоненты же антисимметричной части тензора $\sigma_{\alpha\beta}$ оцениваются как

$$\sigma^{(a)} \sim \frac{\sigma_0 r_B}{l} \sim \frac{ecN}{B}.$$

Подчеркнем, однако, что независимость этой оценки от l не означает независимости точных значений $\sigma^{(a)}_{\alpha\beta}$ от конкретного вида интеграла столкновений (исключение составляет лишь $\sigma^{(a)}_{xy}$); точное вычисление тензора $\sigma_{\alpha\beta}$ требовало бы полного определения функций $\mathbf{C}^{(1)}$ и $\mathbf{g}^{(2)}$ путем решения конкретного кинетического уравнения.

Из (85.3) можно найти также предельные законы зависимости от B компонент обратного тензора $\rho_{\alpha\beta} = \sigma^{-1}_{\alpha\beta}$ [1]). Сохраняя лишь члены наиболее низкого порядка по $1/B$, найдем

$$\rho^{(s)}_{\alpha\beta} = \text{const}, \quad b_x, b_y = \text{const}, \quad b_z \propto B, \tag{85.4}$$

причем все эти величины зависят от вида интеграла столкновений, за исключением лишь

$$b_z \approx -\frac{1}{a_z} = \frac{B}{ec(N_e - N_h)}. \tag{85.5}$$

Все компоненты $\rho^{(s)}_{\alpha\beta}$ стремятся при $B \to \infty$ к постоянным пределам.

Особого рассмотрения требуют компенсированные металлы, в которых $N_e = N_h$. В этом случае выражение (85.2) обращается в нуль и разложение $\sigma^{(a)}_{xy}$ начинается с члена, пропорционального B^{-3}. Таким образом, в этом случае

$$a_x, a_y \propto B^{-1}, \quad a_z \propto B^{-3}; \tag{85.6}$$

зависимость же $\sigma^{(s)}_{\alpha\beta}$ от $\mathbf{B}$ остается прежней. Для обратного тен-

[1]) Обратный тензор должен вычисляться, разумеется, по сумме $\sigma_{\alpha\beta} = \sigma^{(s)}_{\alpha\beta} + \sigma^{(a)}_{\alpha\beta}$ и лишь затем разделяться на симметричную и антисимметричную части. Таким образом, можно получить формулы

$$\rho^{(s)}_{\alpha\beta} = \frac{1}{\sigma}\left\{\sigma^{(s)-1}_{\alpha\beta}\sigma^{(s)} + a_\alpha a_\beta\right\}, \quad b_\alpha = -\frac{1}{\sigma}\sigma^{(s)}_{\alpha\beta} a_\beta,$$

где $\sigma = \sigma^{(s)} + \sigma^{(s)}_{\alpha\beta} a_\alpha a_\beta$ — определитель тензора $\sigma_{\alpha\beta}$, а $\sigma^{(s)}$ — определитель его симметричной части (см. задачу в VIII, § 21).

зора получим теперь

$$\begin{gathered}\rho_{zz}^{(s)} = \text{const}, \quad \rho_{yz}^{(s)},\ \rho_{xz}^{(s)} = \text{const}, \\ \rho_{xy}^{(s)},\ \rho_{xx}^{(s)},\ \rho_{yy}^{(s)} \propto B^2, \quad \mathbf{b} \propto B.\end{gathered} \tag{85.7}$$

Открытые траектории. Для металлов с открытыми ферми-поверхностями, допускающими открытые траектории, возможны разнообразные случаи, из которых мы рассмотрим здесь лишь один, иллюстрирующий характерные особенности возникающей ситуации.

Рассмотрим ферми-поверхность типа «гофрированного цилиндра», проходящего непрерывно из одной ячейки обратной решетки в следующие (рис. 30). Если магнитное поле не перпендикулярно оси цилиндра, все сечения замкнуты; при этом асимптотическая зависимость $\sigma_{\alpha\beta}$ от $\mathbf{B}$ дается прежним законом (85.3).

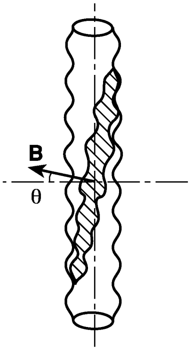


Рис. 30

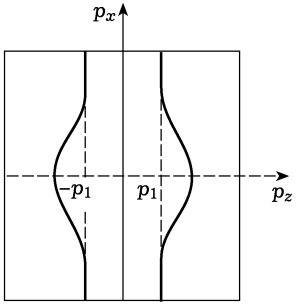


Рис. 31

Если же магнитное поле перпендикулярно оси цилиндра, то существуют открытые сечения. Как всегда, выбираем ось z вдоль направления поля; ось же x в этом случае направим вдоль оси цилиндра (на рис. 31 изображен разрез участка ферми-поверхности в одной ячейке). Траектории открыты при $|p_z| < |p_1|$, причем инфинитны в направлении оси p_x. Средние значения скорости:

$$\overline{v}_x = \frac{c}{eB}\overline{\frac{dp_y}{d\tau}} = 0, \quad \overline{v}_y = -\frac{c}{eB}\overline{\frac{dp_x}{d\tau}} \neq 0,$$

поскольку p_x меняется неограниченно; как всегда, $\overline{v}_z \neq 0$. Из компонент вектора $\mathbf{C}^{(0)}$ в решении кинетического уравнения будут теперь отличны от нуля $C_y^{(0)}$ и $C_z^{(0)}$, и потому в решении кинетического уравнения (85.1) вторая строка заменится на

$$g_y = C_y^{(0)} + g_y^{(1)} + \ldots$$

Аналогично тому, как это было сделано выше, найдем теперь, что

$$\sigma_{xx}^{(s)} \propto B^{-2}, \text{ остальные } \sigma_{\alpha\beta}^{(s)} = \text{const}, \quad a_x \propto B^{-3}, \quad a_y, a_z \propto B^{-1}. \tag{85.8}$$

Для обратного тензора получим отсюда

$$\rho_{xx}^{(s)} \propto B^2, \text{ остальные } \rho_{\alpha\beta}^{(s)} = \text{const}, \quad b_x \propto B^{-1}, \quad b_y, b_z \propto B. \tag{85.9}$$

Обратим внимание на резкую анизотропию сопротивления в плоскости, перпендикулярной магнитному полю: сопротивление ρ_{yy} вдоль оси y стремится к постоянному пределу, в то время как в направлении оси x оно возрастает с увеличением поля пропорционально его квадрату [1]).

Другой характерной особенностью гальваномагнитных свойств металлов с открытой поверхностью Ферми является их резкая зависимость от направления сильного магнитного поля. В данном случае изменение имеет место при приближении направления **B** к плоскости, перпендикулярной оси цилиндра, когда происходит переход от законов (85.3), (85.4) к законам (85.8), (85.9). Когда направление **B** наклонено под малым углом θ к указанной плоскости (см. рис. 30), размеры импульсной траектории электрона становятся большими — порядка p_F/θ, где p_F — поперечные размеры цилиндрической ферми-поверхности. Соответственно становится большим и размер траектории в истинном пространстве — порядка r_B/θ, где r_B — ларморовский радиус, отвечающий импульсу p_F. В области углов, для которых $r_B/\theta l \sim 1$, использованное выше разложение по степеням r_B/l становится неприменимым; в ней и происходит изменение зависимости сопротивления от поля.

Подчеркнем, что во всем изложении речь шла, разумеется, о монокристаллах. В поликристаллическом образце происходит усреднение анизотропных гальваномагнитных свойств, зависящее от распределения кристаллитов по направлениям.

Аналогичным образом можно было бы рассмотреть термомагнитные явления в металле в сильном магнитном поле. При этом оказалось бы, в частности, что компоненты тензора электронной теплопроводности стремятся при $B \to \infty$ к нулю. Но в этих условиях становится существенным перенос тепла фононами, возникает необходимость в учете также и электрон-фононного взаимодействия и вся картина сильно усложняется.

---

[1]) Напомним (см. IX, § 57), что траектория электрона в плоскости xy истинного пространства отличается от траектории в плоскости $p_x p_y$ импульсного пространства лишь изменением масштаба и поворотом на 90°. Поэтому в данном случае движение электрона в реальном пространстве инфинитно в направлении оси y.

§ 86. Аномальный скин-эффект

Как известно из макроскопической электродинамики, переменное электромагнитное поле затухает в глубь проводника; вместе с полем оказывается сконцентрированным в поверхностном слое проводника также и вызываемый им электрический ток (так называемый *скин-эффект*). Напомним некоторые относящиеся сюда формулы (см. VIII, § 45, 46).

Квазистационарное электромагнитное поле в металле удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{86.1}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0 \tag{86.2}$$

(металл предполагается немагнитным, так что в нем $\mathbf{H} = \mathbf{B}$). При этом, разумеется, подразумевается выполненным общее условие применимости макроскопических уравнений: расстояния δ, на которых поле существенно меняется, велики по сравнению с атомными размерами. Если, сверх того, эти расстояния велики также и по сравнению с длиной свободного пробега электронов проводимости l, то связь плотности тока $\mathbf{j}$ с полем $\mathbf{E}$ дается линейными соотношениями, связывающими их значения в одной и той же точке пространства: $j_\alpha = \sigma_{\alpha\beta}E_\beta$, где $\sigma_{\alpha\beta}$ — тензор проводимости. Скин-эффект в этих условиях называют *нормальным*. Рассмотрим его, предполагая среду изотропной (или кристаллом кубической симметрии); тогда тензор $\sigma_{\alpha\beta}$ сводится к скаляру, так что $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$.

Предположим простейшие геометрические условия, когда металл занимает полупространство ($x > 0$), ограниченное плоскостью $x = 0$. К металлу приложено однородное внешнее электрическое поле, параллельное его поверхности и меняющееся со временем с частотой ω. Уравнения (86.1), (86.2) принимают вид

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = \frac{i\omega}{c}\mathbf{B}, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\sigma\mathbf{E}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0. \tag{86.3}$$

В силу симметрии задачи, распределения всех величин в металле будут функциями только одной координаты x. Из первого уравнения (86.3) следует тогда, что магнитное поле $\mathbf{B}$ везде параллельно плоскости границы.

Мы удовлетворим всем уравнениям, предположив, что и электрическое поле $\mathbf{E}$ лежит везде в той же плоскости. При этом автоматически выполнится и необходимое граничное условие исчезновения нормальной к поверхности металла компоненты тока:

из $E_x = 0$ следует, что везде и $j_x = 0$ [1]).

Исключая $\mathbf{B}$ из первых двух уравнений (86.3), находим

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{E} - \Delta\mathbf{E} = \frac{4\pi i\omega\sigma}{c^2}\mathbf{E}.$$

Для тангенциального поля, зависящего только от x, имеем $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$ и уравнение принимает вид

$$\mathbf{E}'' = -\frac{4\pi i\omega\sigma}{c^2}\mathbf{E}, \tag{86.4}$$

где штрих означает дифференцирование по x. Его решение, обращающееся в нуль при $x \to \infty$, есть

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} e^{(i-1)x/\delta}, \tag{86.5}$$

где $\mathbf{E}_0$ — амплитуда поля на поверхности металла, а

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega}}. \tag{86.6}$$

Величину δ называют *глубиной проникновения* поля; она убывает с увеличением частоты поля. Магнитное поле в металле затухает по тому же закону; из уравнений (86.3) следует, что $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ связаны везде соотношением $\mathbf{E} = \zeta[\mathbf{Bn}]$, где $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности (направленной внутрь металла, т. е. в положительном направлении оси x), а

$$\zeta = (1-i)\frac{\omega\delta}{2c} = (1-i)\sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}}. \tag{86.7}$$

Этим соотношением связаны, в частности, и значения полей на самой поверхности металла:

$$\mathbf{E}_0 = \zeta[\mathbf{B}_0\mathbf{n}]. \tag{86.8}$$

Величину ζ называют *поверхностным импедансом* металла. Напомним, что его вещественная часть определяет диссипацию энергии поля в металле (см. VIII, § 67).

Для того чтобы имела место связь $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$ между током и электрическим полем в той же точке пространства и в тот же момент времени, длина свободного пробега электронов l и время свободного пробега $\tau \sim l/v_F$ должны удовлетворять условиям $l \ll \delta$ и $\tau\omega \ll 1$: l должно быть мало по сравнению с характерным расстоянием изменения поля δ, а τ мало по сравнению с периодом поля. При нарушении первого из этих условий связь

[1]) В анизотропной среде ситуация меняется. Для выполнения указанного условия должно быть тогда введено наряду с тангенциальным также и нормальное к поверхности электрическое поле.

между током и полем перестает быть локальной, возникает пространственная дисперсия проводимости. Нарушение же второго условия приводит к появлению частотной дисперсии проводимости. Для выяснения связи между током и полем надо обратиться тогда к кинетическому уравнению.

Таким образом, характер скин-эффекта зависит от относительной величины трех характерных размеров: δ, l и v_F/ω. Нормальному скин-эффекту, описываемому формулами (86.5)–(86.8), отвечает область наиболее низких частот, при которых

$$l \ll \delta, \quad l \ll \frac{v_F}{\omega}. \tag{86.9}$$

При увеличении частоты поля или при увеличении длины пробега (при уменьшении температуры металла) глубина проникновения уменьшается. В металлах обычно первым нарушается условие $\delta \gg l$ и связь тока с полем становится нелокальной; о скин-эффекте в этих условиях говорят как об *аномальном.* Мы рассмотрим в этом параграфе предельно аномальный случай, когда

$$\delta \ll l, \quad \delta \ll \frac{v_F}{\omega}. \tag{86.10}$$

Соотношение же между l и v_F/ω может быть произвольным [1]).

Решение граничной задачи о скин-эффекте мы начнем со вспомогательной задачи о связи в неограниченном металле между током и переменным во времени и пространстве электрическим полем

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}.$$

Волновой вектор поля предполагается удовлетворяющим неравенствам

$$\frac{1}{k} \ll l, \quad \frac{1}{k} \ll \frac{v_F}{\omega}, \tag{86.11}$$

отвечающим условиям (86.10). Вместе с полем по тому же закону будет меняться и добавка δn к функции распределения электронов.

В силу условия $v_F k \gg v_F/l \sim 1/\tau$, в кинетическом уравнении можно пренебречь интегралом столкновений $\mathrm{St}\, n \sim \delta n/\tau$ по сравнению с членом с пространственными производными $\mathbf{v}\partial n/\partial \mathbf{r} \sim v_F k \delta n$. В силу же условия $k v_F \gg \omega$ можно пренебречь также и производной по времени $\partial n/\partial t \sim \omega \delta n$.

---

[1]) Равенство $\delta \sim l$ достигается при $\omega \sim c^2/(\sigma l^2)$, т. е. (если воспользоваться оценкой $\sigma \sim le^2N/p_F$) при $\omega \sim c^2 p_F/(e^2 l^3 N)$. Это значение совместно с неравенством $\delta \sim l \ll v_F/\omega$, если $l \gg c/\Omega$, где $\Omega \sim (Ne^2/m^*)^{1/2}$ — плазменная частота металла ($m^* \sim p_F/v_F$ — эффективная масса электронов проводимости). Для обычных металлов $\Omega \sim 10^{15} - 10^{16}$ с$^{-1}$.

В силу последнего пренебрежения, кинетическое уравнение для квазичастиц электронной ферми-жидкости снова сводится к уравнению для газа путем переопределения функции распределения — замены δn на $\delta\tilde{n}$ из (74.13). В данном случае, после указанных пренебрежений, кинетическое уравнение имеет простой вид

$$\mathbf{v}\frac{\partial\,\delta\tilde{n}}{\partial\mathbf{r}} - e\mathbf{E}\frac{\partial n_0}{\partial\mathbf{p}} = 0.$$

Положив

$$\frac{\partial\,\delta\tilde{n}}{\partial\mathbf{r}} = i\mathbf{k}\delta\tilde{n}, \qquad \frac{\partial n_0}{\partial\mathbf{p}} = \mathbf{v}\frac{\partial n_0}{\partial\varepsilon},$$

находим отсюда

$$\delta\tilde{n} = -\frac{ie\mathbf{E}\mathbf{v}}{\mathbf{k}\mathbf{v}}\frac{\partial n_0}{\partial\varepsilon}. \tag{86.12}$$

Это выражение имеет полюс при $\mathbf{kv} = 0$. При вычислении тока

$$\mathbf{j} = -e\int \mathbf{v}\delta\tilde{n}\frac{2\,d^3p}{(2\pi\hbar)^3}$$

этот полюс должен обходиться путем замены $\mathbf{kv} \to \mathbf{kv} - i0$ [1]):

$$\mathbf{j} = ie^2\int \frac{\mathbf{v}(\mathbf{E}\mathbf{v})}{\mathbf{k}\mathbf{v} - i0}\frac{\partial n_0}{\partial\varepsilon}\frac{2\,d^3p}{(2\pi\hbar)^3}. \tag{86.13}$$

Пренебрегая, как обычно, температурным размытием равновесной функции распределения, пишем $\partial n_0/\partial\varepsilon = -\delta(\varepsilon - \varepsilon_F)$ и преобразуем интеграл по d^3p в интеграл по ферми-поверхности по формуле (74.20). Согласно известной формуле дифференциальной геометрии, элемент площади $dS = do_\nu/K$, где do_ν — элемент телесных углов для направления нормали $\boldsymbol{\nu}$ к поверхности, а K — гауссова кривизна поверхности, т. е. обратное произведение $K = 1/(R_1R_2)$ ее главных радиусов кривизны в данной точке. Заметив также, что направление нормали к ферми-поверхности в каждой ее точке совпадает с направлением скорости $\mathbf{v} = \partial\varepsilon/\partial\mathbf{p}$, получим

$$\mathbf{j} = -\frac{2ie^2}{(2\pi\hbar)^3}\int \frac{\boldsymbol{\nu}(\mathbf{E}\boldsymbol{\nu})}{K(\boldsymbol{\nu})}\frac{do_\nu}{\mathbf{k}\boldsymbol{\nu} - i0}. \tag{86.14}$$

Определяя направление $\boldsymbol{\nu}$ азимутальным и полярным углами φ и θ относительно направления $\mathbf{k}$ как полярной оси, будем иметь $\mathbf{k}\boldsymbol{\nu} = k\cos\theta$, $do_\nu = \sin\theta\,d\varphi\,d\theta$.

---

[1]) Это отвечает обычной замене $\omega \to \omega + i0$ в разности $\omega - \mathbf{kv}$.

Интегрирование в (86.14) по переменной $\mu = \cos\theta$ производится по отрезку $-1 \leqslant \mu \leqslant 1$ вещественной оси с обходом полюса $\mu = 0$ по полуокружности снизу. Легко видеть, что интеграл по прямолинейным отрезкам (т. е. главное значение интеграла) при этом обращается в нуль, так что остается лишь вклад от обхода полюса. Для этого замечаем, что в силу четности функции $\varepsilon(\mathbf{p})$ ферми-поверхность $\varepsilon(\mathbf{p}) = \varepsilon_F$ инвариантна относительно замены $\mathbf{p} \to -\mathbf{p}$; поскольку изменение знака $\mathbf{p}$ меняет также и знак вектора нормали $\boldsymbol{\nu}$, отсюда следует, что $K(-\boldsymbol{\nu}) = K(\boldsymbol{\nu})$. Интеграл в (86.14) можно поэтому представить в виде

$$\frac{1}{2}\left\{\int \frac{\boldsymbol{\nu}(\mathbf{E}\boldsymbol{\nu})\,do_\nu}{K(\boldsymbol{\nu})(\mathbf{k}\boldsymbol{\nu} - i0)} - \int \frac{\boldsymbol{\nu}(\mathbf{E}\boldsymbol{\nu})\,do_\nu}{K(\boldsymbol{\nu})(\mathbf{k}\boldsymbol{\nu} + i0)}\right\},$$

где в скобках стоит сумма интегралов, получающихся друг из друга заменой переменной интегрирования $\boldsymbol{\nu} \to -\boldsymbol{\nu}$; из этого выражения сделанное утверждение очевидно.

В полюсе подынтегрального выражения $\mathbf{k}\boldsymbol{\nu} = k\cos\theta = 0$, т. е. нормаль $\boldsymbol{\nu}$ перпендикулярна заданному направлению волнового вектора $\mathbf{k}$. Вычет по переменной $\cos\theta$ дается, следовательно, интегралом

$$\int \frac{\boldsymbol{\nu}(\mathbf{E}\boldsymbol{\nu})}{kK(\boldsymbol{\nu})}\,d\varphi,$$

взятым по кривой, представляющей собой геометрическое место точек ферми-поверхности, в которых $\boldsymbol{\nu} \perp \mathbf{k}$.

Таким образом, окончательно находим связь тока с полем в виде

$$j_\alpha = \sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{k})E_\beta, \tag{86.15}$$

где

$$\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) = \frac{2\pi e^2 A_{\alpha\beta}}{(2\pi\hbar)^3 k}, \qquad A_{\alpha\beta} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\nu_\alpha\nu_\beta}{K(\varphi)}\,d\varphi \tag{86.16}$$

— вещественный тензор в плоскости, перпендикулярной $\mathbf{k}$; если направление $\mathbf{k}$ выбрано в качестве оси x, то индексы α и β пробегают значения y, z. Вектор $\mathbf{j}$ лежит целиком в этой плоскости, т. е. поперечен по отношению к $\mathbf{k}$.

Обратим внимание на то, что вклад в ток возник только от электронов с $\mathbf{vk} = 0$, т. е. движущихся перпендикулярно волновому вектору. Это — естественное следствие приближения, в котором длина свободного пробега рассматривается как сколь угодно большая: при движении под углом к направлению $\mathbf{k}$ электрон в своем свободном движении проходит через поле, осциллирующее в пространстве и эти осцилляции погашают суммарное воздействие поля на электрон. В следующем приближении, при учете конечности произведения kl, вклад в ток возникал бы уже

от электронов, движущихся в малом интервале углов $\sim 1/(kl)$ относительно плоскости, перпендикулярной направлению $\mathbf{k}$.

Перейдем теперь непосредственно к задаче о проникновении поля при аномальном скин-эффекте. Здесь мы имеем дело с задачей о полупространстве, которую надо решать с учетом граничных условий на поверхности металла. Граничные условия для функции распределения зависят от физических свойств поверхности по отношению к падающим на нее электронам. Существенно, однако, что в данном случае в создании тока участвуют в основном лишь электроны, летящие почти параллельно поверхности металла (о них говорят как о *скользящих* электронах). Для таких электронов закон отражения в значительной степени не зависит от степени совершенства поверхности металла и близок к *зеркальному*, т. е. электроны отражаются с изменением знака нормальной к поверхности компоненты скорости $\mathbf{v}$ при неизменных тангенциальных составляющих (чтобы не прерывать изложение, более подробное обсуждение этого вопроса перенесем в конец этого параграфа).

Зеркальному отражению отвечает граничное условие для функции распределения:

$$\delta\widetilde{n}(v_x, v_y, v_z) = \delta\widetilde{n}(-v_x, v_y, v_z) \quad \text{при} \quad x = 0. \tag{86.17}$$

При таком условии задача о полупространстве эквивалентна задаче о неограниченной среде, в которой поле распределено симметрично по обе стороны плоскости $x = 0$: $\mathbf{E}(t, x) = \mathbf{E}(t, -x)$. При этом электронам, отраженным от границ в задаче о полупространстве ($x > 0$), отвечают в задаче о неограниченном пространстве электроны, беспрепятственно прошедшие через плоскость $x = 0$ со стороны $x < 0$.

В задаче о предельно аномальном скин-эффекте можно считать, что поле $\mathbf{E}$ (зависящее только от одной координаты x) направлено везде параллельно плоскости $x = 0$. Согласно (86.15), в той же плоскости лежит и вектор тока $\mathbf{j}$, и потому автоматически удовлетворяется условие равенства нулю на поверхности металла нормальной к ней компоненты тока [1]).

Без предположения $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$ для двумерного вектора $\mathbf{E}$ имеем вместо (86.4) уравнение

$$\mathbf{E}'' = -\frac{4\pi i\omega}{c^2}\mathbf{j}. \tag{86.18}$$

Будем далее подразумевать временной множитель $\exp(-i\omega t)$ во

[1]) В следующих приближениях, при учете конечности отношения δ/l, наряду с компонентами $\sigma_{\alpha\beta}$ тензора проводимости появляются также и компоненты $\sigma_{\alpha x}$, σ_{xx}. Для обеспечения граничного условия $j_x = 0$ должно быть тогда введено также и нормальное к поверхности поле E_x (как это уже было отмечено в примеч. на с. 442).

всех функциях опущенным, так что $\mathbf{E}$, $\mathbf{j}$, ... будут функциями только от x.

Функция $\mathbf{E}(x)$, симметрично продолженная в область $x < 0$, непрерывна при $x = 0$. Но производная $\mathbf{E}'(x)$, будучи нечетной функцией x, испытывает при $x = 0$ разрыв, меняя знак при прохождении переменной x через нуль. Согласно уравнению (86.1), эти производные связаны с магнитным полем соотношением

$$\mathbf{E}' = \frac{i\omega}{c}[\mathbf{Bn}],$$

где $\mathbf{n}$ — снова единичный вектор в направлении оси x. В задаче о полупространстве мы имели бы поэтому при $x = 0$ условие $\mathbf{E}' = i\omega[\mathbf{B}_0\mathbf{n}]/c$, где $\mathbf{B}_0$ — поле на границе металла. В задаче о неограниченной среде этому отвечает условие

$$\mathbf{E}'(+0) - \mathbf{E}'(-0) = 2\frac{i\omega}{c}[\mathbf{B}_0\mathbf{n}].$$

Умножим обе части уравнения (86.18) на e^{-ikx} и проинтегрируем его по x в пределах от $-\infty$ до ∞ [1]). В левой части уравнения имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}''e^{-ikx}dx = \int_{-\infty}^{0} (\mathbf{E}'e^{-ikx})'dx + \int_{0}^{\infty}(\mathbf{E}'e^{-ikx})'dx + ik\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}'e^{-ikx}dx.$$

Поскольку на бесконечности поле $\mathbf{E}(x)$ обращается в нуль, то первые два интеграла дают как раз разность $\mathbf{E}'(-0) - \mathbf{E}'(+0)$. В последнем же члене, ввиду непрерывности самой функции $\mathbf{E}(x)$, можно уже просто интегрировать по частям. В результате приходим к равенству

$$\frac{2i\omega}{c}[\mathbf{B}_0\mathbf{n}] + k^2\mathbf{E}(k) = \frac{4\pi i\omega}{c^2}\mathbf{j}(k),$$

где $\mathbf{E}(k)$ и $\mathbf{j}(k)$ — фурье-образы функций $\mathbf{E}(x)$ и $\mathbf{j}(x)$.

Согласно (86.15) эти фурье-образы связаны друг с другом соотношением $j_\alpha(k) = \sigma_{\alpha\beta}(k)E_\beta(k)$. Воспользовавшись этим, найдем для фурье-образа поля выражение

$$E_\alpha(k) = \zeta_{\alpha\beta}(k)[\mathbf{B}_0\mathbf{n}]_\beta, \tag{86.19}$$

где $\zeta_{\alpha\beta}(k)$ — двумерный тензор, задаваемый своим обратным:

$$\zeta^{-1}_{\alpha\beta}(k) = -\frac{c}{2i\omega}\left[k^2\delta_{\alpha\beta} - \frac{4\pi i\omega}{c^2}\sigma_{\alpha\beta}(|k|)\right]. \tag{86.20}$$

---

[1]) Дальнейшие вычисления формально совпадают с ходом решения задачи о проникновении магнитного поля в сверхпроводник в IX, § 52.

Аргумент функций $\sigma_{\alpha\beta}$ написан как $|k|$, чтобы напомнить, что здесь фигурирует абсолютная величина вектора $\mathbf{k}$.

Сама функция $\mathbf{E}(x)$ получается из (86.19) умножением на $\exp(ikx)$ и интегрированием по $dk/(2\pi)$. Ввиду четности функций $\zeta_{\alpha\beta}(k)$ имеем

$$E_\alpha(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \zeta_{\alpha\beta}(k)\cos kx\,dk\cdot[\mathbf{B}_0\mathbf{n}]_\beta. \tag{86.21}$$

В частности, значение поля на границе металла есть

$$E_{o\alpha} = \zeta_{\alpha\beta}[\mathbf{B}_0\mathbf{n}]_\beta, \qquad \zeta_{\alpha\beta} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \zeta_{\alpha\beta}(k)\,dk. \tag{86.22}$$

Для фактического вычисления поверхностного импеданса выберем оси y и z в направлении главных осей симметричного тензора $\sigma_{\alpha\beta}(k)$. Вместе с $\sigma_{\alpha\beta}$ приводится к главным осям и тензор $\zeta_{\alpha\beta}$, и его главные значения

$$\zeta^{(\alpha)} = -\frac{2i\omega}{\pi c}\int\limits_0^\infty \frac{dk}{k^2 - ib^{(\alpha)}/k}, \qquad b^{(\alpha)} = \frac{\omega e^2 A^{(\alpha)}}{\pi c^2\hbar^3},$$

где $A^{(\alpha)}$ — главные значения тензора $A_{\alpha\beta}$. Интегрирование приводит к результату [1])

$$\zeta^{(\alpha)} = \left(1 - i\sqrt{3}\right)\frac{2\pi^{1/3}\hbar}{3^{3/2}}\left(\frac{\omega^2}{ce^2A^{(\alpha)}}\right)^{1/3}. \tag{86.23}$$

Величины $A^{(\alpha)}$ зависят только от характеристик — формы и размеров — ферми-поверхности. Отметим, что импеданс (86.23) оказывается не зависящим вовсе от длины пробега электронов. Для оценки по порядку величины можно считать, что радиусы кри-

---

[1]) Путь интегрирования (правая вещественная полуось) можно повернуть на угол $-\pi/6$ в плоскости комплексного k, не пересекая при этом полюсов подынтегрального выражения. Интегрируя вдоль луча $k = u\exp(-i\pi/6)$, имеем

$$I \equiv \int\limits_0^\infty \frac{k\,dk}{k^3 - ib} = e^{i\pi/6}\int\limits_0^\infty \frac{u\,du}{u^3 + b}$$

и, после подстановки $u^3 + b = b/\xi$,

$$I = \frac{e^{i\pi/6}}{3b^{1/3}}\int\limits_0^1 \xi^{-2/3}(1-\xi)^{-1/3}\,d\xi = \frac{\Gamma(1/3)\Gamma(2/3)}{3b^{1/3}\Gamma(1)}e^{i\pi/6} = \frac{\pi\left(\sqrt{3}+i\right)}{3^{3/2}b^{1/3}}.$$

визны ферми-поверхности $\sim p_F$; тогда $A \sim p_F^2$ и

$$\zeta \sim \left(\frac{\hbar^3\omega^2}{ce^2p_F^2}\right)^{1/3}. \qquad (86.24)$$

Напомним, что вещественная часть импеданса определяет диссипацию энергии поля в металле. В рассмотренном приближении (не учитывающем столкновений электронов) эта диссипация имеет природу затухания Ландау [1]).

Закон затухания электрического поля внутрь металла при аномальном скин-эффекте не экспоненциален, и потому понятие глубины проникновения не имеет в этом случае того буквального смысла, как в (86.5). Ввиду наличия в подынтегральном выражении в (86.21) осциллирующего множителя $\cos kx$, интеграл определяется (при заданном x) в основном областью значений $k \sim 1/x$. Существенное убывание функции $\mathbf{E}(x)$ происходит, когда эти значения $k \gg b^{1/3}$ [2]). Поэтому глубина проникновения по порядку величины равна $\delta \sim b^{-1/3}$, или

$$\delta \sim \left(\frac{c^2\hbar^3}{\omega e^2 A}\right)^{1/3} \sim \left(\frac{c^2\hbar^3}{\omega e^2 p_F^2}\right)^{1/3}. \qquad (86.25)$$

При увеличении частоты эта глубина продолжает убывать, но медленнее, чем при нормальном эффекте. Величины, определяемые выражениями (86.6) и (86.25) (обозначим их как $\delta_{\text{норм}}$ и $\delta_{\text{ан}}$), сравниваются по порядку величины при $\delta \sim l$. Поскольку одна из них убывает как $\omega^{-1/2}$, а другая как $\omega^{-1/3}$, то ясно, что при одном и том же значении ω: $\delta_{\text{ан}}^3 \sim \delta_{\text{норм}}^2 l$.

Наконец, сделаем некоторые замечания по поводу характера отражения электронов от границы металла. Если поверхность идеальна (без дефектов) и совпадает с какой-либо кристаллической плоскостью, то расположение атомов в ней обладает периодичностью, отвечающей трансляционной симметрии кристаллической решетки. В таком случае при отражении электрона сохраняются наряду с энергией также и тангенциальные компоненты его квазиимпульса p_y, p_z. Нормальная же компонента квазиимпульса отраженного электрона, p'_x, определяется по зна-

[1]) На явления, составляющие сущность аномального скин-эффекта, впервые указал *Г. Лондон* (*H. London*, 1940). Качественная теория этого эффекта была дана *Пиппардом* (*A.B. Pippard*, 1947), а изложенная количественная теория принадлежит *Рейтеру* и *Зондгеймеру* (*G.E. Reuter*, *E.H. Sondheimer*, 1948).

[2]) При $x \gg \delta$ интеграл (86.21) определяется значениями $k \ll b^{1/3}$. При этом $\zeta(k) \sim k$, а поле $\mathbf{E}(x)$ убывает как x^{-2}.

чению p_x падающего электрона уравнением

$$\varepsilon(p'_x, p_y, p_z) = \varepsilon(p_x, p_y, p_z), \tag{86.26}$$

причем должно быть $v'_x = \partial\varepsilon/\partial p'_x > 0$ — отраженный электрон движется по направлению от границы (скорость же падающего электрона $v_x = \partial\varepsilon/\partial p_x < 0$). Уравнение (86.26) может иметь несколько таких корней, причем, вообще говоря, $v'_x \neq -v_x$.

Но для скользящих падающих электронов среди этих корней всегда имеется один, отвечающий небольшому изменению квазиимпульса, причем $v'_x = -v_x$ (т. е. отражение является зеркальным в буквальном смысле этого слова). Действительно, для электрона, движущегося почти параллельно границе, производная $v_x = \partial\varepsilon/\partial p_x$ мала; это значит, что на изоэнергетической поверхности в $\mathbf{p}$-пространстве электрону отвечает точка P, находящаяся вблизи точки экстремума энергии ε как функции p_x, т. е. точки, в которой $\partial\varepsilon/\partial p_x = 0$. Но вблизи такой точки, по другую сторону экстремума, всегда существует точка P', в которой значение производной $\partial\varepsilon/\partial p_x$ отличается от значения в точке P лишь знаком.

Можно показать, что отражение скользящего электрона с подавляющей вероятностью происходит именно с таким изменением квазиимпульса. Более того, это утверждение остается в силе и при отражении от несовершенной поверхности, содержащей шероховатости атомных размеров, когда закона сохранения тангенциальных компонент квазиимпульса, строго говоря, уже не существует. Наглядное объяснение состоит в том, что волновая функция скользящего электрона медленно меняется вдоль оси x и потому «не чувствует» атомных шероховатостей поверхности [1]).

Интересно, что значение поверхностного импеданса при предельно аномальном скин-эффекте фактически оказывается вообще малочувствительным к характеру отражения электронов. Так, при диффузном отражении (когда все направления отраженного электрона равновероятны вне зависимости от угла падения) значение импеданса отличается от (86.23) лишь множителем 9/8. Граничное условие при диффузном отражении от плоской поверхности формулируется как $\delta\tilde{n}(v_x > 0, v_y, v_z) = 0$ при $x = 0$. При этом, однако, метод Фурье оказывается непригодным и решение задачи должно производиться так называемым методом Винера–Хопфа [2]).

---

[1]) Доказательство указанных утверждений можно найти в обзорной статье: *Андреев А.Ф.* // УФН. 1971. Т. 105. С. 113.

[2]) См. *Reuter G.E.*, *Sondheimer E.H.* // Proc. Roy. Soc. 1948. V. A195. P. 336.

§ 87. Скин-эффект в инфракрасной области

Мы рассмотрели, таким образом, два предельных случая скин-эффекта: нормальный эффект, когда наименьшим из трех характерных размеров (δ, l, v_F/ω) является длина пробега l, и аномальный эффект, когда наименьшей является глубина проникновения δ. Теперь мы рассмотрим третий случай, когда наименьшей длиной является

$$\frac{v_F}{\omega} \ll \delta, \qquad \frac{v_F}{\omega} \ll l. \tag{87.1}$$

К этому случаю мы приходим естественным образом от аномального скин-эффекта при дальнейшем увеличении частоты; хотя глубина проникновения при этом убывает, но произведение $\omega\delta$ возрастает как $\omega^{2/3}$. В обычных металлах условия (87.1) осуществляются в инфракрасной области.

Условия (87.1) ограничивают область частот снизу. Но справедливость излагаемых ниже результатов, основанных на теории ферми-жидкости, ограничена также и сверху условием $\hbar\omega \ll \varepsilon_F$. Нарушение этого условия приводило бы к возбуждению квазичастиц из глубины ферми-распределения, не имеющих смысла в рамках теории ферми-жидкости.

Для определения связи между током и электрическим полем надо снова обратиться к кинетическому уравнению. Но теперь член с производной по времени в силу условия $\omega \gg v_F/\delta$ велик по сравнению с членом с пространственными производными, а в силу условия $\omega \gg v_F/l$ — также и по сравнению с интегралом столкновений. После пренебрежения этими членами кинетическое уравнение принимает вид

$$\frac{\partial\,\delta n}{\partial t} - e\mathbf{E}\mathbf{v}\frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} = 0.$$

Написав $\partial\,\delta n/\partial t = -i\omega\,\delta n$, находим отсюда

$$\delta n = -\frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon}\psi, \qquad \psi = \frac{e\mathbf{E}\mathbf{v}}{i\omega}. \tag{87.2}$$

Отсутствие в кинетическом уравнении члена с производными по координатам означает отсутствие пространственной дисперсии. В этом смысле скин-эффект снова становится «нормальным». Присутствие члена с производной по времени приводит, однако, к частотной дисперсии проводимости. Ситуация здесь такая же, как при вычислении диэлектрической проницаемости бесстолкновительной плазмы. Отличие состоит лишь в анизотропии металла и в ферми-жидкостных эффектах. Последние проявляются в том, что плотность тока выражается интегралом, зависящим не только от функции распределения δn, но и от функции взаимодействия квазичастиц (электронов проводимости) $f(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$. Обратим внимание на то, что ввиду наличия в

кинетическом уравнении члена $\partial\,\delta n/\partial t$ исключение взаимодействия квазичастиц путем введения эффективной функции распределения $\delta\widetilde{n}$ оказывается здесь невозможным.

Согласно (74.21), (74.22), плотность тока выражается через поправку к функции распределения электронов формулой

$$\mathbf{j} = -e\int \boldsymbol{\nu}\left[\psi(\mathbf{p}_F) + \int f(\mathbf{p}_F, \mathbf{p}'_F)\psi(\mathbf{p}'_F)\frac{dS'_F}{v'_F(2\pi\hbar)^3}\right]\frac{2\,dS_F}{(2\pi\hbar)^3},$$

где $\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор в направлении скорости $\mathbf{v}_F$, совпадающий с вектором нормали к ферми-поверхности. Подставив сюда функцию ψ из (87.2), найдем связь тока с полем в виде $j_\alpha = \sigma_{\alpha\beta}(\omega)E_\beta$, где тензор проводимости

$$\sigma_{\alpha\beta} = -\frac{e^2}{i\omega m}N^{(\text{эф})}_{\alpha\beta},$$
$$N^{(\text{эф})}_{\alpha\beta} = \int \nu_\alpha\left[v_F\nu_\beta + \int f(\mathbf{p}_F, \mathbf{p}'_F)\nu'_\beta\frac{dS'_F}{(2\pi\hbar)^3}\right]\frac{2\,dS_F}{(2\pi\hbar)^3}. \qquad (87.3)$$

Симметрия тензора $N^{(\text{эф})}_{\alpha\beta}$ определяется симметрией кристалла (и не зависит от направления поля, как это было в (86.15)). В кристалле кубической симметрии (которую будем предполагать ниже для простоты) этот тензор, а с ним и $\sigma_{\alpha\beta}$, сводится к скаляру, $N^{(\text{эф})}_{\alpha\beta} + N^{(\text{эф})}\delta_{\alpha\beta}$, и тогда

$$\sigma(\omega) = -\frac{e^2}{im\omega}N^{(\text{эф})}. \qquad (87.4)$$

Описание свойств металла с помощью этой проводимости можно обычным образом заменить описанием с помощью диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon(\omega) = 1 + i\frac{4\pi\sigma(\omega)}{\omega} = 1 - \frac{4\pi e^2}{m\omega^2}N^{(\text{эф})}. \qquad (87.5)$$

Обозначение $N^{(\text{эф})}$ введено по аналогии с известным (см. VIII, § 59) предельным выражением диэлектрической проницаемости при очень больших частотах: $\varepsilon = 1 - 4\pi e^2 N/(m\omega^2)$, где N — полное число электронов в единице объема вещества. Таким образом, величина $N^{(\text{эф})}$ играет в инфракрасной оптике металлов роль эффективного числа электронов; она зависит от функции взаимодействия электронов проводимости.

Наряду с числом $N^{(\text{эф})}$ целесообразно ввести также и эффективную плазменную частоту

$$\Omega = \left(\frac{4\pi e^2}{m}N^{(\text{эф})}\right)^{1/2}. \qquad (87.6)$$

Тогда проводимость запишется в виде

$$\sigma = \frac{i\Omega^2}{4\pi\omega}. \qquad (87.7)$$

Величина Ω определяется только параметрами электронного спектра металла; в грубой оценке она совпадает поэтому с параметром $\varepsilon_F/\hbar$ — граничной энергией Ферми. Поскольку излагаемая теория ограничена условием $\hbar\omega \ll \varepsilon_F$, то и $\Omega \gg \omega$.

Проникновение поля в металл описывается уравнением (86.4), которое после подстановки σ из (87.7) принимает вид

$$\mathbf{E}'' - \frac{\Omega^2}{c^2}\mathbf{E} = 0.$$

Его решение, обращающееся в нуль при $x \to \infty$:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-x/\delta}, \qquad \delta = \frac{c}{\Omega} \qquad (87.8)$$

(для типичных металлов $c/\Omega \sim 10^{-5}$ см). Таким образом, поле затухает по экспоненциальному закону с независящей от частоты глубиной проникновения. Связь между электрическим и магнитным полями дается теперь (как легко снова убедиться с помощью первого из уравнений (86.3)) соотношением (86.8) с импедансом

$$\zeta = -\frac{i\omega}{c}\delta = -\frac{i\omega}{\Omega}. \qquad (87.9)$$

Чисто мнимый импеданс означает полное отражение электромагнитной волны от поверхности металла, без диссипации. Этот результат естествен, поскольку в рассмотренном приближении не учитывались столкновения электронов, являющиеся источником диссипации.

Отметим, что с учетом (87.7) основные условия применимости рассматриваемой теории можно записать как

$$\Omega \gg \omega \gg \Omega\frac{v_F}{c}. \qquad (87.10)$$

Левое неравенство обычно совместно с неравенством $\hbar\omega \gg \Theta$ (Θ — дебаевская температура). В этом случае фермиевский параметр v_F и функция f в формуле (87.3) должны браться не на самой ферми-поверхности, а при $|\varepsilon - \varepsilon_F| \gg \Theta$. Как было показано в IX, § 65, электрон-фононное взаимодействие приводит к тому, что v_F в этой области отличается от v_F в области $|\varepsilon - \varepsilon_F| \ll \Theta$ (существенной, например, для статических свойств металла при низких температурах); то же самое относится и к функции взаимодействия квазичастиц f.

§ 88. Геликоидальные волны в металле

Тот факт, что внешнее переменное электромагнитное поле не проникает в глубь металла, означает, другими словами, что в металле невозможно распространение незатухающих электромагнитных волн — с частотами вплоть до плазменной частоты, $\omega \sim \Omega$.

Ситуация, однако, радикально меняется при наличии постоянного магнитного поля $\mathbf{B}$. Магнитное поле меняет характер движения электронов и тем самым оказывает сильное влияние на электромагнитные свойства металла. При этом существенно, что движение становится финитным в плоскости, перпендикулярной полю. В сильных полях, когда ларморовский радиус орбиты $r_B \sim cp_F/eB$ становится малым по сравнению с длиной пробега,

$$r_B \ll l \tag{88.1}$$

(или, что то же самое, $\omega_B \tau \gg 1$, где $\omega_B \sim v_F/r_B \sim eB/(m^* c)$ — ларморовская частота, $\tau \sim l/v_F$ — время свободного пробега), электрическая проводимость в поперечных к полю направлениях резко уменьшается, стремясь к нулю при $B \to \infty$. Можно сказать, что в этих направлениях металл ведет себя как диэлектрик, в результате чего уменьшается диссипация энергии в волнах с электрическим полем, поляризованным в плоскости, перпендикулярной $\mathbf{B}$. Другими словами, становится возможным распространение таких волн как незатухающего (в первом приближении) процесса. При этом допустимые частоты волн ограничены условием

$$\omega \ll \omega_B; \tag{88.2}$$

лишь при этом условии траектории электронов успевают заметно искривиться за время периода поля, что и приводит к изменению электромагнитных свойств металла по отношению к этим частотам.

Финитность движения электрона (в плоскости, перпендикулярной $\mathbf{B}$) предполагает и финитность его импульсной траектории — сечения ферми-поверхности. Поэтому сказанное выше относится к металлам с закрытыми ферми-поверхностями при любом направлении $\mathbf{B}$, а к металлам с открытыми поверхностями — лишь при тех направлениях $\mathbf{B}$, для которых сечения замкнуты. При открытых сечениях движение электронов в магнитном поле остается инфинитным, проводимость не убывает и распространение электромагнитных волн в соответствующих направлениях оказывается невозможным.

Незатухающие электромагнитные волны в металле можно рассматривать как бозевские ветви энергетического спектра электронной ферми-жидкости. Макроскопический характер этих волн проявляется в большой (по сравнению с постоянной решет-

ки) величине длин волн. По этой причине этим возбуждениям отвечает лишь относительно очень малый фазовый объем и их вклад в термодинамические величины металла пренебрежим.

Напишем снова уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot}\widetilde{\mathbf{B}} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\widetilde{\mathbf{B}}}{\partial t}. \tag{88.3}$$

где через $\widetilde{\mathbf{B}}$ обозначено (в отличие от постоянного $\mathbf{B}$) переменное слабое магнитное поле волны. Исключим $\widetilde{\mathbf{B}}$ из этих уравнений:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{E} - \Delta\mathbf{E} = -\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial\mathbf{j}}{\partial t}.$$

Для монохроматической плоской волны имеем отсюда

$$(-k_\alpha k_\gamma + k^2\delta_{\alpha\gamma})E_\gamma = \frac{4\pi i\omega}{c^2}j_\alpha. \tag{88.4}$$

Выразим поле $\mathbf{E}$ через ток согласно $E_\alpha = \rho_{\alpha\beta}j_\beta$, где $\rho_{\alpha\beta} = \sigma^{-1}_{\alpha\beta}$ — тензор удельного сопротивления. Тогда получим систему однородных линейных уравнений

$$\left[k^2\rho_{\alpha\beta} - k_\alpha k_\gamma\rho_{\gamma\beta} - \frac{4\pi i\omega}{c^2}\delta_{\alpha\beta}\right]j_\beta = 0. \tag{88.5}$$

Ее определитель и дает уравнение, определяющее закон дисперсии волн.

В § 84, 85 был найден вид тензора проводимости металла (в области его остаточного сопротивления) в сильном магнитном поле в стационарном случае. Выясним теперь, каким образом эти результаты должны быть изменены для нестационарного случая.

Временная и пространственная периодичность электрического поля (а с ним и переменной части функции распределения электронов) приводит к появлению в левой части кинетического уравнения членов

$$\frac{\partial\,\delta n}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial\,\delta\tilde{n}}{\partial\mathbf{r}} = -i\omega\,\delta n + i\mathbf{k}\mathbf{v}\,\delta\tilde{n}$$

(ср. (74.25)). Аналогично (84.7) представим функции δn и $\delta\tilde{n}$ в виде

$$\delta n = \frac{\partial n_0}{\partial\varepsilon}e\mathbf{E}\mathbf{h}, \qquad \delta\tilde{n} = \frac{\partial n_0}{\partial\varepsilon}e\mathbf{E}\mathbf{g}.$$

Согласно (74.21) функции $\mathbf{h}$ и $\mathbf{g}$ связаны друг с другом линейным интегральным соотношением

$$\mathbf{g} = \mathbf{h} + \int f(\mathbf{p},\mathbf{p}'_F)\mathbf{h}'\frac{dS'_F}{v'_F(2\pi\hbar)^3} \equiv \widehat{L}\mathbf{h}.$$

Таким образом, кинетическое уравнение примет вид

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \tau} - [I(\mathbf{g}) + i\omega \widehat{L}^{-1}\mathbf{g} - i(\mathbf{kv})\mathbf{g}] = \mathbf{v}. \tag{88.6}$$

Оно отличается от прежнего уравнения (84.10) заменой члена $I(\mathbf{g})$ выражением, стоящим здесь в квадратных скобках. Это выражение зависит теперь не только от характера рассеяния электронов на примесных атомах, но и от функции их взаимодействия друг с другом.

В силу условия $r_B \ll l$, член $I(\mathbf{g})$ в уравнении (88.6) мал по сравнению с членом $\partial\mathbf{g}/\partial\tau$, как он был мал и в прежнем уравнении (84.10). В силу условия $\omega \ll \omega_B$ мал также и член $i\omega\widehat{L}^{-1}g \sim i\omega g$. Наложим еще условие на волновой вектор: $kv_F \ll \omega_B$, т. е.

$$kr_B \ll 1 \tag{88.7}$$

— длина волны должна быть велика по сравнению с ларморовским радиусом. Тогда будет мал и последний член в квадратных скобках в (88.6). В этих условиях развитый в § 84 метод решения кинетического уравнения последовательными приближениями остается в силе, а с ним остаются справедливыми и полученные там результаты для первых членов разложения тензора проводимости по степеням $1/B$. Но ввиду присутствия ω и $\mathbf{k}$ в уравнении (88.6) будет, вообще говоря, иметься частотная и пространственная дисперсия проводимости.

Наличие нескольких характерных параметров длины и времени и разнообразие геометрических свойств ферми-поверхностей приводят к многообразию явлений, связанных с распространением электромагнитных волн в металлах. Мы ограничимся рассмотрением (в этом и следующем параграфах) лишь некоторых характерных случаев.

Рассмотрим некомпенсированный металл с закрытой ферми-поверхностью. Согласно (85.4), (85.5), наибольшей из компонент тензора сопротивления является

$$\rho_{xy} = -\rho_{yx} = \frac{B}{ec(N_e - N_h)}; \tag{88.8}$$

она относится к бездиссипативной (антиэрмитовой) части тензора. Эта компонента вообще не зависела от вида интеграла столкновений, а потому не зависит и от вида выражения в квадратных скобках в уравнении (88.6). Формула (88.8) остается, следовательно, справедливой и в поле волны.

Описание среды с помощью тензора сопротивления $\rho_{\alpha\beta}$ (или проводимости $\sigma_{\alpha\beta}$) эквивалентно описанию тензором диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{4\pi i\sigma_{\alpha\beta}}{\omega}, \quad \varepsilon^{-1}_{\alpha\beta} = \frac{\omega\rho_{\alpha\beta}}{4\pi i}.$$

В данном случае тензор $\varepsilon^{-1}_{\alpha\beta}$ имеет лишь компоненты

$$\varepsilon^{-1}_{xy} = -\varepsilon^{-1}_{yz} = \frac{\omega B}{4\pi i c e(N_e - N_h)}.$$

Это выражение совпадает с рассмотренным в § 56 в связи с геликоидальными волнами в плазме (отличаясь от него лишь заменой электронной плотности N_e на разность $N_e - N_h$). Поэтому полученные в § 56 результаты прямо переносятся и на рассматриваемые волны в металле, которые тоже называют *геликоидальными* [1]).

Закон дисперсии этих волн:

$$\omega = \frac{cB|\cos\theta|}{4\pi e|N_e - N_h|}, \tag{88.9}$$

где θ — угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{B}$. Электрическое поле волны эллиптически поляризовано в плоскости, перпендикулярной магнитному полю $\mathbf{B}$. Выбрав (как и в § 56) направление $\mathbf{B}$ в качестве оси z, а плоскость xz, проходящей через направления $\mathbf{k}$ и $\mathbf{B}$, будем иметь для электрического поля:

$$E_y = \pm i|\cos\theta|E_x, \tag{88.10}$$

где верхний знак относится к случаю $N_e > N_h$, а нижний — к случаю $N_e < N_h$.

§ 89. Магнитоплазменные волны в металле

Рассмотрим теперь волны в компенсированном ($N_e = N_h$) металле с замкнутой ферми-поверхностью. Помимо обязательных условий (88.1), (88.2) будем предполагать также выполненными неравенства

$$\omega \gg \frac{v_F}{l}, \quad \omega \gg kv_F. \tag{89.1}$$

В силу первого из них, интеграл столкновений $I(\mathbf{g})$ в кинетическом уравнении (88.6) мал по сравнению с членом $i\omega\widehat{L}^{-1}\mathbf{g}$, а в силу второго условия мал также и член $i(\mathbf{kv})\mathbf{g}$. Пренебрегая этими членами, получим уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \tau} - i\omega\widehat{L}^{-1}\mathbf{g} = \mathbf{v}, \tag{89.2}$$

отличающееся от уравнения (84.10) заменой члена $I(\mathbf{g})$ на $i\omega\widehat{L}^{-1}\mathbf{g}$.

---

[1]) Возможность распространения этих волн в металле была указана *О.В. Константиновым* и *В.И. Перелем* (1960).

Поэтому результаты, полученные в § 85 для тензора сопротивления в стационарном случае, останутся справедливыми с той лишь разницей, что малым параметром разложения по степеням $1/B$ будет теперь не r_B/l, а $-i\omega/\omega_B$. Пространственная дисперсия проводимости отсутствует, но имеется дисперсия по частотам.

Согласно (85.7) в стационарном случае главные члены разложения компонент тензора удельного сопротивления для компенсированного металла таковы:

$$\rho_{zz} = \text{const}; \quad \rho_{xx}, \rho_{yy}, \rho_{xy} \propto B^2; \quad \rho_{xz}, \rho_{yz} \propto B. \tag{89.3}$$

Для выделения параметра r_B/l в этом тензоре надо, однако, выяснить, как входят в его компоненты не только B, но и l. Для этого пишем, например, оценку

$$\rho_{xx} \sim \rho_0 \left(\frac{l}{r_B}\right)^2 \sim \frac{B}{ecN}\frac{l}{r_B},$$

где $\rho_0 \sim p_F/(Ne^2 l)$. Аналогичным образом,

$$\rho_{yz} \sim \rho_0 \frac{l}{r_B} \sim \frac{B}{ecN}, \quad \rho_{zz} \sim \rho_0 \sim \frac{B}{ecN}\frac{r_B}{l}.$$

Произведя теперь указанную выше замену параметра разложения, найдем тензор $\rho_{\alpha\beta}(\omega)$ в виде

$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{B}{ecN}\begin{pmatrix} \dfrac{\omega_B}{-i\omega}a_{xx} & \dfrac{\omega_B}{-i\omega}a_{xy} & a_{xz} \\ \dfrac{\omega_B}{-i\omega}a_{xy} & \dfrac{\omega_B}{-i\omega}a_{yy} & a_{yz} \\ -a_{xz} & -a_{yz} & \dfrac{-i\omega}{\omega_B}a_{zz} \end{pmatrix}, \tag{89.4}$$

где все $a_{\alpha\beta} \sim 1$ — безразмерные вещественные коэффициенты; величины N и m^* (в $\omega_B = eB/(m^*c)$) надо рассматривать здесь как некоторым образом выбранные параметры должного порядка величины. Все члены в (89.4) относятся к антиэрмитовой, т. е. к бездиссипативной, части тензора. Поэтому заранее ясно, что учет одних только этих членов приведет к незатухающим волнам.

В общем случае произвольных направлений $\mathbf{B}$ и $\mathbf{k}$ закон дисперсии волн выражается довольно громоздкими формулами. Ограничимся частным случаем, выявляющим основные свойства этих волн.

Будем считать, что кристаллическая решетка металла обладает осью симметрии более высокого, чем второй, порядка, и пусть поле $\mathbf{B}$ (ось z) направлено вдоль этой оси. Величины a_{xx},

a_{yy}, $a_{xy} = a_{yx}$ составляют двумерный симметричный тензор в плоскости xy, сводящийся при данной симметрии к скаляру: $a_{xx} = a_{yy} \equiv a_1$, $a_{xy} = 0$. Величины a_{xz}, a_{yz} составляют двумерный вектор в той же плоскости и при данной симметрии обращаются в нуль. Таким образом, остаются лишь компоненты

$$\rho_{xx} = \rho_{yy} = \frac{B}{ecN}\frac{\omega_B}{-i\omega}a_1, \qquad \rho_{zz} = \frac{B}{ecN}\frac{-i\omega}{\omega_B}a_2. \tag{89.5}$$

Снова выберем плоскость xz проходящей через направления $\mathbf{k}$ и $\mathbf{B}$. Если пренебречь малой (по сравнению с ρ_{xx}) величиной ρ_{zz}, дисперсионное уравнение распадается на два уравнения

$$\frac{4\pi i\omega}{c^2} - k^2\rho_{yy} = 0, \qquad \frac{4\pi i\omega}{c^2} - k_z^2\rho_{xx} = 0;$$

при этом подразумевается, что угол θ между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{B}$ не слишком близок к $\pi/2$, так что k_z^2 не слишком мало ($\cos\theta \gg \omega/\omega_B$). Отсюда находим законы дисперсии двух типов волн:

$$\begin{aligned} \omega^{(1)} &= ku_A\sqrt{a_1}, \\ \omega^{(2)} &= ku_A|\cos\theta|\sqrt{a_1}, \end{aligned} \tag{89.6}$$

где [1])

$$u_A = \frac{B}{(4\pi Nm^*)^{1/2}}. \tag{89.7}$$

Эти электромагнитные волны в металле называют *магнитоплазменными*. Волны первого и второго типа аналогичны соответственно быстрой магнитозвуковой и альвеновской волнам в плазме [2]). Колебания же, соответствующие медленной магнитозвуковой волне, заведомо не могут иметь скорость ω/k, удовлетворяющую второму условию (89.1), и потому не могут здесь появиться.

§ 90. Квантовые осцилляции проводимости металла в магнитном поле

Изложенная в § 84, 85 теория гальваномагнитных явлений имела квазиклассический характер в том смысле, что квантовость проявлялась только в виде функции распределения электронов, дискретность же уровней энергии в магнитном поле не

[1]) При законах дисперсии (89.6), (89.7) условие $kv_F \ll \omega$ означает, что должно быть $u_A \gg v_F$. В достижимых полях B это условие может фактически выполняться лишь в полуметаллах (висмут) с малой плотностью носителей тока.

[2]) Возможность существования этих волн была указана *Буксбаумом* и *Голтом* (*S.J. Buchsbaum*, *J. Golt*, 1961). Изложенная теория принадлежит *Э.А. Канеру* и *В.Г. Скобову* (1963).

учитывалась. Эта дискретность приводит, однако, к качественно новому явлению — осцилляциям проводимости как функции магнитного поля (так называемый *эффект Шубникова–де Гааза*). Этот эффект аналогичен осцилляциям магнитного момента (эффект де Гааза–ван Альена), но его теория сложнее ввиду кинетического, а не термодинамического характера явления. Мы рассмотрим ее в рамках модели невзаимодействующих электронов, оставляя в стороне вопрос (по-видимому, еще не исследованный) о влиянии ферми-жидкостных эффектов.

Как и в § 84, магнитное поле будем считать сильным в смысле условия (84.1), которое запишем в виде

$$\omega_B \tau \gg 1, \tag{90.1}$$

где τ — время свободного пробега электронов, а

$$\omega_B = \frac{eB}{m^* c}. \tag{90.2}$$

— ларморовская частота; m^* — циклотронная масса электронов [1]). В то же время, конечно, поле не должно быть настолько сильным, чтобы нарушилось условие квазиклассичности

$$\hbar\omega_B \ll \varepsilon_F. \tag{90.3}$$

Соотношение же между $\hbar\omega_B$ и T может быть произвольным.

Мы ограничимся исследованием квантовых осцилляций поперечной (по отношению к магнитному полю — оси z) проводимости, предполагая при этом, для упрощения записи формул, симметрию кристалла кубической. В таком кристалле симметричная (диссипативная) часть тензора проводимости имеет лишь компоненты $\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$ и σ_{zz}. Сравнительная простота задачи для поперечных компонент связана с тем, что для них влияние столкновений может рассматриваться (как мы видели в § 84) как малое возмущение по сравнению с влиянием магнитного поля; для продольной проводимости σ_{zz} это не так [2]).

Как и в § 84, рассматриваем металл в области его остаточного сопротивления, так что речь идет о столкновениях электронов с примесными атомами. Ввиду упругости этих столкновений, электроны различных энергий участвуют в образовании электрического тока независимо друг от друга.

[1]) Напомним (см. IX, (57.6)) определение: $m^* = (\partial S/\partial\varepsilon)/2\pi$, где $S(\varepsilon, p_z)$ — площадь сечения изоэнергетической поверхности плоскостью $p_z = \text{const}$; изоэнергетическая поверхность определена здесь в $\mathbf{p}$-пространстве (а не в $\mathbf{p}/\hbar$-пространстве, как в IX).

[2]) Что касается антисимметричной части тензора проводимости, то квантовые осцилляции в них появляются лишь во втором приближении по $1/(\omega_B\tau)$.

Пусть $g(\varepsilon)$ — число квантовых состояний электрона, отнесенное к единичному интервалу энергий. Тогда пространственная плотность числа электронов с энергией в интервале $d\varepsilon$ есть $n(\varepsilon)g(\varepsilon)\,d(\varepsilon)$, где $n(\varepsilon)$ — числа заполнения состояний. Обозначим через $j_y(\varepsilon)$ плотность создаваемого этими электронами поперечного тока. При наличии как электрического поля, так и градиента плотности электронов, плотность тока изобразится суммой

$$j_y(\varepsilon) = eD(\varepsilon)\frac{\partial n}{\partial y}g(\varepsilon) + \sigma_{yy}(\varepsilon)E_y. \qquad (90.4)$$

Первый член представляет собой диффузионный перенос заряда; $D(\varepsilon)$ — коэффициент диффузии (в реальном пространстве!) электронов с энергией ε.

Ток (90.4) должен обращаться в нуль для распределения

$$n_0(\varepsilon - e\varphi) \approx n_0(\varepsilon) - e\varphi\frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon},$$

отвечающего статистическому равновесию электронного газа в слабом постоянном электрическом поле с потенциалом $\varphi(\mathbf{r})$ (n_0 — распределение Ферми). Отсюда находим соотношение, связывающее $\sigma_{yy}(\varepsilon)$ и $D(\varepsilon)$:

$$\sigma_{yy}(\varepsilon) = -e^2 g(\varepsilon)D(\varepsilon)\frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon}.$$

Полная же электропроводность, учитывающая вклад от электронов всех энергий, есть

$$\sigma_{yy} = -e^2\int g(\varepsilon)D(\varepsilon)\frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon}\,d\varepsilon = -e^2\sum_s D(\varepsilon_s)\frac{\partial n_0(\varepsilon_s)}{\partial \varepsilon}. \qquad (90.5)$$

В последней записи суммирование производится по всем квантовым состояниям электрона; s условно обозначает совокупность квантовых чисел состояний. Эта формула сводит задачу о вычислении проводимости к вычислению коэффициента диффузии электронов в отсутствие электрического поля.

В свою очередь коэффициент диффузии выражается через характеристики микроскопических актов рассеяния формулой типа (21.4):

$$D = \sum\frac{(\Delta y)^2}{2\delta t},$$

где суммирование производится по столкновениям, испытываемым электроном в течение времени δt, а Δy — изменение среднего значения y-координаты электрона при столкновении (напомним, что движение электрона в плоскости, перпендикулярной

полю, финитно; в наглядной картине квазиклассических орбит Δy — смещение центра орбиты). Обозначим через

$$N_{\text{пр}} W_{s's} \delta(\varepsilon_s - \varepsilon_{s'})$$

вероятность перехода электрона из состояния s в состояние s' при рассеянии; δ-функция выражает собой упругость рассеяния, а множитель $N_{\text{пр}}$ (плотность примесных атомов) — независимость рассеяния на хаотически расположенных атомах. Тогда коэффициент диффузии представится формулой

$$D(\varepsilon_s) = \frac{1}{2} N_{\text{пр}} \sum_{s'} (y_s - y_{s'})^2 W_{ss'} \delta(\varepsilon_s - \varepsilon_{s'}),$$

где y_s — среднее значение координаты в s-м состоянии. Подставив это выражение в (90.5), получим для проводимости:

$$\sigma_{yy} = -\frac{e^2}{2} N_{\text{пр}} \sum_{ss'} (y_s - y_{s'})^2 \frac{\partial n_0(\varepsilon_s)}{\partial \varepsilon} W_{s's} \delta(\varepsilon_s - \varepsilon_{s'}) \tag{90.6}$$

(*S. Titeica*, 1935; *Б.И. Давыдов*, *И.Я. Померанчук*, 1939) [1]).

При фактическом применении этой формулы надо расшифровать смысл обозначения s. Дискретное квантование уровней энергии электрона проводимости в магнитном поле возникает при замкнутых квазиклассических траекториях в **p**-пространстве (т. е. замкнутых сечениях изоэнергетических поверхностей), что и будет подразумеваться ниже. При этом квантовые состояния определяются четырьмя числами:

$$s = (n, P_x, P_z = p_z, \sigma), \tag{90.7}$$

где n — целое положительное (большое) число; число $\sigma = \pm 1$ задает значение проекции спина электрона, а P_x, P_z — компоненты обобщенного квазиимпульса $\mathbf{P} = \mathbf{p} - e\mathbf{A}/c$. Подразумевается, что векторный потенциал магнитного поля выбран в калибровке $A_x = -By$, $A_y = A_z = 0$; ввиду цикличности координат x и z, компоненты обобщенного импульса P_x и P_z сохраняются (см. IX, § 58). Уровни же энергии зависят только от трех из этих квантовых чисел: n, p_z, σ. Они даются выражением

$$\varepsilon_{n\sigma}(p_z) = \varepsilon(n, p_z) + \sigma\beta B \xi_n(p_z), \tag{90.8}$$

причем функция $\varepsilon(n, p_z)$ — решение уравнения

$$S(\varepsilon, p_z) = 2\pi \frac{e\hbar B}{c} \left(n + \frac{1}{2}\right). \tag{90.9}$$

[1]) При рассеянии на примесях принцип Паули не отражается на виде формул — ср. интеграл столкновений (78.14), в котором связанные с принципом Паули произведения nn' взаимно сокращаются.

Во втором члене в (90.8) $\beta = e\hbar/(2mc)$ — магнетон Бора, а множитель $\xi_n(p_z)$ характеризует изменение магнитного момента электрона в результате спин-орбитального взаимодействия в решетке.

Рассматривавшийся в § 84, 85 тензор проводимости есть в действительности результат усреднения точных функций $\sigma_{\alpha\beta}(B)$ по малым квантовым осцилляциям. В частности, согласно (85.3), усредненная таким образом поперечная проводимость $\overline{\sigma}_{yy} \backsim B^{-2}$. Покажем, прежде всего, как этот результат получается из формулы (90.6), и выясним при этом связь между фигурирующими в этой формуле величинами $W_{s's}$ и функцией $w(\mathbf{p}', \mathbf{p})$ в квазиклассическом интеграле столкновений электронов с примесями (78.14).

В § 84 было уже отмечено, что условие квазиклассичности движения электрона обеспечивает в то же время независимость процесса рассеяния от магнитного поля. Вероятность рассеяния в отсутствие поля с изменением квазиимпульса от $\mathbf{p}$ к $\mathbf{p}'$ была представлена в интеграле столкновений (78.14) в виде

$$w(\mathbf{p}', \mathbf{p})\delta(\varepsilon - \varepsilon')\frac{d^3p'}{(2\pi\hbar)^3}. \tag{90.10}$$

Чтобы написать это выражение в форме, пригодной и для рассеяния в магнитном поле, достаточно преобразовать его к переменным, сохраняющим свой смысл для движения в поле:

$$w(P_x', p_z', \varepsilon'; P_x, p_z, \varepsilon)\delta(\varepsilon - \varepsilon')\frac{dP_x\,dp_z\,d\varepsilon}{(2\pi\hbar)^3 v_y} \tag{90.11}$$

(производная $v_y = \partial\varepsilon/\partial p_y$ тоже подразумевается выраженной через новые переменные). Координата y при движении по квазиклассической траектории связана с обобщенным квазиимпульсом соотношением $P_x = p_x + eBy/c$; поэтому среднее (по траектории) значение

$$\overline{y} = \frac{c}{eB}[P_x - \overline{p}_x(\varepsilon, p_z)] \equiv \frac{\varkappa}{B}. \tag{90.12}$$

Усредненная по осцилляциям проводимость $\overline{\sigma}_{yy}$ получится по формуле (90.6) заменой в ней суммирования по дискретной переменной s интегрированием по непрерывной переменной ε. Введя для краткости обозначение

$$a(\varepsilon, p_z', p_z) = \frac{1}{2}\int(\varkappa - \varkappa')^2\frac{w\,dP_x\,dP_x'}{v_y v_y'(2\pi\hbar)^4}, \tag{90.13}$$

получим

$$\overline{\sigma}_{yy} = -\frac{e^2 N_{\text{пр}}}{B^2}\int a\frac{\partial n_0}{\partial\varepsilon}\delta(\varepsilon - \varepsilon')\,d\varepsilon\,d\varepsilon'\frac{2\,dp_z\,dp_z'}{(2\pi\hbar)^2} \tag{90.14}$$

(множитель 2 — от двух направлений спина электрона; вероятность рассеяния предполагается не зависящей от спина, так что его проекция не меняется). Интегрирование по ε' устраняет δ-функцию. При интегрировании же по ε можно считать медленно меняющийся множитель a постоянным (взяв его значение при $\varepsilon = \mu$) и интегрировать лишь производную $\partial n_0/\partial\varepsilon$. В результате получим

$$\overline{\sigma}_{yy} = \frac{e^2 N_{\text{пр}}}{B^2} \int a \frac{2\,dp_z\,dp'_z}{(2\pi\hbar)^2} \equiv \frac{1}{B^2} \int b(p_z) \cdot 2\,dp_z. \tag{90.15}$$

Перейдем теперь к учету дискретности уровней. Это значит, что вместо интегрирования в (90.14) по непрерывной переменной ε (при заданных P_x и p_z) надо писать суммирование по n, заменив

$$\int \ldots\, d\varepsilon \to \hbar\omega_B \sum_n \ldots\,,$$

где

$$\hbar\omega_B = \frac{\partial\varepsilon(n, p_z)}{\partial n},$$

как это ясно из (90.9) и определения циклотронной массы m^*. Используя введенные выше обозначения, имеем

$$\sigma_{yy} = -\frac{e^2 N_{\text{пр}}}{B^2} \int \sum_{nn'\sigma} a(\varepsilon_{n\sigma}, p'_z, p_z) \frac{\partial n_0(\varepsilon_{n\sigma})}{\partial\varepsilon} \times$$
$$\times\, \delta(\varepsilon_{n\sigma} - \varepsilon_{n'\sigma}) \hbar\omega_B \hbar\omega'_B \frac{dp_z\,dp'_z}{(2\pi\hbar)^3} \tag{90.16}$$

(отметим, что ввиду интегрирования по обеим переменным p_z и p'_z функцию a можно считать симметричной по ним).

Осциллирующая часть этого выражения, $\widetilde{\sigma}_{yy}$, выделяется с помощью формулы суммирования Пуассона (ср. IX, § 63)

$$\frac{1}{2}F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} F(n) = \int_0^{\infty} F(x)\,dx + 2\,\mathrm{Re} \sum_{l=1}^{\infty} \int_0^{\infty} F(x) e^{2\pi i l x}\,dx \tag{90.17}$$

и возникает от стоящей здесь суммы по l; усредненное же $\overline{\sigma}_{yy}$ возникает от первого, интегрального, члена.

Мы будем считать, что амплитуда осцилляций мала по сравнению с усредненной $\overline{\sigma}_{yy}$ (тем самым налагается определенное условие на величину магнитного поля — см. ниже (90.26)). Тогда достаточно учесть осциллирующую часть каждый раз лишь в одной из сумм (по n и по n') в (90.16). С учетом симметрии a

по p_z и p'_z и введя обозначение b по аналогии с определением в (90.15), имеем

$$\widetilde{\sigma}_{yy} = \frac{4}{B^2}\,\mathrm{Re}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{\sigma=\pm 1}\widetilde{J}_{l\sigma}, \tag{90.18}$$

где $\widetilde{J}_{l\sigma}$ — осциллирующая часть интеграла

$$J_{l\sigma} = -\int\limits_0^{\infty} dn\int b(\varepsilon_{n\sigma},p_z)\frac{\partial n_0(\varepsilon_{n\sigma})}{\partial\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon_{n\sigma}}{\partial n}e^{2\pi i l n}\,dp_z.$$

Введя в качестве переменной интегрирования вместо n функцию $\varepsilon(n,p_z)$ из (90.8), интегрируем по ε по частям (причем медленно меняющийся множитель b можно считать постоянным). Проинтегрированный член не приводит к осцилляционной зависимости от поля (и представляет собой лишь малую поправку к $\overline{\sigma}_{yy}$); опустив его, получим

$$\widetilde{J}_{l\sigma} = 2\pi i l\int\limits_0^{\infty}\int\frac{b(\varepsilon,p_z)}{\exp\dfrac{\varepsilon-\mu_\sigma}{T}+1}\frac{\partial n}{\partial\varepsilon}\,dp_z\,d\varepsilon. \tag{90.19}$$

Здесь $\mu_\sigma = \mu - \sigma\beta\xi B$ и введена функция

$$n(\varepsilon,p_z) = \frac{cS(\varepsilon,p_z)}{2\pi e\hbar B} - \frac{1}{2} \tag{90.20}$$

(ср. (90.9)); в аргументе функции $b(\varepsilon_{n\sigma},p_z)$ пренебрежено членом $\beta\xi B$ по сравнению с большим ε.

Интегрирование по p_z в (90.19) производится в точности так, как в интеграле (см. IX) (63.8) при исследовании эффекта де Гааза–ван Альена. Интеграл определяется областями вблизи точек $p_z = p_{z\,\mathrm{ex}}(\varepsilon)$, в которых $n(\varepsilon,p_z)$ (т. е. площадь сечения S) как функция p_z имеет экстремумы. В результате получим

$$\widetilde{J}_{l\sigma} = \sum_{\mathrm{ex}}\int\limits_0^{\infty}\frac{2\pi i\sqrt{l}\exp\{2\pi i l n_{\mathrm{ex}} \pm i\pi/4\}b_{\mathrm{ex}}(\varepsilon)}{\left[\exp\dfrac{\varepsilon-\mu_\sigma}{T}+1\right]\left|\dfrac{\partial^2 n}{\partial p_z^2}\right|_{\mathrm{ex}}^{1/2}}\frac{dn_{\mathrm{ex}}}{d\varepsilon}\,d\varepsilon, \tag{90.21}$$

где

$$n_{\mathrm{ex}}(\varepsilon) = n(\varepsilon,p_{z\,\mathrm{ex}}(\varepsilon)),\qquad b_{\mathrm{ex}}(\varepsilon) = b(\varepsilon,p_{z\,\mathrm{ex}}(\varepsilon)),$$

а знаки + или − в экспоненте относятся соответственно к случаям, когда $p_{z\,\mathrm{ex}}$ является точкой максимума или минимума функции $n(\varepsilon,p_z)$; суммирование производится по всем экстремальным точкам.

В свою очередь интеграл (90.21) вполне аналогичен интегралу (см. IX) (63.9) отличаясь от него лишь медленно меняющимися множителями b и $dn_{\text{ex}}/d\varepsilon = cm^*_{\text{ex}}/(e\hbar B)$ в подынтегральном выражении; эти множители $\left(\text{как и множитель } \left|\frac{\partial^2 n}{\partial p_z^2}\right|_{\text{ex}}^{-1/2}\right)$ могут быть заменены их значениями при $\varepsilon = \mu$, т. е. на ферми-поверхности. После этого интегрирование по ε и суммирование по σ приводит к окончательному результату

$$\widetilde{\sigma}_{yy} = \sum_{\text{ex}} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \sigma_{yy}^{(l)} \cos\left\{ l \frac{cS_{\text{ex}}}{e\hbar B} \pm \frac{\pi}{4} \right\},$$

$$\sigma_{yy}^{(l)} = \frac{2^{5/2}\pi^{1/2}(e\hbar)^{1/2} b_{\text{ex}}}{c^{1/2}B^{3/2}l^{1/2}} \left|\frac{\partial^2 S}{\partial p_z^2}\right|_{\text{ex}}^{-1/2} \frac{\lambda_l}{\operatorname{sh}\lambda_l} \cos\left(\pi l \xi_{\text{ex}} \frac{m^*_{\text{ex}}}{m}\right), \qquad (90.22)$$

$$\lambda_l = \frac{2\pi^2 lT}{\hbar\omega_B}, \qquad \omega_B = \frac{eB}{m^*_{\text{ex}} c},$$

причем S_{ex}, ξ_{ex}, m^*_{ex}, b_{ex} берутся при $\varepsilon = \mu$ на ферми-поверхности [1]).

Если при заданном направлении **B** имеется всего одно экстремальное сечение ферми-поверхности, то существует пропорциональность между осциллирующими частями проводимости σ_{yy} и продольной магнитной восприимчивости. Сравнив (90.22) с формулой (63.13) (см. IX) найдем

$$\widetilde{\sigma}_{yy} = \frac{(2\pi)^4 \hbar^3 m^*_{\text{ex}} b_{\text{ex}}}{S_{\text{ex}}^2} \frac{\partial \widetilde{M}_z}{\partial B}. \qquad (90.23)$$

Изложенные вычисления предполагают малость амплитуды осцилляций проводимости по сравнению с ее усредненным значением. Более того, это требование по существу является условием применимости всей изложенной в § 84, 85 теории: ясно, что усредненные значения имеют реальный смысл, лишь если они являются главной частью тензора проводимости.

При $\hbar\omega_B \sim T$ амплитуда осцилляций определяется первыми членами суммы в (90.22), в которых $l \sim 1$, $\lambda_l \sim 1$. Согласно определению в (90.15), величина b_{ex} оценивается как $b_{\text{ex}} \sim \overline{\sigma} B^2/p_F$. Производная же $\partial^2 S/\partial p_z^2 \sim 1$. Отсюда находим следующую оцен-

[1]) Осцилляции проводимости были рассмотрены *А.И. Ахиезером* (1939) и *Б.И. Давыдовым* и *И.Я. Померанчуком* (1939) для квадратичного закона дисперсии электронов, и *А.М. Косевичем* и *В.В. Андреевым* (1960) для произвольного закона дисперсии.

ку амплитуды осцилляций:

$$\frac{\tilde{\sigma}}{\overline{\sigma}} \sim \left(\frac{\hbar\omega_B}{\varepsilon_F}\right)^{1/2}, \qquad \hbar\omega_B \sim T. \tag{90.24}$$

Это отношение мало уже в силу обязательного условия (90.3).

Если же $T \ll \hbar\omega_B$, то оценка меняется. В этом случае амплитуда осцилляций определяется суммой большого числа членов в (90.22), в которых $\lambda_l \sim 1$, т. е. $l \sim \hbar\omega_B/T \gg 1$. Число таких членов порядка величины того же l. По сравнению с предыдущей оценкой здесь появляется дополнительный множитель $l^{-1/2}l \sim (\hbar\omega_B/T)^{1/2}$, так что

$$\frac{\tilde{\sigma}}{\overline{\sigma}} \sim \left(\frac{\hbar\omega_B}{\varepsilon_F}\right)^{1/2}\left(\frac{\hbar\omega_B}{T}\right)^{1/2}. \tag{90.25}$$

Требование малости этого отношения приводит к условию

$$\hbar\omega_B \ll (\varepsilon_F T)^{1/2}. \tag{90.26}$$

Задача

Определить поперечную проводимость электронного газа с квадратичным законом дисперсии ($\varepsilon = p^2/(2m)$). Электроны рассеиваются на примесных атомах по изотропному закону с независящим от энергии сечением.

Решение. Задача сводится к вычислению фигурирующей в (90.15) и (90.23) величины $b(p_z)$. При квадратичном законе дисперсии $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, и поскольку среднее значение скорости вдоль замкнутой траектории $\overline{\mathbf{v}} = 0$, то и $\overline{\mathbf{p}} = 0$; поэтому согласно (90.12) $\varkappa = cP_x/e$. Согласно сказанному в тексте при вычислении среднего значения $(\varkappa - \varkappa')^2$ можно считать процесс рассеяния не зависящим от магнитного поля. При этом разница между $\mathbf{P}$ и $\mathbf{p}$ несущественна: выбрав точку нахождения рассеивающего атома в качестве точки $\mathbf{r} = 0$, будем иметь $\mathbf{P} = \mathbf{p}$.

В рассматриваемом случае вероятность рассеяния имеет вид $v\sigma_0\, do'/(4\pi)$, где do' — телесный угол направлений импульса $\mathbf{p}'$ после рассеяния, а σ_0 — постоянное полное сечение рассеяния. Это выражение можно представить в эквивалентном виде:

$$\frac{\sigma_0}{4\pi m}\, dp'_z\, d\varphi'\, \delta(\varepsilon - \varepsilon')\, d\varepsilon',$$

где φ' — азимутальный угол направления $\mathbf{p}'$ в плоскости xy; здесь оно заменяет выражение (90.11). Аналогичным образом записываем элемент объема $\mathbf{p}$-пространства в виде $d^3p \to m\, dp_z\, d\varphi\, d\varepsilon$. При этом

$$p_x = (2m\varepsilon - p_z^2)^{1/2}\cos\varphi.$$

Теперь находим

$$a(\varepsilon, p'_z, p_z) = \frac{c^2\sigma_0}{8\pi e^2}\int (p_x - p'_x)^2\frac{d\varphi\, d\varphi'}{2\pi\hbar} = \frac{\sigma_0 c^2}{8e^2\hbar}(4m\varepsilon - p_z^2 - p_z'^2)$$

и, далее,

$$b(\varepsilon, p_z) = e^2 N_{\text{пр}} \int\limits_{-\sqrt{2m\varepsilon}}^{\sqrt{2m\varepsilon}} a \frac{dp'_z}{(2\pi\hbar)^2} = \frac{c^2\sqrt{2m\varepsilon}}{16\pi^2\hbar^3 l} \left(\frac{10}{3} m\varepsilon - p_z^2\right),$$

где $l = 1/(\sigma_0 N_{\text{пр}})$ – длина свободного пробега.

Усредненная проводимость вычисляется согласно (90.15) и равна

$$\overline{\sigma}_{yy} = \frac{c^2 p_F N}{B^2 l},$$

где $N = p_F^3/(3\pi^2\hbar^3)$ — плотность числа электронов. Площадь сечения ферми-сферы имеет максимум при $p_z = 0$, причем $S_{\text{ex}} = \pi p_F^2$. Поэтому

$$b_{\text{ex}} = \frac{5c^2 N}{16 l}.$$

Для осциллирующей части проводимости находим согласно (90.23):

$$\widetilde{\sigma}_{yy} = B^2 \overline{\sigma}_{yy} \frac{5}{6N\varepsilon_F} \frac{\partial \widetilde{M}_z}{\partial B}.$$

Осциллирующая часть намагниченности $\widetilde{M}_z$ для рассматриваемой модели дается формулой (60.6) (см. V).

ГЛАВА X

ДИАГРАММНАЯ ТЕХНИКА ДЛЯ НЕРАВНОВЕСНЫХ СИСТЕМ

§ 91. Мацубаровская восприимчивость

Исследование поведения различных систем в слабом переменном внешнем поле сводится обычно к вычислению соответствующих обобщенных восприимчивостей. В этом параграфе будут выведены формулы, связывающие обобщенную восприимчивость с некоторой вспомогательной величиной, которую можно вычислять с помощью мацубаровской диаграммной техники; тем самым открывается путь для использования этой техники при исследовании кинетических свойств систем (*А.А. Абрикосов, И.Е. Дзялошинский, Л.П. Горьков*, 1962).

Напомним определение обобщенной восприимчивости $\alpha(\omega)$ (см. V, § 123). Пусть внешнее воздействие на систему описывается введением в ее гамильтониан возмущающего оператора вида

$$\widehat{V}(t) = -\widehat{x}f(t), \tag{91.1}$$

где $\widehat{x}$ — шредингеровский (независящий от времени) оператор некоторой физической величины, характеризующей систему, а возмущающая обобщенная сила $f(t)$ есть заданная функция времени; предполагается, что в отсутствие внешнего воздействия среднее значение величины x равно нулю. Тогда в первом по f приближении имеется линейная связь между фурье-компонентами среднего значения $\overline{x}(t)$ и силой $f(t)$; обобщенная восприимчивость есть коэффициент в этом соотношении:

$$\overline{x}_\omega = \alpha(\omega)f_\omega. \tag{91.2}$$

Согласно формуле Кубо (см. V, § 126) функция $\alpha(\omega)$ может быть представлена в операторном виде как

$$\alpha(\omega) = i\int\limits_0^\infty e^{i\omega t}\langle\widehat{x}_0(t)\widehat{x}_0(0) - \widehat{x}_0(0)\widehat{x}_0(t)\rangle\,dt, \tag{91.3}$$

где $\widehat{x}_0(t)$ — гейзенберговский оператор, определенный по невозмущенному гамильтониану системы (о чем напоминает индекс 0), а усреднение производится по заданному невозмущен-

ному стационарному состоянию системы, или по распределению Гиббса с невозмущенным гамильтонианом [1]).

Рассмотрим теперь, чисто формальным образом, систему, подчиняющуюся «мацубаровским» уравнениям движения, отличающимся от реальных уравнений заменой времени $t \to i\tau$; новая переменная τ пробегает значения в конечном интервале

$$-\frac{1}{T} \leqslant \tau \leqslant \frac{1}{T}. \tag{91.4}$$

Пусть на эту систему налагается возмущение

$$\widehat{V}(\tau) = -\widehat{x}f(\tau). \tag{91.5}$$

Функцией переменной τ будет тогда и среднее значение $\overline{x}$. Разложим функцию $f(\tau)$ в ряд Фурье на интервале (91.4):

$$f(\tau) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} f_s e^{-i\zeta_s \tau}, \qquad \zeta_s = 2\pi s T \tag{91.6}$$

и аналогичным образом — функцию $\overline{x}(\tau)$ [2]). *Мацубаровской восприимчивостью* назовем коэффициент пропорциональности между компонентами обоих разложений:

$$\overline{x}_s = \alpha_M(\zeta_s) f_s. \tag{91.7}$$

Наша цель состоит теперь, с одной стороны, в получении для $\alpha_M(\zeta_s)$ формулы, аналогичной (91.3), и, с другой стороны, в нахождении связи между $\alpha_M(\zeta_s)$ и интересующей нас функцией $\alpha(\omega)$. Начнем с первой части задачи.

Пусть $\widehat{H}$ — невозмущенный гамильтониан системы. «Точный» мацубаровский оператор величины x вычисляется по формуле [3])

$$\widehat{x}^M(\tau) = \widehat{\sigma}^{-1}(\tau, 0)\widehat{x}_0^M(\tau)\widehat{\sigma}(\tau, 0), \tag{91.8}$$

где $\widehat{\sigma}$ — мацубаровская S-матрица:

$$\widehat{\sigma}(\tau, 0) = T_\tau \exp\left\{-\int_0^\tau \widehat{V}_0^M(\tau')\,d\tau'\right\}, \tag{91.9}$$

а индексом 0 отмечены операторы в мацубаровском «представ-

[1]) Во всей этой главе полагаем $\hbar = 1$.

[2]) Для величины x, имеющей классический предел, должна использоваться техника, отвечающая случаю статистики Бозе; поэтому разложение (91.6) производится по «четным частотам» ζ_s.

[3]) Все используемые ниже понятия и формулы даны в IX, § 38.

лении взаимодействия» [1]):

$$\widehat{x}_0^M(\tau) = \exp(\tau\widehat{H}_0)\widehat{x}\exp(-\tau\widehat{H}_0) \tag{91.10}$$

и аналогично для $\widehat{V}_0^M(\tau)$. В первом порядке теории возмущений выражение (91.9) сводится к

$$\widehat{\sigma}(\tau, 0) \approx 1 - \int_0^\tau \widehat{V}_0^M(\tau')\,d\tau'. \tag{91.11}$$

Вычислим усредненное по распределению Гиббса значение

$$\overline{x}(\tau) = \mathrm{Sp}\,\{e^{-\widehat{H}/T}\widehat{x}^M(\tau)\}. \tag{91.12}$$

Согласно формуле (38.6) (см. IX) имеем

$$e^{-\widehat{H}/T} = e^{-\widehat{H}_0/T}\widehat{\sigma}\left(\frac{1}{T}, 0\right) \approx \exp\left(-\frac{\widehat{H}_0}{T}\right)\left(1 - \int_0^{1/T} \widehat{V}_0^M(\tau')\,d\tau'\right),$$

а согласно (91.8) и (91.11)

$$\widehat{x}^M(\tau) \approx \widehat{x}_0^M(\tau) - \int_0^\tau \{\widehat{x}_0^M(\tau)\widehat{V}_0^M(\tau') - \widehat{V}_0^M(\tau')\widehat{x}_0^M(\tau)\}\,d\tau'.$$

Подставив эти выражения в (91.12), получим с той же точностью:

$$\overline{x}(\tau) = \mathrm{Sp}\left\{e^{-\widehat{H}_0/T}\left[\int_0^\tau (\widehat{V}_0^M(\tau')\widehat{x}_0^M(\tau) - \widehat{x}_0^M(\tau)\widehat{V}_0^M(\tau'))\,d\tau' - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \int_0^{1/T} \widehat{V}_0^M(\tau')\widehat{x}_0(\tau)\,d\tau'\right]\right\}.$$

В первом интеграле переменная $\tau' < \tau$, а во втором делим область интегрирования на интервалы от 0 до τ и от τ до $1/T$. После сокращений и подстановки $\widehat{V}_0(\tau)$ из (91.5) видим, что результат может быть записан в виде

$$\overline{x}(\tau) = \int_0^{1/T} f(\tau')\langle T_\tau \widehat{x}_0^M(\tau)\widehat{x}_0^M(\tau')\rangle\,d\tau' \tag{91.13}$$

[1]) Формула (91.8) справедлива и в том случае, когда исходный оператор $\widehat{V}(\tau)$ зависит явно от переменной τ (хотя это и не подразумевалось при выводе в IX, § 38).

(напомним, что оператор T_τ хронологизации по переменной τ расставляет множители, без изменения знака произведения, в порядке возрастания τ справа налево); усреднение в (91.13) производится по распределению Гиббса с гамильтонианом $\widehat{H}_0$. Результат усреднения зависит только от разности $\tau - \tau'$. Наконец, представив $f(\tau')$ в виде фурье-разложения (91.6), получим окончательно искомую формулу для мацубаровской восприимчивости:

$$\alpha_M(\zeta_s) = \int\limits_0^{1/T} e^{i\zeta_s\tau}\langle T_\tau \widehat{x}_0^M(\tau)\widehat{x}_0^M(0)\rangle\, d\tau. \tag{91.14}$$

Мы видим, что $\alpha_M(\zeta_s)$ выражается через фурье-компоненту мацубаровской гриновской функции, построенной по операторам $\widehat{x}$ (ср. определение (37.2) (см. IX)). Обратим внимание на отличие от формулы (91.3) для $\alpha(\omega)$, в которой стоит запаздывающий (по времени t) коммутатор, а не хронологизированное произведение.

Для решения второй части поставленной задачи — нахождения связи между функциями $\alpha(\omega)$ и $\alpha_M(\zeta_s)$ — надо, исходя из формул (91.3) и (91.14), выразить эти функции через матричные элементы оператора $\widehat{x}$. Мы не будем проводить здесь соответствующие вычисления, поскольку они практически совпадают с вычислениями, проводившимися уже по другим аналогичным поводам (ср. V, § 126; IX, § 36, 37). Ограничимся указанием результата:

$$\alpha(\omega) = \sum_{m,n} e^{-E_n/T}\frac{|x_{mn}|^2}{\omega - \omega_{mn} + i0}(1 - e^{-\omega_{mn}/T}), \tag{91.15}$$

$$\alpha_M(\zeta_s) = \sum_{m,n} e^{-E_n/T}\frac{|x_{mn}|^2}{i\zeta_s - \omega_{mn}}(1 - e^{-\omega_{mn}/T}). \tag{91.16}$$

Здесь x_{mn} — матричные элементы шредингеровского оператора $\widehat{x}$ по отношению к стационарным состояниям системы; $\omega_{mn} = E_m - E_n$. Сравнение обоих выражений показывает, что

$$\alpha_M(\zeta_s) = \alpha(i\zeta_s), \qquad \zeta_s > 0. \tag{91.17}$$

Поскольку обобщенная восприимчивость $\alpha(\omega)$ вещественна на верхней мнимой полуоси ω, то функция $\alpha_M(\zeta_s)$ вещественна при $\zeta_s > 0$. С другой стороны, из (91.16) видно, что $\alpha_M(-\zeta_s) = \alpha_M^*(\zeta_s)$. Таким образом, $\alpha_M(\zeta_s)$ является четной вещественной функцией ζ_s и выражается через $\alpha(\omega)$ формулой

$$\alpha_M(\zeta_s) = \alpha(i|\zeta_s|). \tag{91.18}$$

Соотношение (98.18) устанавливает искомую связь. Для определения $\alpha(\omega)$ надо построить функцию, аналитическую в верхней полуплоскости переменной ω, значения которой в дискретных точках $\omega = i\zeta_s$ на верхней мнимой полуоси совпадают с $\alpha_M(\zeta_s)$; это и будет искомая обобщенная восприимчивость.

Описанный метод будет применен в следующей главе к кинетическим свойствам сверхпроводников.

Покажем в заключение, что знание $\alpha(\omega)$ позволяет определить закон релаксации величины x к ее равновесному значению $x = 0$. Для этого будем считать, что начальное неравновесное значение x создается обобщенной силой $f(t)$, действующей при $t < 0$, а затем выключенной. Значение $x(t)$ в некоторый момент времени t определяется значениями f в течение всего предшествующего времени формулой вида

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} \alpha(t - t')f(t')\,dt',$$

причем функция $\alpha(t)$ связана с обобщенной восприимчивостью обратным преобразованием Фурье

$$\alpha(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\omega)e^{-i\omega t}\frac{d\omega}{2\pi}$$

(ср. V, § 123). Если $f = 0$ при $t > 0$, то

$$x(t) = \int_{-\infty}^{0} \alpha(t - t')f(t')\,dt'.$$

Поведение $x(t)$ при больших t определяется асимптотическим поведением $\alpha(t)$ при $t \to \infty$. В свою очередь последнее определяется ближайшей к вещественной оси особой точкой функции $\alpha(\omega)$ в нижней полуплоскости. В частности, релаксации x по простому экспоненциальному закону $x \sim e^{-t/\tau}$ со временем релаксации τ соответствует наличие у $\alpha(\omega)$ простого полюса при $\omega = -i/\tau$.

§ 92. Гриновские функции неравновесной системы

Задачи физической кинетики всегда связаны с рассмотрением неравновесных состояний. Тем не менее применение описанного в предыдущем параграфе метода позволяет в ряде случаев свести задачи о вычислении кинетических величин к вычислению гриновских функций для термодинамически равновесных систем; тем самым появляется возможность использования такой диаграммной техники (как мацубаровская), которая по самому

своему существу применима именно к равновесным состояниям. Естественно, что такая возможность во всяком случае ограничена физическими вопросами, относящимися лишь к слабо неравновесным состояниям.

Мы приступим теперь к построению диаграммной техники, пригодной в принципе для вычисления гриновских функций систем, находящихся в произвольных неравновесных состояниях. Получаемые в этой технике уравнения для гриновских функций по своему смыслу аналогичны кинетическим уравнениям. В применении же к равновесным системам эта же техника позволяет получить гриновские функции и обобщенные восприимчивости (при отличных от нуля температурах) как функции сразу от непрерывных вещественных частот, без необходимости в аналитическом продолжении (в этой связи она может оказаться, в сложных случаях, более удобной, чем мацубаровская техника) [1]).

Гриновская функция неравновесной системы определяется так же, как и в равновесном случае:

$$iG_{\sigma_1\sigma_2}(X_1, X_2) = \langle n|T\widehat{\Psi}_{\sigma_1}(X_1)\widehat{\Psi}^+_{\sigma_2}(X_2)|n\rangle = \\ = \begin{cases} \langle n|\widehat{\Psi}_{\sigma_1}(X_1)\widehat{\Psi}^+_{\sigma_2}(X_2)|n\rangle, & t_1 > t_2, \\ \mp\langle n|\widehat{\Psi}^+_{\sigma_2}(X_2)\widehat{\Psi}_{\sigma_1}(X_1)|n\rangle, & t_1 < t_2. \end{cases} \qquad (92.1)$$

Разница состоит лишь в том, что усреднение (обозначенное символом $\langle n|\ldots|n\rangle$) производится теперь по произвольному квантовому состоянию системы, а не обязательно по стационарному состоянию, как в равновесном случае [2]). Верхний знак (здесь и везде ниже) относится к статистике Ферми, а нижний — к статистике Бозе; в последнем случае (для системы из бесспиновых частиц) спиновые индексы σ_1, σ_2 надо, конечно, опустить. В случае статистики Бозе предполагается, что конденсация отсутствует, т. е. что либо речь идет о системах с несохраняющимся числом частиц (фононы, фотоны), либо система находится при температурах выше точки начала конденсации. В неоднородной нерав-

---

[1]) Эта техника принадлежит *Л.В. Келдышу* (1964). Она близка в некоторых отношениях к технике, развитой *Миллсом* (*R. Mills*, 1962) для равновесных состояний.

[2]) В IX, § 36, в определение функции G равновесной системы при $T \neq 0$ включалось также и усреднение по распределению Гиббса. Напомним лишний раз в этой связи, что согласно основным принципам статистики результат статистического усреднения для равновесной системы не зависит от того, производится ли оно по точной волновой функции стационарного состояния замкнутой системы, или с помощью распределения Гиббса для системы в «термостате». Разница состоит лишь в том, что в первом случае результат усреднения будет выражен через энергию и число частиц в системе, а во втором — через температуру и химический потенциал.

новесной системе функция (92.1) зависит уже от обеих пар переменных $X_1 = (t_1, \mathbf{r}_1)$ и $X_2 = (t_2, \mathbf{r}_2)$ по отдельности, а не только от их разности $X_1 - X_2$, как в равновесном случае.

Диаграммная техника должна дать возможность выразить гриновскую функцию системы взаимодействующих частиц через функции идеального газа. При этом, однако, автоматически возникает необходимость во введении наряду с G еще и других функций. С целью не разбивать дальнейшее изложение, дадим сразу же определение этих функций и выясним некоторые их свойства.

По причинам, которые выяснятся в следующем параграфе, целесообразно обозначить функцию (92.1) как G^{--}; таким образом, запишем это определение в виде[1])

$$iG_{12}^{--} = \langle T\widehat{\Psi}_1\widehat{\Psi}_2^+\rangle = \begin{cases} \langle\widehat{\Psi}_1\widehat{\Psi}_2^+\rangle, & t_1 > t_2, \\ \mp\langle\widehat{\Psi}_2^+\widehat{\Psi}_1\rangle, & t_1 < t_2. \end{cases} \tag{92.2}$$

Определение следующей функции,

$$iG_{12}^{++} = \langle\widetilde{T}\widehat{\Psi}_1\widehat{\Psi}_2^+\rangle = \begin{cases} \mp\langle\widehat{\Psi}_2^+\widehat{\Psi}_1\rangle, & t_1 > t_2, \\ \langle\widehat{\Psi}_1\widehat{\Psi}_2^+\rangle, & t_1 < t_2, \end{cases} \tag{92.3}$$

отличается от (92.2) тем, что вместо T в нем стоит символ $\widetilde{T}$, означающий упорядочение расположения операторных множителей в обратном хронологическом порядке — справа налево в порядке убывания времен.

Еще две функции определяются как средние значения нехронологизированных произведений Ψ-операторов:

$$iG_{12}^{+-} = \langle\widehat{\Psi}_1\widehat{\Psi}_2^+\rangle, \quad iG_{12}^{-+} = \mp\langle\widehat{\Psi}_2^+\widehat{\Psi}_1\rangle. \tag{92.4}$$

Разница в знаках в этих определениях для ферми-систем связана с общим правилом — необходимостью изменения знака при перестановке Ψ-операторов.

Отметим, что вторая из функций (92.4) при $t_1 = t_2 \equiv t$ совпадает с одночастичной матрицей плотности; в полной записи:

$$\mp iG^{-+}(t, \mathbf{r}_1; t, \mathbf{r}_2) = \mathcal{N}\rho(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \tag{92.5}$$

[1]) Для уменьшения громоздкости обозначений условимся ниже подразумевать спиновые индексы включенными в условное обозначение переменных X: $X = (t, \mathbf{r}, \sigma)$. Там, где это не может привести к недоразумениям, будем еще больше упрощать обозначения, отмечая значения аргументов X соответствующими индексами: $\Psi_1 \equiv \Psi(X_1)$, $G_{12} = G(X_1, X_2)$ и т. д. Наконец, условимся писать символ усреднения просто как $\langle\ldots\rangle$ вместо $\langle n|\ldots|n\rangle$.

(ср. IX, (7.17), (31.4)); с какой стороны t_2 стремится к пределу t_1 — здесь все равно, так как функция G^{-+} непрерывна при $t_2 = t_1$. Значение же функции iG^{+-} при $t_1 = t_2$ связано со значением iG^{-+} формулой

$$i\{G^{+-}(t, \mathbf{r}_1; t, \mathbf{r}_2) - G^{-+}(t, \mathbf{r}_1; t, \mathbf{r}_2)\} = \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \tag{92.6}$$

следующей из правила коммутации фермиевских или бозевских Ψ-операторов.

Определенные таким образом четыре G-функции не независимы. Они связаны друг с другом линейным соотношением, очевидным непосредственно из их определений:

$$G^{--} + G^{++} = G^{-+} + G^{+-}. \tag{92.7}$$

Функции G^{--} и G^{++} связаны также и соотношением «антиэрмитовой сопряженности» по отношению к перестановке их аргументов:

$$G_{12}^{--} = -G_{21}^{++*}. \tag{92.8}$$

Функции же G^{-+} и G^{+-} «антиэрмитовы» сами по себе:

$$G_{12}^{-+} = -G_{21}^{-+*}, \quad G_{12}^{+-} = -G_{21}^{+-*}. \tag{92.9}$$

Важную роль в дальнейшем будет играть связь этих функций с запаздывающими или опережающими гриновскими функциями. Последние определяются аналогично тому, как это делалось в равновесном случае (ср. IX, § 36):

$$iG_{12}^{R} = \begin{cases} \langle \widehat{\Psi}_1 \widehat{\Psi}_2^{+} \pm \widehat{\Psi}_2^{+} \widehat{\Psi}_1 \rangle, & t_1 > t_2, \\ 0, & t_1 < t_2, \end{cases} \tag{92.10}$$

$$iG_{12}^{A} = \begin{cases} 0, & t_1 > t_2, \\ -\langle \widehat{\Psi}_1 \widehat{\Psi}_2^{+} \pm \widehat{\Psi}_2^{+} \widehat{\Psi}_1 \rangle, & t_1 < t_2. \end{cases}$$

Эти две функции «эрмитово-сопряжены» друг с другом:

$$G_{12}^{A} = G_{21}^{R*}. \tag{92.11}$$

Прямое сравнение определений (92.2)–(92.4) и (92.10) дает

$$\begin{aligned} G^R &= G^{--} - G^{-+} = G^{+-} - G^{++}, \\ G^A &= G^{--} - G^{+-} = G^{-+} - G^{++}. \end{aligned} \tag{91.12}$$

В стационарном, пространственно-однородном случае, когда все функции зависят только от разностей $t = t_1 - t_2$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, они могут быть подвергнуты фурье-разложению по этим

переменным. Из (92.8) и (92.11) следуют для фурье-компонент равенства

$$G^{--}(\omega, \mathbf{p}) = -[G^{++}(\omega, \mathbf{p})]^*, \quad G^A(\omega, \mathbf{p}) = [G^R(\omega, \mathbf{p})]^*, \tag{92.13}$$

а из (92.9) следует, что фурье-компоненты $G^{+-}(\omega, \mathbf{p})$ и $G^{-+}(\omega, \mathbf{p})$ — мнимые.

Для системы невзаимодействующих частиц функция G^{--} удовлетворяет уравнению

$$\widehat{G}_{01}^{-1} G_{12}^{(0)--} = \delta(X_1 - X_2), \tag{92.14}$$

где $\widehat{G}_0^{-1}$ обозначает дифференциальный оператор

$$\widehat{G}_0^{-1} = i\frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon(-i\nabla) + \mu = i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\Delta}{2m} + \mu \tag{92.15}$$

($\varepsilon(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^2/(2m)$), а

$$\delta(X_1 - X_2) = \delta_{\sigma_1\sigma_2}\delta(t_1 - t_2)\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2); \tag{92.16}$$

индекс (0) у G-функции указывает, что она относится к идеальному газу, а индекс 1 у оператора $\widehat{G}_0^{-1}$ — что дифференцирование производится по переменным t_1, $\mathbf{r}_1$. Напомним, что δ-функция в правой части уравнения (92.14) связана со скачком, который функция G^{--} испытывает при $t_1 = t_2$ [1]). Такой же скачок испытывают функции G^R и G^A, и потому $G^{(0)R}$ и $G^{(0)A}$ удовлетворяют такому же уравнению. Функция же G^{++} имеет при $t_1 = t_2$ скачок обратного знака; поэтому

$$\widehat{G}_{01}^{-1} G_{12}^{(0)++} = -\delta(X_1 - X_2). \tag{92.17}$$

Наконец, функции G^{+-} и G^{-+} непрерывны при $t_1 = t_2$; поэтому для идеального газа они удовлетворяют уравнениям [2])

$$\widehat{G}_{01}^{-1} G_{12}^{(0)+-} = 0, \quad \widehat{G}_{01}^{-1} G_{12}^{(0)-+} = 0. \tag{92.18}$$

---

[1]) См. IX, § 9. Приведенный там вывод уравнения не связан с подразумевавшимся усреднением по основному состоянию системы и остается справедливым при усреднении по любому квантовому состоянию.

[2]) Если дифференцирование производится не по первым, а по вторым переменным в G-функциях, то должен быть изменен знак перед $i\partial/\partial t$, т. е. оператор $\widehat{G}_{01}^{-1}$ изменен на $\widehat{G}_{02}^{-1*}$:

$$\widehat{G}_{02}^{-1*} G_{12}^{(0)--} = \delta(X_1 - X_2) \tag{92.14a}$$

и т. п.

Вычислим все G-функции для стационарного однородного состояния идеального газа, характеризующегося некоторым (не обязательно равновесным) распределением частиц по импульсам n_p. Для упрощения формул будем считать, что это распределение не зависит от спина. Тогда спиновая зависимость G-функций (в статистике Ферми) отделяется в виде множителя $\delta_{\sigma_1\sigma_2}$; вместе со спиновыми индексами будем опускать и этот множитель.

Ψ-операторы идеального газа пишем в виде обычных разложений:

$$\widehat{\Psi}_0(t,\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{V}}}\sum_{\mathbf{p}} \widehat{a}_{\mathbf{p}} \exp\{i[\mathbf{pr} - \varepsilon(\mathbf{p})t + \mu t]\} \tag{92.19}$$

и аналогично для $\widehat{\Psi}_0^+$ (ср. IX, (9.3)). При подстановке этих выражений в определения G-функций надо помнить, что отличны от нуля диагональные матричные элементы лишь от произведений операторов уничтожения и рождения частиц с одинаковыми $\mathbf{p}$, причем

$$\langle \widehat{a}_{\mathbf{p}}^+ \widehat{a}_{\mathbf{p}} \rangle = n_{\mathbf{p}}, \qquad \langle \widehat{a}_{\mathbf{p}} \widehat{a}_{\mathbf{p}}^+ \rangle = 1 \mp n_{\mathbf{p}}.$$

Таким образом, найдем, например,

$$G^{(0)-+}(t,\mathbf{r}) = \pm\frac{i}{\mathcal{V}}\int n_{\mathbf{p}} \exp\{i\mathbf{pr} - i\varepsilon(\mathbf{p})t + i\mu t\}\frac{\mathcal{V}\,d^3p}{(2\pi)^3},$$

где $t = t_1 - t_2$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Переписав это выражение тождественно в виде

$$G^{(0)-+}(t,\mathbf{r}) = \pm 2\pi i \int n_{\mathbf{p}} \exp(i\mathbf{pr} - i\omega t)\delta(\omega - \varepsilon + \mu)\frac{d\omega\, d^3p}{(2\pi)^4},$$

мы видим, что

$$G^{(0)-+}(\omega,\mathbf{p}) = \pm 2\pi i n_{\mathbf{p}}\delta(\omega - \varepsilon + \mu). \tag{92.20}$$

Аналогичным образом найдем

$$G^{(0)+-}(\omega,\mathbf{p}) = -2\pi i(1 \mp n_{\mathbf{p}})\delta(\omega - \varepsilon + \mu). \tag{92.21}$$

Для вычисления G^R удобнее всего исходить прямо из уравнения

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon(-i\nabla) + \mu\right] G^{(0)R}(t,\mathbf{r}) = \delta(t)\delta(\mathbf{r}),$$

решая его методом Фурье и учтя, что $G^R(\omega,\mathbf{p})$ не должна иметь особенностей в верхней полуплоскости ω. Отсюда сразу находим

$$G^{(0)R}(\omega,\mathbf{p}) = [\omega - \varepsilon(\mathbf{p}) + \mu + i0]^{-1} \tag{92.22}$$

(функция же $G^{(0)A}(\omega, \mathbf{p})$ получается отсюда, согласно (92.13), просто комплексным сопряжением).

Наконец, с помощью (92.12) находим теперь

$$G^{(0)--}(\omega, \mathbf{p}) = [\omega - \varepsilon(\mathbf{p}) + \mu + i0]^{-1} \pm 2\pi i n_{\mathbf{p}} \delta(\omega - \varepsilon + \mu) = \\ = \mathrm{P}\frac{1}{\omega - \varepsilon + \mu} + i\pi(\pm 2n_{\mathbf{p}} - 1)\delta(\omega - \varepsilon + \mu). \quad (92.23)$$

Обратим внимание на тот факт, что выражение (92.22) вообще не зависит от свойств состояния (т. е. от распределения $n_{\mathbf{p}}$), по которому производится усреднение. Это свойство функции $G^{(0)R}$ (и $G^{(0)A}$) не связано в действительности с заранее предположенной при выводе (92.22) однородностью и стационарностью состояния системы: функция $G^{0)R}(X_1, X_2)$ автоматически оказывается зависящей только от разности $X_1 - X_2$.

В применении к равновесной системе, в выражениях (92.21)–(92.23) надо понимать под $n_{\mathbf{p}}$ функцию распределения Ферми или Бозе. При этом G-функции окажутся выраженными через T и μ; тем самым будет осуществлен переход от усреднения по заданному стационарному квантовому состоянию к усреднению по распределению Гиббса.

Задача

Найти гриновские функции для однородного стационарного состояния фононного газа в жидкости.

Решение. Аналогично определениям (92.4), имеем для фононного поля:

$$iD_{12}^{+-} = \langle \widehat{\rho}_1' \widehat{\rho}_2' \rangle, \qquad iD_{12}^{-+} = \langle \widehat{\rho}_2' \widehat{\rho}_1' \rangle, \quad (1)$$

где $\widehat{\rho}' = \widehat{\rho}'^{+}$ — оператор переменной части плотности среды. Ввиду самосопряженности этого оператора, функции (1) связаны соотношением

$$D_{12}^{+-} = D_{21}^{-+} \quad (2)$$

(и, конечно, по-прежнему обладают свойством (92.9)).

Для газа невзаимодействующих фононов (см. IX, (24.10))

$$\widehat{\rho}' = \widehat{\rho}'^{+} = \sum_{\mathbf{k}} i\left(\frac{\rho_0 k}{2u\mathcal{V}}\right)^{1/2}\left(\widehat{c}_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{kr} - ukt)} - \widehat{c}_{\mathbf{k}}^{+} e^{-i(\mathbf{kr} - ukt)}\right) \quad (3)$$

(ρ_0 — невозмущенная плотность, u — скорость звука). Подставив (3) в (1) и перейдя от суммирования к интегрированию, имеем

$$iD^{(0)-+}(t, \mathbf{r}) = \frac{\rho_0}{2u}\int\left\{\langle \widehat{c}_{\mathbf{k}}^{+} \widehat{c}_{\mathbf{k}} \rangle e^{i(\mathbf{kr} - ukt)} + \langle \widehat{c}_{\mathbf{k}} \widehat{c}_{\mathbf{k}}^{+} \rangle e^{-i(\mathbf{kr} - ukt)}\right\}\frac{k\, d^3k}{(2\pi)^3},$$

или, заменив во втором члене переменную интегрирования $\mathbf{k} \to -\mathbf{k}$ и выразив средние значения через числа заполнения фононных состояний $N_{\mathbf{k}}$,

$$iD^{(0)-+}(t, \mathbf{r}) = \int \frac{\rho_0 k}{2u}\{N_{\mathbf{k}} e^{-iukt} + (1 + N_{-\mathbf{k}}) e^{iukt}\} e^{i\mathbf{kr}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}.$$

Подынтегральное выражение (без множителя $e^{i\mathbf{kr}}$) есть уже компонента фурье-разложения по координатам. Разложив также и по времени, получим

$$iD^{(0)-+}(\omega,\mathbf{k}) = \frac{\pi\rho_0 k}{u}\{N_\mathbf{k}\delta(\omega-uk)+(1+N_{-\mathbf{k}})\delta(\omega+uk)\}. \tag{4}$$

Для функции же $D^{(0)+-}$ имеем, согласно (2):

$$D^{(0)+-}(\omega,\mathbf{k}) = D^{(0)-+}(-\omega,-\mathbf{k}). \tag{5}$$

Еще две гриновские функции определяются как

$$iD_{12}^{--} = \langle T\widehat{\rho}_1{}'\widehat{\rho}_2{}'\rangle, \qquad iD_{12}^{++} = \langle\widetilde{T}\widehat{\rho}_1{}'\widehat{\rho}_2{}'\rangle. \tag{6}$$

При этом

$$D_{12}^{--} = D_{21}^{--}, \qquad D_{12}^{++} = D_{21}^{++}. \tag{7}$$

Для невзаимодействующих фононов аналогичное вычисление дает (ср. задачу в IX, § 31)

$$D^{(0)--}(\omega,\mathbf{k}) = -[D^{(0)++}(\omega,\mathbf{k})]^* =$$
$$= \frac{\rho_0 k}{2u}\left[\frac{1}{\omega-uk+i0}-\frac{1}{\omega+uk-i0}\right] - 2\pi i[N_\mathbf{k}\delta(\omega-uk)+N_{-\mathbf{k}}\delta(\omega+uk)]. \tag{8}$$

В согласии с (7), $D^{(0)--}(\omega,\mathbf{k}) = D^{(0)--}(-\omega,-\mathbf{k})$.

Из (8) следует, что в координатном представлении функция $D^{(0)--}(t,\mathbf{r})$ удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-u^2\Delta\right)D^{(0)--}(t,\mathbf{r}) = \rho_0\delta(t)\Delta\delta(\mathbf{r}), \tag{9}$$

заменяющему уравнение (92.14) для гриновских функций обычных частиц.

§ 93. Диаграммная техника для неравновесных систем

Всякая диаграммная техника основана на выделении из гамильтониана системы оператора взаимодействия: $\widehat{H} = \widehat{H}_0 + \widehat{V}$, где $\widehat{H}_0$ — гамильтониан системы невзаимодействующих частиц. Диаграммная техника есть теория возмущений по $\widehat{V}$.

Ее построение для неравновесной системы осуществляется по тому же пути, по которому это делалось в равновесном случае, при $T = 0$ [1]). Гриновская функция $G \equiv G^{--}$ выражается через Ψ-операторы в представлении взаимодействия (т. е. для идеального газа) формулой

$$iG_{12}^{--} = \langle\widehat{S}^{-1}\mathrm{T}[\widehat{\Psi}_{01}\widehat{\Psi}_{02}^{+}\widehat{S}]\rangle, \tag{93.1}$$

[1]) Дальнейшее изложение существенно опирается на изложение в IX, § 12, 13.

где

$$\widehat{S} \equiv \widehat{S}(\infty, -\infty) = \mathrm{T}\exp\left(-i \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{V}_0(t)\, dt\right), \tag{93.2}$$

а $\widehat{V}_0(t)$ — оператор $\widehat{V}$ в представлении взаимодействия. Усреднение в (93.1) производится по некоторому состоянию системы невзаимодействующих частиц. Для дальнейшего будет удобнее предположить, что это состояние является стационарным и однородным, но не основным (мы увидим далее, что это начальное состояние можно исключить и сформулировать теорию так, что уравнения вообще не будут от него зависеть). В этом разница со случаем $T = 0$, когда усреднение производится по основному состоянию. Это отличие очень существенно: усреднение оператора $\widehat{S}^{-1}$ уже нельзя отделить от усреднения остальных множителей (как это было сделано в IX, § 12, при переходе от (12.12) к (12.14)); дело в том, что неосновное состояние под влиянием оператора $\widehat{S}^{-1}$ переходит не само в себя, а в некоторую суперпозицию других возбужденных состояний (которые могут наглядно рассматриваться как результат всевозможных процессов взаимного рассеяния квазичастиц [1]).

Выражение (93.1) должно быть разложено по степеням $\widehat{V}$. При этом удобно сначала преобразовать $\widehat{S}^{-1}$, используя унитарность оператора $\widehat{S}$:

$$\widehat{S}^{-1} = \widehat{S}^{+} = \widetilde{\mathrm{T}}\exp\left(i \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{V}(t)\, dt\right) \tag{93.3}$$

(использована также эрмитовость оператора $\widehat{V}$); символ $\widetilde{\mathrm{T}}$ антихронологического упорядочения был уже введен в предыдущем параграфе.

Разложив $\widehat{S}$ и $\widehat{S}^{-1}$ в ряды и подставив их в (93.1), мы получим сумму различных членов, в каждом из которых надо произвести усреднение с помощью теоремы Вика, и каждому способу попарных сверток Ψ-операторов сопоставляется определенная диаграмма [2]).

[1]) Заметим, что по такой же причине изложенная в IX, § 12, 13, диаграммная техника, вообще говоря, неприменима даже при $T = 0$ в случае наличия внешних переменных полей (т. е. когда оператор $\widehat{V}$ зависит явно от времени уже в шредингеровском представлении): переменные поля возбуждают основное состояние системы. Подчеркнем в то же время, что развиваемая здесь техника пригодна и при наличии переменного поля.

[2]) Напомним, что в макроскопическом пределе справедливость теоремы Вика не связана с тем, по какому однородному стационарному состоянию производится усреднение – см. конец IX, § 13.

Заметим прежде всего, что (как и в диаграммной технике при $T = 0$, которую будем называть обычной) следует учитывать только связные диаграммы, не содержащие отсоединенных вакуумных петель. Вакуумные же петли взаимно сокращаются. В этом легко убедиться, рассмотрев несколько первых диаграмм, по которым можно усмотреть общий принцип такого сокращения.

Если все свертки, приводящие к связной диаграмме, производятся внутри множителя $\mathrm{T}\widehat{\Psi}_1\widehat{\Psi}_2^+\widehat{S}$ в (93.1), то мы получим члены, изображающиеся описанными в IX, § 13, обычными диаграммами (разумеется, с другим конкретным видом функций, отвечающих сплошным линиям). Напомним, что речь идет здесь о диаграммах в координатном представлении; для неравновесных состояний (когда G-функции зависят от переменных X_1 и X_2 по отдельности) переход к импульсному представлению неудобен. Другие члены возникают от свертываний, в которых участвуют также и Ψ-операторы из $\widehat{S}^{-1} = \widehat{S}^+$. В каждом порядке теории возмущений они получаются из обычных членов заменой любого множителя $\widehat{V}$, взятого из $\widehat{S}$, на множитель $\widehat{V}$ из $\widehat{S}^+$. Эти члены изображаются диаграммами того же графического вида, но с несколько измененным правилом их прочтения. Эти изменения являются следствием трех обстоятельств: 1) в $\widehat{S}^+$ операторы взаимодействия входят в виде $+i\widehat{V}$ (вместо $-i\widehat{V}$ в $\widehat{S}$); 2) все Ψ-операторы в $\widehat{S}^+$ стоят всегда левее операторов в произведении $\mathrm{T}\widehat{\Psi}_1\widehat{\Psi}_2^+\widehat{S}$; 3) внутри множителя $\widehat{S}^+$ операторы упорядочены знаком $\widetilde{\mathrm{T}}$-произведения (вместо T).

Проследим, как эти изменения проявляются при построении диаграммной техники в простейшем случае — для системы частиц (скажем, фермионов), находящихся во внешнем поле $U(t, \mathbf{r}) \equiv U(X)$.

Члены первого порядка в разложении выражения (93.1):

$$\left\langle \mathrm{T}\widehat{\Psi}_1\widehat{\Psi}_2^+\left(-i\int \widehat{\Psi}_3^+U_3\widehat{\Psi}_3\,d^4X_3\right)\right\rangle + \left\langle \widetilde{\mathrm{T}}i\int \widehat{\Psi}_3^+U_3\widehat{\Psi}_3\,d^4X_3\cdot \mathrm{T}\widehat{\Psi}_1\Psi_2^+\right\rangle.$$

Для рассматриваемой здесь ситуации характерен второй член в этой сумме; при усреднении по основному состоянию должен был бы рассматриваться только первый член. В первом члене все четыре Ψ-оператора находятся под знаком Т-произведения; их попарные свертки,

$$\mathrm{T}\Psi_1\Psi_2^+(-i\Psi_3^+U_3\Psi_3); \qquad (93.4)$$

дают множители $G_{32}^{(0)--}$ и $G_{13}^{(0)--}$. Во втором же члене сворачиваемые Ψ-операторы не упорядочены друг с другом знаком T или $\widetilde{\mathrm{T}}$:

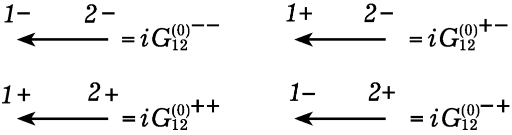
$$\widetilde{\mathrm{T}}(i\Psi_3^+ U_3 \Psi_3)\mathrm{T}(\Psi_1 \Psi_2^+); \tag{93.5}$$

их свертки дают множители $G_{32}^{(0)+-}$ и $G_{13}^{(0)--}$; кроме того, здесь стоит $+iU_3$ вместо $-iU_3$.

Введем графические элементы, отличающиеся от фигурировавших в обычной диаграммной технике дополнительными индексами + или − на концах линий. Штриховые линии с индексами + или − на одном из концов (вершине диаграммы) означают множитель $+iU(X)$ или $-iU(X)$:

(93.6)

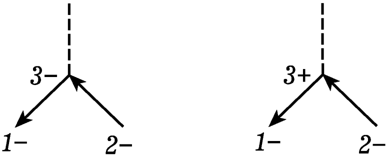
(ср. IX, § 19). Сплошным линиям с индексами ± на обоих концах сопоставляются различные G-функции:



(93.7)

Цифры на концах линий нумеруют аргументы функций — переменные X_1, X_2.

Тогда два члена (93.4), (93.5) изобразятся диаграммами



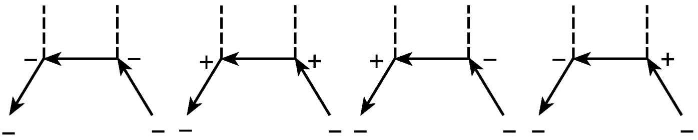
(93.8)

Двум внешним концам сплошных линий приписываются индексы — соответственно тому, что речь идет о поправках в функции G^{--}. По переменным, отвечающим вершине диаграммы, подразумевается интегрирование [1]). В аналитическом виде:

$$iG_{12}^{(1)--} = \int \{iG_{13}^{(0)--} iG_{32}^{(0)--}(-iU_3) + iG_{13}^{(0)-+} iG_{32}^{(0)+-} iU_3\}\, d^4X_3. \tag{93.9}$$

[1]) Точнее — интегрирование по $dt\, d^3x$ и суммирование по паре одинаковых спиновых индексов. Последнее будем подразумевать ниже включенным в интегрирование по d^4X.

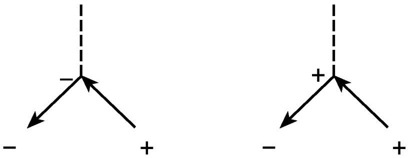
В следующем, втором, порядке теории возмущений поправка в функции G^{--} дается четырьмя диаграммами:



(93.10)

(цифровые индексы опущены). Индекс $\pm$ в каждой вершине диаграммы относится к концам всех трех сходящихся в ней линий.

Аналогичным образом, поправочные члены в других G-функциях изобразятся диаграммами с другими индексами у двух внешних концов сплошных линий. Так, для функции G^{-+} в первом порядке имеем две диаграммы:



(93.11)

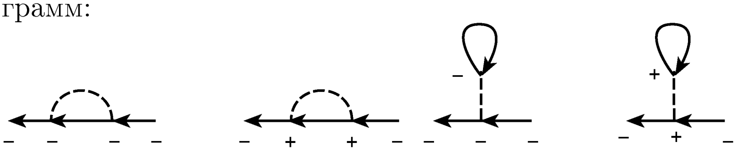
Таким образом, диаграммы в технике Келдыша получаются из диаграмм обычной техники приписыванием в их вершинах и свободных концах всеми возможными способами дополнительных индексов $+$ или $-$. Это правило остается в силе и в диаграммной технике при других типах взаимодействия.

Для системы с парным взаимодействием между частицами в обычной диаграммной технике внутренней штриховой линии сопоставляется потенциал взаимодействия двух частиц. Теперь концам такой линии приписывается еще пара одинаковых индексов $+$ или $-$:

$$\overset{1+\qquad\quad 2+}{- - - - - - -} = iU(X_1-X_2) \equiv i\delta(t_1-t_2)U(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)$$

$$\overset{1-\qquad\quad 2-}{- - - - - - -} = -iU(X_1-X_2) \qquad (93.12)$$

Так, поправка первого порядка в функции G^{--} для системы с парным взаимодействием изобразится суммой четырех диаграмм:



(93.13)

(вместо двух диаграмм (13.13) (см. IX) обычной техники). Сплошной линии, замкнутой самой на себя, по-прежнему сопо-

ставляется множитель $N_0(\mu, T)$ (плотность идеального газа) при любом знаке вершины.

Уже упоминалось, что диаграммная техника Келдыша применима также и к равновесным системам при $T \neq 0$. Предположим, что внешнее поле отсутствует и перейдем от координатного к импульсному представлению, разложив все G-функции в интегралы Фурье. Тогда, обычным образом, каждой линии на диаграммах приписывается определенный «4-импульс» и этим линиям сопоставляются, по тем же правилам, функции $U(Q)$, $G^{(0)}(P)$ в импульсном представлении.

При $T = 0$ функция распределения Ферми

$$n_{\mathbf{p}} = \begin{cases} 1, & p < p_F, \\ 0, & p > p_F. \end{cases}$$

Поэтому, согласно (92.20), (92.21), для ферми-системы при $T = 0$

$$G^{(0)-+}(P) = 0 \text{ при } p > p_F, \quad G^{(0)+-}(P) = 0 \text{ при } p < p_F$$

и все диаграммы для G^{--}, содержащие «плюсовые» вершины, обращаются тождественно в нуль. Таким образом, диаграммная техника Келдыша в применении к равновесным системам (в отличие от мацубаровской техники) непосредственно переходит при $T = 0$ в обычную диаграммную технику.

§ 94. Собственно-энергетические функции

Как и всякая «разумная» диаграммная техника, техника Келдыша позволяет проводить суммирования диаграмм «блоками». Важнейшими такими блоками являются так называемые собственно-энергетические функции.

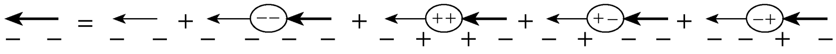
Напомним (см. IX, § 14), что это понятие возникает при рассмотрении диаграмм для гриновской функции, которые нельзя разделить на две части, соединенные лишь одной сплошной линией. Выделив множители $iG^{(0)}$, отвечающие двум концевым линиям такой диаграммы, представим ее (в координатном представлении, как функцию двух аргументов X_1, X_2) в виде

$$\int iG^{(0)}_{13}(-i\Sigma_{34})iG^{(0)}_{42}\, d^4X_3\, d^4X_4.$$

Функцию $-i\Sigma_{34}$, представляющую всю внутреннюю часть диаграммы, называют *собственно-энергетической.* Точная же собственно-энергетическая функция (которую и обозначают символом $-i\Sigma$) определяется суммой всех возможных диаграмм указанного типа. В соответствии с тем, что в излагаемой технике каждой вершине диаграммы должен еще быть приписан знак $+$

или $-$, существуют четыре точные собственно-энергетические функции, в соответствии со знаками их «выходной» и «входной» вершин; обозначим их как Σ^{--}, Σ^{++}, Σ^{-+}, Σ^{+-}.

Точные G-функции выражаются через точные Σ-функции тождествами, которые можно записать в графическом виде: для функции G^{--}



(94.1)

и аналогично для остальных функций (жирные линии — точные G-функции, кружки — Σ-функции; ср. IX, (14.4)). В аналитическом виде:

$$G_{12}^{--} = G_{12}^{(0)--} + \int \{G_{14}^{(0)--}\Sigma_{43}^{--}G_{32}^{--} + G_{14}^{(0)-+}\Sigma_{43}^{++}G_{32}^{+-} + \\ + G_{14}^{(0)-+}\Sigma_{43}^{+-}G_{32}^{--} + G_{14}^{(0)--}\Sigma_{43}^{-+}G_{32}^{+-}\}\, d^4X_3\, d^4X_4 \quad (94.2)$$

и еще три уравнения для остальных G-функций.

Для компактной записи таких уравнений целесообразно ввести матрицы

$$G = \begin{pmatrix} G^{--} & G^{-+} \\ G^{+-} & G^{++} \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma^{--} & \Sigma^{-+} \\ \Sigma^{+-} & \Sigma^{++} \end{pmatrix}. \quad (94.3)$$

Тогда четыре уравнения вида (94.2) запишутся совместно как одно матричное уравнение

$$G_{12} = G_{12}^{(0)} + \int G_{14}^{(0)}\Sigma_{43}G_{32}\, d^4X_3\, d^4X_4; \quad (94.4)$$

множители под знаком интеграла перемножаются по правилу матричного умножения.

Аналогичным образом записываются совместно уравнения (92.14)–(92.18), которым удовлетворяют G-функции идеального газа:

$$\widehat{G}_{01}^{-1}G_{12}^{(0)} = \sigma_z\delta(X_1 - X_2), \quad (94.5)$$

где [1])

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вернемся к уравнению (94.4) и подействуем на обе его части оператором $\widehat{G}_{01}^{-1}$. Учитывая (94.5), получим в результате систему четырех интегродифференциальных уравнений, записанных

[1]) Обозначение σ_z, заимствованное из стандартных обозначений матриц Паули, не имеет здесь, конечно, никакого отношения к спину.

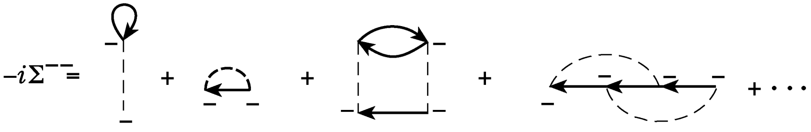
в виде одного матричного уравнения:

$$\widehat{G}_{01}^{-1}G_{12} = \sigma_z\delta(X_1 - X_2) + \int \sigma_z\Sigma_{13}G_{32}\,d^4X_3. \tag{94.6}$$

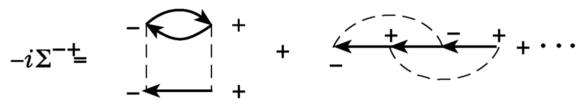
Отметим, что это уравнение можно представить и в другом, эквивалентном виде, если заметить, что в диаграммной записи (94.1) можно с тем же успехом изображать жирные линии слева (а не справа, как в (94.1)). Другими словами, в (94.2) можно писать множители в каждом члене подынтегрального выражения в порядке $G_{14}\Sigma_{43}G_{32}^{(0)}$. Подействовав на представленные в таком виде равенства оператором $\widehat{G}_{02}^{-1*}$ (см. примеч. на с. 477), получим

$$\widehat{G}_{02}^{-1*}G_{12} = \sigma_z\delta(X_1 - X_2) + \int G_{13}\Sigma_{32}\sigma_z\,d^4X_3. \tag{94.7}$$

Собственно-энергетические функции сами могут быть представлены в виде ряда скелетных диаграмм, графическим элементам которых — жирным сплошным линиям — отвечают точные G-функции. Так, для системы частиц с парным взаимодействием: и аналогично для Σ^{++} и Σ^{+-}; дальнейшие члены ряда со-



(94.8)



(94.9)

держат диаграммы с большим числом штриховых линий[1]). Таким образом, уравнения (94.4) или (94.7) представляют собой полную, хотя и очень сложную систему уравнений для точных G-функций.

Уравнения (94.6) не содержат вовсе функций $G^{(0)}$, зависящих от выбора «нулевого» состояния системы невзаимодействующих частиц. Таким образом, всякая зависимость от этого выбора исчезает. Но наличие в уравнениях дифференциальных операций

[1]) Ср. IX, (14.9), (14.10); все перечисленные там диаграммы первого и второго порядков входят в скелетные диаграммы (94.8).

приводит к неоднозначности их решений. Эта неоднозначность проявляется присутствием функций $G^{(0)}$ в интегральных уравнениях (94.4).

Система уравнений (94.6) имеет, однако, тот недостаток, что в ней не учтена еще в явном виде линейная зависимость G-функций, выражаемая равенством (92.7). Для устранения этого недостатка надо произвести линейное преобразование матрицы G таким образом, чтобы, используя (92.7), обратить один из ее элементов в нуль. Такое преобразование осуществляется формулой

$$G' = R^{-1}GR, \tag{94.10}$$

где

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко убедиться, что преобразованная матрица

$$G' = \begin{pmatrix} 0 & G^A \\ G^R & F \end{pmatrix}, \tag{94.11}$$

где

$$F = G^{++} + G^{--} = G^{+-} + G^{-+}. \tag{94.12}$$

Преобразовав таким же образом матрицы $G^{(0)}$ и Σ, мы оставим уравнение (94.4) инвариантным.

Преобразованная матрица Σ:

$$\Sigma' = R^{-1}\Sigma R = \begin{pmatrix} \Omega & \Sigma^R \\ \Sigma^A & 0 \end{pmatrix}, \tag{94.13}$$

где обозначено

$$\Omega = \Sigma^{--} + \Sigma^{++},\ \Sigma^R = \Sigma^{--} + \Sigma^{-+},\ \Sigma^A = \Sigma^{--} + \Sigma^{+-}. \tag{94.14}$$

В этом можно убедиться прямым вычислением с учетом равенства

$$\Sigma^{++} + \Sigma^{--} = -(\Sigma^{+-} + \Sigma^{-+}), \tag{94.15}$$

являющегося следствием равенства (92.7) (его легко получить, приравняв нулю выражение

$$\widehat{G}_{01}^{-1}(G^{--} + G^{++} - G^{-+} - G^{+-}),$$

составленное с помощью уравнений (94.6)).

Раскрыв теперь преобразованное матричное уравнение (94.4), получим три уравнения. Одно из них:

$$G_{12}^A = G_{12}^{(0)A} + \int G_{14}^{(0)A}\Sigma_{43}^A G_{32}^A\, d^4X_3\, d^4X_4. \tag{94.16}$$

Такое же уравнение для G^R не дает ничего нового, так как оно является просто «эрмитово-сопряженным» по отношению к уравнению (94.16). Подчеркнем, что это уравнение, хотя в нем и фигурирует относящаяся к идеальному газу функция $G^{(0)A}$, не зависит от «нулевого» состояния, поскольку функция $G^{(0)A}$ от этого состояния не зависит (как это было отмечено в § 92).

Наконец, получающееся из (94.4) третье уравнение для функции F содержит члены с функцией $F^{(0)}$, зависящей от «нулевого» состояния. Эти члены, однако, исчезают при воздействии на них дифференциального оператора $\widehat{G}_{01}^{-1}$, поскольку $\widehat{G}_{01}^{-1}F^{(0)} = 0$. В результате получим уравнение

$$\widehat{G}_{01}^{-1}F_{12} = \int \{\Omega_{13}G_{02}^A + \Sigma_{13}^R F_{32}\}\, d^4X_3. \qquad (94.17)$$

Уравнения (94.16), (94.17) составляют полную систему, описывающую в принципе поведение неравновесной системы. Второе из них — интегро-дифференциальное и представляет собой обобщение кинетического уравнения Больцмана; напомним в этой связи, что согласно (92.5), (92.6) функции G^{-+} и G^{+-}, а с ними и F, непосредственно связаны с функцией распределения частиц в системе. Решение уравнения (94.17) содержит произвол, соответствующий произволу в решении кинетического уравнения. Уравнение же (94.16) — чисто интегральное и не вносит поэтому никакого дополнительного произвола в решение системы.

Отметим, однако, принципиальную особенность уравнений (94.16), (94.17), отличающую их в общем случае от обычного кинетического уравнения: они содержат две, вместо одной, временных переменных t_1 и t_2. В следующем параграфе будет показано, каким образом это различие устраняется в квазиклассическом случае.

§ 95. Кинетическое уравнение в диаграммной технике

Покажем на простом примере, каким образом осуществляется переход от уравнений типа (94.16), (94.17) к обычному квазиклассическому кинетическому уравнению. Мы рассмотрим слабо неидеальный ферми-газ при температурах $T \sim \varepsilon_F$, предполагая выполненными условия квазиклассичности: промежутки времени τ и расстояния L, на которых существенно меняются все величины, удовлетворяют неравенствам

$$\tau\varepsilon_F \gg 1, \quad Lp_F \gg 1 \qquad (95.1)$$

(ср. § 40). Хотя мы, естественно, не получим в этом случае ничего нового, вывод содержит поучительные моменты, полезные и в более сложных случаях.

Квантовое кинетическое уравнение должно определять одночастичную матрицу плотности $\rho(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$. Для перехода к квазиклассическому случаю целесообразно воспользоваться ее смешанным координатно-импульсным представлением, произведя фурье-разложение по разности $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ и оставив координатную зависимость от $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$. При этом

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + \frac{\boldsymbol{\xi}}{2}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r} - \frac{\boldsymbol{\xi}}{2},$$

так что соответствующий фурье-образ есть (спиновые индексы опускаем)

$$\frac{1}{\mathcal{N}} n(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = \int e^{-i\mathbf{p}\boldsymbol{\xi}} \rho\left(t, \mathbf{r} + \frac{\boldsymbol{\xi}}{2}, \mathbf{r} - \frac{\boldsymbol{\xi}}{2}\right) d^3\boldsymbol{\xi}. \qquad (95.2)$$

Обратное преобразование:

$$\rho(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{\mathcal{N}} \int e^{i\mathbf{p}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} n\left(t, \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}, \mathbf{p}\right) \frac{d^3p}{(2\pi)^3}. \qquad (95.3)$$

Интегрирование функции $n(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ по координатам дает функцию распределения частиц по импульсам, как это видно из выражения этого интеграла через исходную матрицу плотности:

$$N_{\mathbf{p}} = \int n(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})\, d^3x = \mathcal{N} \int e^{-i\mathbf{p}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} \rho(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\, d^3x_1\, d^3x_2. \qquad (95.4)$$

Интегрирование же по импульсам дает распределение по координатам, т. е. пространственную плотность числа частиц, как это снова видно из выражения через матрицу плотности:

$$N(t, \mathbf{r}) = \int n(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})\, d^3p = \mathcal{N} \rho(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}). \qquad (95.5)$$

Саму же функцию $n(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ в общем квантовом случае отнюдь нельзя рассматривать как функцию распределения по координатам и импульсам одновременно; не говоря уже о том, что это противоречило бы основным принципам квантовой механики, определенная согласно (95.2) функция $n(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ в общем случае даже не положительна).

Функция $n(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ имеет, однако, буквальный смысл функции распределения в квазиклассическом приближении. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим оператор какой-либо физической величины, относящейся к отдельной частице и зависящей от $\mathbf{r}$ и $\mathbf{p}$: $\hat{f} = f(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{p}}) = f(\mathbf{r}, -i\nabla)$ [1]). По определению матрицы плотности, среднее значение величины f дается интегралом

$$\bar{f} = \int [\hat{f}_1 \rho(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)]_{\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}}\, d^3x,$$

[1]) Для определенности можно считать, что все операторы ∇ стоят правее $\mathbf{r}$. В квазиклассическом приближении это несущественно.

где $\widehat{f}_1$ действует на переменную $\mathbf{r}$. Подставим сюда ρ в виде (95.3) и учтем, что при условиях (95.1) n является более медленно меняющейся функцией $\mathbf{r}_1$, чем множитель $\exp(i\mathbf{p}\mathbf{r}_1)$. Поэтому достаточно дифференцировать только последний, что сводится к замене $-i\nabla_1 \to \mathbf{p}$. Тогда выражение $\overline{f}$ примет вид

$$\overline{f} = \frac{1}{\mathcal{N}}\int f(\mathbf{r},\mathbf{p})n(t,\mathbf{r},\mathbf{p})\,d^3x\frac{d^3p}{(2\pi)^3}, \tag{95.6}$$

что (ввиду произвольности f) как раз соответствует определению классической функции распределения.

Ниже мы будем писать уравнения для гриновской функции $G^{-+}(X_1,X_2)$, наиболее тесно связанной (согласно (92.5)) с матрицей плотности. Введем для нее «четырехмерное» смешанное представление

$$G^{-+}(X,P) = \int e^{iP\Xi}G^{-+}\left(X+\frac{1}{2}\Xi, X-\frac{1}{2}\Xi\right)d^4\Xi, \tag{95.7}$$

где $P=(\omega,\mathbf{p})$, $X=(t,\mathbf{r})$, $\Xi=(\xi_0,\boldsymbol{\xi})$, причем $t=(t_1+t_2)/2$, $\xi_0=t_1-t_2$. Тогда

$$n(t,\mathbf{r},\mathbf{p}) = -i\int G^{-+}(X,P)\frac{d\omega}{2\pi}; \tag{95.8}$$

интегрирование по $d\omega/(2\pi)$ эквивалентно тому, что полагается $t_1=t_2$.

После этих предварительных определений, перейдем к выводу кинетического уравнения.

Возьмем $(-+)$-компоненту уравнений (94.6) и (94.7) и составим их почленную разность:

$$(\widehat{G}_{02}^{-1*}-\widehat{G}_{01}^{-1})G_{12}^{-+} = \\ = -\int(\Sigma_{13}^{--}G_{32}^{-+}+\Sigma_{13}^{-+}G_{32}^{++}+G_{13}^{-+}\Sigma_{32}^{++}+G_{13}^{--}\Sigma_{32}^{-+})\,d^4X_3. \tag{95.9}$$

Оператор, действующий на функцию G_{12}^{-+} в левой части уравнения:

$$\widehat{G}_{02}^{-1*}-\widehat{G}_{01}^{-1} = -i\left(\frac{\partial}{\partial t_1}+\frac{\partial}{\partial t_2}\right)-\frac{1}{2m}(\Delta_1-\Delta_2) = -i\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{i}{m}\nabla_{\mathbf{r}}\nabla_{\boldsymbol{\xi}}\right).$$

Перейдем теперь в обеих частях уравнения (95.9) к фурье-компонентам (95.7) и положим $t_1=t_2$ (или, что то же, проинтегрируем по $d\omega/(2\pi)$). С учетом (95.8) найдем, что левая часть

уравнения (95.9) примет в результате вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m}\frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}}$$

— как раз требуемый вид левой части кинетического уравнения для функции распределения $n(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$. Правая же часть уравнения (95.9) после фурье-преобразования должна поэтому дать интеграл столкновений, $\operatorname{St} n$.

Переход к фурье-компонентам в этой части должен быть произведен с учетом условий квазиклассичности. Интеграл в (95.9) представляет собой сумму членов вида

$$\int \Sigma(X_1, X_3) G(X_3, X_2)\, d^4X_3.$$

Выразим множители Σ и G в виде функций от разностей и полусумм «4-координат»:

$$\int \Sigma\left(X_1 - X_3, \frac{X_1 + X_3}{2}\right) G\left(X_3 - X_2, \frac{X_3 + X_2}{2}\right) d^4X_3.$$

При переходе к фурье-компонентам по первым аргументам существенна область значений разностей координат $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|$, $|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2| \sim 1/p$ и разностей времен $|t_1 - t_3|$, $|t_3 - t_2| \sim 1/\varepsilon$. Согласно условиям (95.1) на этих интервалах Σ и G как функции своих вторых аргументов меняются мало. Поэтому можно приближенно заменить эти аргументы значениями $X = (X_1 + X_2)/2$:

$$\int \Sigma(X_1 - X_3, X) G(X_3 - X_2, X)\, d^4X_3,$$

после чего можно переходить к фурье-представлению при заданном значении X. В результате правая часть уравнения (95.9) примет вид

$$\operatorname{St} n = -\int \{\Sigma^{-+}(G^{--} + G^{++}) + (\Sigma^{--} + \Sigma^{++})G^{-+}\}\frac{d\omega}{2\pi} = \\ = \int \{-\Sigma^{-+}G^{+-} + \Sigma^{+-}G^{-+}\}\frac{d\omega}{2\pi}, \quad (95.10)$$

где все функции в подынтегральном выражении имеют одинаковые аргументы $(X, P) \equiv (t, \mathbf{r}; \omega, \mathbf{p})$; во втором равенстве использованы соотношения (92.7) и (94.15).

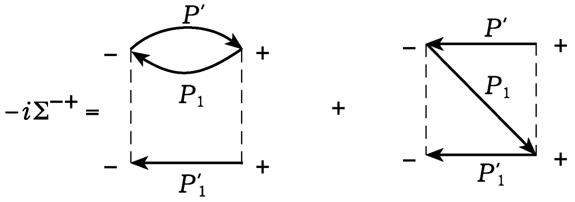
Применим формулу (95.10) к модели почти идеального ферми-газа, рассматривавшейся уже в IX, § 6, 21. Как и там, будем условно считать, что потенциал $U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ взаимодействия между частицами удовлетворяет условию применимости теории возмущений; для перехода к истинному взаимодействию (не удовлетворяющему этому условию) достаточно выразить ответ через амплитуду рассеяния.

Имея в виду найти интеграл столкновений в первом неисчезающем приближении теории возмущений по взаимодействию частиц, можно считать, что точные G-функции в (95.10) связаны с функцией распределения n теми же формулами (92.20), (92.21), что и в идеальном газе; это означает пренебрежение малыми поправками за счет взаимодействия к энергии $\varepsilon = p^2/2m$ частицы газа. Выражения (92.20), (92.21) относятся, строго говоря, к однородному и стационарному состоянию газа, но в квазиклассическом случае, ввиду медленности изменения n с координатами и временем, можно пользоваться теми же выражениями, понимая в них в качестве $n_{\mathbf{p}}$ функцию $n(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$, в которой t и $\mathbf{r}$ играют роль параметров. Интегрирование по ω устраняет δ-функции и получается

$$\mathrm{St}\, n = i\Sigma^{-+}(\varepsilon - \mu, \mathbf{p}; t, \mathbf{r})[1 - n(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})] + \\ + i\Sigma^{+-}(\varepsilon - \mu, \mathbf{p}; t, \mathbf{r}) n(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}). \quad (95.11)$$

Уже из самого вида этого выражения ясно, что первый член в нем описывает «приход» частиц, возможный лишь при $1 - n \neq 0$; второй же член описывает «уход», пропорциональный n. Остается вычислить собственно-энергетические функции Σ^{-+} и Σ^{+-}.

Первый неисчезающий вклад в них дают диаграммы второго порядка (ср. (94.9)); так,



(95.12)

где $P_1' = P + P_1 - P'$. После замены U на U_0 (см. ниже) вклады в Σ от этих двух диаграмм связаны друг с другом равенством $\Sigma_{\text{а}} = -2\Sigma_{\text{б}}$ (минус — из-за замкнутой петли в диаграмме *а*, а коэффициент 2 — из-за спинового суммирования в этой петле; ср. аналогичные вычисления в IX, § 21). Раскрыв диаграмму *б* в аналитическом виде, получим

$$i\Sigma^{-+}(P) = \int G^{-+}(P') G^{+-}(P_1) G^{-+}(P_1') U^2(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}') \frac{d^4P_1\, d^4P'}{(2\pi)^8}.$$

В вырожденном газе длина волны частиц ($\sim 1/p$) автоматически велика по сравнению с радиусом сил взаимодействия в силу

условия разреженности газа (см. IX, § 6); это позволяет заменить $U(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}')$ на значение при $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}' = 0$:

$$U_0 \equiv \int U(r)\, d^3x.$$

Подставив для функций G^{-+} и G^{+-} выражения (92.20), (92.21) и устранив две δ-функции интегрированием по «временным» компонентам 4-векторов P_1 и P', убедимся в том, что первый член в (95.11) действительно совпадает с членом «прихода» в интеграле столкновений (74.5) (причем $w = 2\pi U_0^2$). Аналогичным образом вычисляется Σ^{+-}, и второй член в (95.11) оказывается совпадающим с членом «ухода» в том же интеграле столкновений.

Г Л А В А XI

СВЕРХПРОВОДНИКИ

§ 96. Высокочастотные свойства сверхпроводников. Общая формула

В IX, § 51, были получены формулы, связывающие ток в сверхпроводнике с векторным потенциалом электромагнитного поля в нем. Здесь эти формулы будут обобщены на случай переменного во времени поля. Как и в IX, мы будем исследовать этот вопрос в рамках модели БКШ, рассматривая электроны в металле как изотропный газ со слабым притяжением между частицами [1]).

Как всегда в металлах (и тем более — в сверхпроводниках), в уравнениях Максвелла можно пренебречь током смещения, т. е. писать

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}. \tag{96.1}$$

Отсюда следует, что в этом приближении

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \tag{96.2}$$

Для описания поля выберем калибровку, в которой скалярный потенциал $\varphi = 0$. Линейную связь между компонентами фурье-разложений (по времени и по координатам) плотности тока и векторного потенциала поля напишем в виде

$$j_\alpha(\omega, \mathbf{k}) = -Q(\omega, \mathbf{k})\left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\right) A_\beta(\omega, \mathbf{k}), \tag{96.3}$$

тождественно удовлетворяющем уравнению (96.2), т. е. условию $\mathbf{kj}(\omega, \mathbf{k}) = 0$. Продольная (вдоль $\mathbf{k}$) часть вектора $\mathbf{A}$ выпадает из соотношения (96.3), а потому и вообще из уравнений, так что ее можно положить равной нулю, т. е. считать, что $\mathbf{kA}(\omega, \mathbf{k}) = 0$. При таком выборе $\mathbf{A}$ связь между током и полем сводится к

$$\mathbf{j}(\omega, \mathbf{k}) = -Q(\omega, \mathbf{k})\mathbf{A}(\omega, \mathbf{k}). \tag{96.4}$$

---

[1]) Результаты этого и следующего параграфов принадлежат *Бардину* и *Маттису* (*J. Bardeen*, *D.C. Mattis*, 1958) и *А.А. Абрикосову*, *Л.П. Горькову* и *И.М. Халатникову* (1958).

Наша цель состоит в вычислении функции $Q(\omega, \mathbf{k})$. Эта величина относится к категории обобщенных восприимчивостей, и для решения задачи воспользуемся изложенным в § 91 методом.

Следуя этому методу, формальным образом вводим в гамильтониан сверхпроводника «векторный потенциал», зависящий от мацубаровской переменной τ (и от координат)[1]:

$$\mathbf{A}(\tau, \mathbf{r}) = \mathbf{A}(\zeta_s, \mathbf{k}) e^{i(\mathbf{kr} - \zeta_s \tau)}, \qquad \zeta_s = 2\pi s T. \tag{96.5}$$

С помощью уравнений Горькова вычисляем линейную по $\mathbf{A}$ поправку к мацубаровской гриновской функции:

$$\mathcal{G}(\tau_1, \mathbf{r}_1; \tau_2, \mathbf{r}_2) = \mathcal{G}^{(0)}(\tau_1 - \tau_2, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + \mathcal{G}^{(1)}(\tau_1, \mathbf{r}_1; \tau_2, \mathbf{r}_2); \tag{96.6}$$

в силу «однородности по τ» и пространственной однородности невозмущенного сверхпроводника, $\mathcal{G}^{(0)}$ зависит только от разностей своих аргументов. Плотность тока $\mathbf{j}(\tau, \mathbf{r})$ выражается через гриновскую функцию согласно

$$\mathbf{j}(\tau, \mathbf{r}) = -\frac{ie}{m}\left[(\nabla' - \nabla)\mathcal{G}^{(1)}(\tau, \mathbf{r}; \tau', \mathbf{r}')\right]_{\substack{\mathbf{r}'=\mathbf{r} \\ \tau'=\tau+0}} - \frac{e^2 N}{mc}\mathbf{A}(\tau, \mathbf{r}), \tag{96.7}$$

где N — плотность числа частиц[2]. С полем (96.5) это соотношение фактически будет иметь вид

$$\mathbf{j}(\tau, \mathbf{r}) = -Q_M(\zeta_s, \mathbf{k})\mathbf{A}(\tau, \mathbf{r}). \tag{96.8}$$

Коэффициент Q_M в нем есть мацубаровская восприимчивость, и согласно (91.18)

$$Q(i|\zeta_s|, \mathbf{k}) = Q_M(\zeta_s, \mathbf{k}). \tag{96.9}$$

Для определения искомой функции $Q(\omega, \mathbf{k})$ надо будет произвести аналитическое продолжение с точек $\omega = i|\zeta_s|$ на всю верхнюю полуплоскость.

Ход вычисления Q_M вполне аналогичен вычислениям в IX, § 51. Напомним, что в калибровке потенциалов с $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$ поправка к щели Δ в энергетическом спектре отсутствует, а линеаризованные уравнения Горькова для гриновских функций $\mathcal{G}$ и $\overline{\mathcal{F}}$

---

[1]) В этом параграфе полагаем $\hbar = 1$.

[2]) Ср. IX, (51.17). При сравнении с формулами в IX, § 51, надо помнить, что теперь e обозначает положительную величину — элементарный заряд.

имеют вид [1])

$$\begin{gathered}\left[-\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\nabla^2}{2m}+\mu\right]\mathcal{G}^{(1)}(\tau,\mathbf{r};\tau',\mathbf{r}')+\Delta\overline{\mathcal{F}}^{(1)}(\tau,\mathbf{r};\tau',\mathbf{r}')=\\=-\frac{ie}{mc}\mathbf{A}(\tau,\mathbf{r})\nabla\mathcal{G}^{(0)}(\tau-\tau',\mathbf{r}-\mathbf{r}'),\\\left[\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\nabla^2}{2m}+\mu\right]\overline{\mathcal{F}}^{(1)}(\tau,\mathbf{r};\tau',\mathbf{r}')-\Delta\mathcal{G}^{(1)}(\tau,\mathbf{r};\tau,\mathbf{r}')=\\=\frac{ie}{mc}\mathbf{A}(\tau,\mathbf{r})\nabla\overline{\mathcal{F}}^{(0)}(\tau-\tau',\mathbf{r}-\mathbf{r}').\end{gathered}\tag{96.10}$$

При поле вида (96.5) можно сразу отделить зависимость $\mathcal{G}^{(1)}$ и $\overline{\mathcal{F}}^{(1)}$ от сумм $\tau+\tau'$ и $\mathbf{r}+\mathbf{r}'$, положив

$$\mathcal{G}^{(1)}=g(\tau-\tau',\mathbf{r}-\mathbf{r}')\exp\left[\frac{i}{2}\mathbf{k}(\mathbf{r}+\mathbf{r}')-\frac{i}{2}\zeta_s(\tau+\tau')\right]\tag{96.11}$$

и аналогично для $\overline{\mathcal{F}}^{(1)}$ с функцией f вместо g. Так, после этой замены первое из уравнений (96.10) принимает вид

$$\begin{gathered}\left[-\left(\frac{\partial}{\partial\tau}-\frac{i}{2}\zeta_s\right)+\frac{1}{2m}\left(\nabla+\frac{i}{2}\mathbf{k}\right)^2+\mu\right]g+\Delta f=\\=-\frac{ie}{mc}\mathbf{A}(\zeta_s,\mathbf{k})\exp\left[\frac{i}{2}\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')-\frac{i}{2}\zeta_s(\tau-\tau')\right]\nabla\mathcal{G}^{(0)}.\end{gathered}$$

Разложим теперь все величины в ряды Фурье по $\tau-\tau'$ и интегралы — по $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$:

$$g(\tau,\mathbf{r})=T\sum_{s'=-\infty}^{\infty}\int g(\zeta'_s,p)\exp\left[i\mathbf{pr}-i\zeta'_{s'}\tau\right]\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\tag{96.12}$$

и т. д. В результате получим для фурье-компонент систему двух алгебраических уравнений:

$$\begin{gathered}\left[i\left(\zeta'_{s'}+\frac{\zeta_s}{2}\right)-\frac{1}{2m}\left(\mathbf{p}+\frac{k}{2}\right)^2+\mu\right]g(\zeta'_{s'},\mathbf{p})+\Delta f(\zeta'_{s'},\mathbf{p})=\\=\frac{e}{mc}\mathbf{pA}(\zeta_s,\mathbf{k})\mathcal{G}^{(0)}\left(\zeta'_{s'}-\frac{\zeta_s}{2},\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}}{2}\right),\\\left[-i\left(\zeta'_{s'}+\frac{\zeta_s}{2}\right)-\frac{1}{2m}\left(\mathbf{p}+\frac{k}{2}\right)^2+\mu\right]f(\zeta'_{s'},\mathbf{p})-\Delta f(\zeta'_{s'},\mathbf{p})=\\=-\frac{e}{mc}\mathbf{pA}(\zeta_s,\mathbf{k})\overline{\mathcal{F}}^{(0)}\left(\zeta'_{s'}-\frac{\zeta_s}{2},\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}}{2}\right).\end{gathered}\tag{96.13}$$

[1]) Оператор Лапласа пишем как ∇^2 в отличие от щели Δ!

«Невозмущенные» гриновские функции ферми-системы $\mathcal{G}^{(0)}$ и $\overline{\mathcal{F}}^{(0)}$ разлагаются в ряды Фурье с «нечетными частотами»: $(2s'+1)\pi T$. Поэтому из (96.13) следует, что «частоты» $\zeta'_{s'}$ пробегают значения

$$\zeta'_{s'} = (2s' + 1 - s)\pi T.$$

Функции $\mathcal{G}^{(0)}$ и $\overline{\mathcal{F}}^{(0)}$ даются выражениями (см. IX, (42.7), (42.8))

$$\mathcal{G}^{(0)}(\zeta_s, \mathbf{p}) = -\frac{i\zeta_s + \eta}{\zeta_s^2 + \varepsilon^2}, \quad \overline{\mathcal{F}}^{(0)}(\zeta_s, \mathbf{p}) = \frac{\Delta}{\zeta_s^2 + \varepsilon^2}, \tag{96.14}$$

где

$$\eta = \frac{p^2}{2m} - \mu \approx v_F(p - p_F), \quad \varepsilon^2 = \Delta^2 + \eta^2 \tag{96.15}$$

(постоянную Δ считаем вещественной). Используя эти формулы, легко привести решение системы (96.13) к виду

$$g(\zeta'_{s'}, \mathbf{p}) = \frac{e}{mc}\mathbf{pA}(\zeta_s, \mathbf{p})\{\mathcal{G}^{(0)}(P_+)\mathcal{G}^{(0)}(P_-) + \overline{\mathcal{F}}^{(0)}(P_+)\overline{\mathcal{F}}^{(0)}(P_-)\}, \tag{96.16}$$

где

$$P_\pm = \left(\zeta'_{s'} \pm \frac{\zeta_s}{2}, \mathbf{p} \pm \frac{\mathbf{k}}{2}\right). \tag{96.17}$$

Используя (96.7), (96.11), (96.12), получим для плотности тока:

$$\mathbf{j}(\zeta_s, \mathbf{k}) = -\frac{2eT}{m}\sum_{s'=-\infty}^{\infty}\int \mathbf{p}g(\zeta'_{s'}, \mathbf{p})\frac{d^3p}{(2\pi)^3} - \frac{Ne^2}{mc}\mathbf{A}(\zeta_s, \mathbf{k})$$

с функцией g из (96.16). Учитывая поперечность векторов $\mathbf{j}$ и $\mathbf{A}$ по отношению к $\mathbf{k}$, производим под знаком интеграла усреднение по направлениям вектора $\mathbf{p}_\perp$ в плоскости, перпендикулярной $\mathbf{k}$. Функции $\mathcal{G}^{(0)}$ и $\overline{\mathcal{F}}^{(0)}$ в (96.16) от направления $\mathbf{p}_\perp$ не зависят; усреднение же множителя $\mathbf{p}_\perp(\mathbf{p}_\perp\mathbf{A})$ превращает его в $\mathbf{A}p^2\sin^2\theta/2$, где θ — угол между $\mathbf{p}$ и $\mathbf{k}$. В результате находим следующее окончательное выражение для мацубаровской восприимчивости:

$$Q_M(\zeta_s, \mathbf{k}) = \frac{Ne^2}{mc} + \frac{e^2T}{m^2c}\int\sum_{s'=-\infty}^{\infty} p^2\sin^2\theta \times$$
$$\times [\mathcal{G}^{(0)}(P_+)\mathcal{G}^{(0)}(P_-) + \overline{\mathcal{F}}^{(0)}(P_+)\overline{\mathcal{F}}^{(0)}(P_-)]\frac{d^3p}{(2\pi)^3}. \tag{96.18}$$

Займемся теперь аналитическим продолжением этой функции с дискретного ряда точек $\zeta_s = 2s\pi T$ на всю правую полу-

плоскость комплексной переменной ζ (т. е. на верхнюю полуплоскость переменной $\omega = i\zeta$). Задача сводится к аналитическому продолжению подынтегрального выражения интеграла по d^3p; рассмотрим, например, первый член в нем:

$$J_M(\zeta_s) \equiv T \sum_{s'=-\infty}^{\infty} \mathcal{G}_+\left(\zeta'_{s'} + \frac{\zeta_s}{2}\right) \mathcal{G}_-\left(\zeta'_{s'} - \frac{\zeta_s}{2}\right) = $$
$$= T \sum_{s'=-\infty}^{\infty} \mathcal{G}_+((2s'+1)\pi T)\mathcal{G}_-((2s'+1)\pi T - \zeta_s) \quad (96.19)$$

(для краткости обозначений опускаем индекс (0), а аргументы $\mathbf{p}_\pm = \mathbf{p} \pm \mathbf{k}/2$ заменяем индексами $\pm$). Это выражение может быть представлено в виде интеграла

$$J_M(\zeta_s) = \frac{1}{4\pi i} \oint \mathcal{G}_+(z)\mathcal{G}_-(z-\zeta_s) \operatorname{tg} \frac{z}{2T}\, dz, \quad (96.20)$$

взятого по трем замкнутым контурам C_1, C_2, C_3 (рис. 32), которые в общей сложности охватывают всю бесконечную совокупность полюсов множителя $\operatorname{tg}(z/2T)$, которые он имеет в точках $z = (2s'+1)\pi T$ (точки на рисунке); вычеты подынтегрального выражения в каждом из этих полюсов дают соответствующие

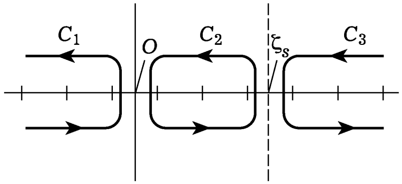


Рис. 32

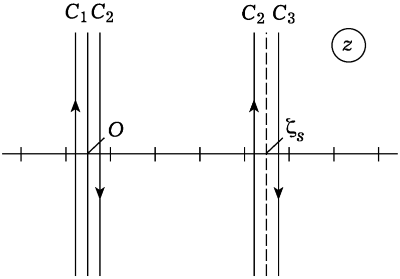


Рис. 33

члены в сумме (96.19) (на бесконечности $\mathcal{G}(z) \sim 1/z$, так что интеграл сходится). В выборе контуров учтено, что функция $\mathcal{G}(z)$ аналитична в каждой из двух полуплоскостей:

$$\mathcal{G}(z) = \begin{cases} G^R(iz), & \operatorname{Re} z > 0, \\ G^A(iz), & \operatorname{Re} z < 0, \end{cases}$$

где G^R и G^A — аналитические функции (запаздывающая и опережающая функции Грина — см. IX, § 37); мнимая же ось z является, вообще говоря, разрезом для функции $\mathcal{G}(z)$.

Развернем теперь контуры так, чтобы они проходили вертикально по обоим берегам линий разрезов $\operatorname{Re} z = 0$ и $\operatorname{Re} z = \zeta_s$ (рис. 33; бесконечно удаленные замыкающие участки контуров не показаны). На паре линий C_1, C_2 заменяем переменную интегрирования, положив $z = i\omega'$, а на паре C_2, C_3 полагаем $z - \zeta_s = i\omega'$. Тогда при $\zeta_s > 0$ имеем

$$J_M(\zeta_s) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\operatorname{tg}\frac{i\omega'}{2T}[G_+^R(\omega') - G_+^A(\omega')]G_-^A(\omega' - i\zeta_s) + \right.$$
$$\left. + \operatorname{tg}\frac{i\omega' + \zeta_s}{2T}[G_-^R(\omega') - G_-^A(\omega')]G_+^R(\omega' + i\zeta_s)\right\} d\omega'. \quad (96.21)$$

При выводе этого выражения значение ζ_s было еще фиксировано: $\zeta_s = 2\pi sT$. Но для таких значений

$$\operatorname{tg}\frac{i\omega' + \zeta_s}{2T} = \operatorname{tg}\frac{i\omega'}{2T} = i \operatorname{th}\frac{\omega'}{2T}.$$

После такой замены аналитичность выражения (96.21) при всех $\zeta_s > 0$ очевидна ввиду аналитичности функций G^A и G^R в соответствующих полуплоскостях. Полагая теперь $i\zeta_s = \omega$, имеем для уже аналитически продолженного выражения [1]):

$$J(\omega) \equiv J_M(-i\omega) = -\frac{i}{4\pi}\int \operatorname{th}\frac{\omega'}{2T}\{[G_+^R(\omega') - G_+^A(\omega')]\times$$
$$\times G_-^A(\omega' - \omega) + [G_-^R(\omega') - G_-^A(\omega')]G_+^R(\omega' + \omega)\}\, d\omega'. \quad (96.22)$$

Таким же способом производится продолжение второго члена в подынтегральном выражении в (96.18) и приводит к результату, отличающемуся от (96.22) лишь заменой функций G^R, G^A на F^{+R}, F^{+A} [2]). Все эти функции даются следующими выражениями (см. IX, § 41):

$$G^R(\omega, \mathbf{p}) = \frac{u_p^2}{\omega - \varepsilon + i0} + \frac{v_p^2}{\omega + \varepsilon + i0},$$
$$F^{+R}(\omega, \mathbf{p}) = \frac{\Delta}{2\varepsilon}\left[\frac{1}{\omega + \varepsilon + i0} - \frac{1}{\omega - \varepsilon + i0}\right], \quad (96.23)$$

---

[1]) Изложенный способ аналитического продолжения принадлежит *Г.М. Элиашбергу* (1962).

[2]) Определение гриновской функции F^+ (соответствующей температурной функции $\overline{\mathcal{F}}$) — см. IX, § 41. Определения функций F^{+R} и F^{+A} отличаются от F^+ заменой T-произведения коммутатором — аналогично связи между G^R, G^A и G.

где

$$\left.\begin{matrix} u_p^2 \\ v_p^2 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{\eta}{\varepsilon}\right).$$

Функции же G^A, F^{+A} отличаются от G^R, F^{+R} лишь знаком перед $i0$. Поэтому

$$G^R - G^A = 2\,\mathrm{Im}\,G^R = -\pi[u_p^2\delta(\omega-\varepsilon) + v_p^2\delta(\omega+\varepsilon)],$$

$$F^{+R} - F^{+A} = \frac{\pi\Delta}{2\varepsilon}[\delta(\omega-\varepsilon) - \delta(\omega+\varepsilon)]$$

и интегрирование в (96.22) сводится к устранению δ-функций.

После ряда простых, но довольно громоздких алгебраических преобразований получается следующее окончательное выражение[1]):

$$Q(\omega,\mathbf{k}) = \frac{Ne^2}{mc} - \frac{e^2}{4m^2c}\int p^2\sin^2\theta\,\mathrm{th}\,\frac{\varepsilon_+}{2T}\times$$
$$\times\left\{\left[1+\frac{\eta_+\eta_- + \Delta^2}{\varepsilon_+\varepsilon_-}\right]\left[\frac{1}{\varepsilon_+ - \varepsilon_- - \omega - i0} + \frac{1}{\varepsilon_+ - \varepsilon_- + \omega + i0}\right] + \right.$$
$$\left. + \left[1-\frac{\eta_+\eta_- + \Delta^2}{\varepsilon_+\varepsilon_-}\right]\left[\frac{1}{\varepsilon_+ + \varepsilon_- - \omega - i0} + \frac{1}{\varepsilon_+ + \varepsilon_- + \omega + i0}\right]\right\}\frac{d^3p}{(2\pi)^3}, \tag{96.24}$$

где

$$\eta_\pm = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} \pm \frac{\mathbf{k}}{2}\right)^2 - \mu, \quad \varepsilon_\pm^2 = \Delta^2 + \eta_\pm^2. \tag{96.25}$$

Два члена в фигурных скобках в (96.24) имеют существенно различное происхождение и смысл. Первый из них нечетен по $\mathbf{p}$; поэтому при $T = 0$ (когда множитель $\mathrm{th}\,(\varepsilon_+/2T) = 1$) интеграл от этого члена обращается в нуль. Эта часть Q связана с бесстолкновительной динамикой элементарных возбуждений. Ее мнимая часть, существующая при всех ω и $\mathbf{k}$, связана с бесстолкновительным затуханием Ландау.

Интеграл же от второго члена остается отличным от нуля и при $T = 0$. Эта часть Q связана с рождением или разрывом куперовских пар. Полюсы подынтегрального выражения в этой части лежат при $\varepsilon_+ + \varepsilon_- = \pm\omega$. Для их существования (а тем самым и для возникновения диссипации — мнимой части Q) частота должна превышать 2Δ — энергию связи куперовской пары.

---

[1]) В IX, § 51, указывалось на необходимость осторожности при вычислении суммы и интегралов вида (96.18) ввиду медленности убывания подынтегрального выражения. В использованном здесь порядке операций эта трудность обойдена. Это подтверждается тем, что окончательное выражение (96.24) удовлетворяет необходимому условию: $Q = 0$ при $\Delta = 0$ и $\omega = 0$ (нормальный металл в постоянном поле) — см. примеч. на с. 503.

§ 97. Высокочастотные свойства сверхпроводников. Предельные случаи

Перейдем к исследованию общей формулы (96.24). Число предельных случаев здесь очень велико ввиду наличия четырех независимых параметров $\hbar\omega$, $\hbar k v_F$, Δ, T, которые могут находиться в различных соотношениях между собой. Мы рассмотрим лишь несколько из них.

При $\hbar\omega \gg \Delta$ наличие щели в спектре сверхпроводника несущественно. Положив в первом приближении $\Delta = 0$, мы пришли бы к формуле для поперечной диэлектрической проницаемости нормального электронного ферми-газа; мы не станем останавливаться на соответствующих вычислениях[1]).

Лондоновский случай. Рассмотрим лондоновский предельный случай, в котором

$$\hbar k v_F \ll \Delta_0, \tag{97.1}$$

где Δ_0 — значение $\Delta(T)$ при $T = 0$. При этом будем считать, что $\Delta \lesssim T$, чем исключается область очень низких температур. Частоту будем считать малой в том смысле, что $\omega \lesssim k v_F$.

При $k \to 0$

$$1 - \frac{\eta_+\eta_- + \Delta^2}{\varepsilon_+\varepsilon_-} \propto k^2.$$

Поэтому второй член в фигурных скобках в (96.24) мал и им можно пренебречь. В первом же члене первая квадратная скобка заменяется на 2; воспользовавшись нечетностью второй квадратной скобки как функции $\mathbf{p}$, пишем после этого:

$$Q(\omega, \mathbf{k}) = \frac{Ne^2}{mc} - \frac{e^2}{2m^2c}\int \left[\operatorname{th}\frac{\varepsilon_+}{2T} - \operatorname{th}\frac{\varepsilon_-}{2T}\right] \frac{p^2\sin^2\theta}{\varepsilon_+ - \varepsilon_- - \hbar\omega - i0}\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Заметив, что $\operatorname{th}(\varepsilon/2T) = 1 - 2n_0(\varepsilon)$, где

$$n_0(\varepsilon) = [e^{\varepsilon/T} + 1]^{-1} \tag{97.2}$$

— функция распределения элементарных возбуждений в сверхпроводящем ферми-газе (распределение Ферми с равным нулю

---

[1]) Связь между $Q(\omega, \mathbf{k})$ и поперечной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_t(\omega, \mathbf{k})$ выясняется следующим образом. Выразив плотность тока через вектор поляризации согласно $-i\omega\mathbf{P} = \mathbf{j}$ и введя вместо $\mathbf{A}$ напряженность электрического поля $\mathbf{E} = i\omega\mathbf{A}/c$, переписываем соотношение (96.4) в виде $\mathbf{P} = -c\omega^{-2}Q\mathbf{E}$. Отсюда видно, что

$$-\frac{cQ}{\omega^2} = \frac{\varepsilon_t - 1}{4\pi}.$$

химическим потенциалом), пишем

$$\operatorname{th}\frac{\varepsilon_+}{2T} - \operatorname{th}\frac{\varepsilon_-}{2T} = -2[n_0(\varepsilon_+) - n_0(\varepsilon_-)] \approx -2\hbar\mathbf{kv}\frac{\partial n_0}{\partial\varepsilon},$$

где

$$\mathbf{v} = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{p}} = \frac{\eta\mathbf{p}}{m\varepsilon}.$$

Тогда

$$Q(\omega,\mathbf{k}) = \frac{Ne^2}{mc} + \frac{e^2}{m^2c}\int\frac{\partial n_0}{\partial\varepsilon}\frac{\mathbf{kv}p^2\sin^2\theta}{\mathbf{kv}-\omega-i0}\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}. \tag{97.3}$$

При $\omega = 0$ это выражение совпадает, как и следовало, с лондоновским значением $N_se^2/(mc)$, где $N_s(T)$ — плотность сверхпроводящих электронов [1]). Поэтому можно переписать (97.3) в эквивалентном виде:

$$Q(\omega,\mathbf{k}) = \frac{N_se^2}{mc} + \frac{\omega e^2}{m^2c}\int\frac{\partial n_0}{\partial\varepsilon}\frac{p^2\sin^2\theta}{\mathbf{kv}-\omega-i0}\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}. \tag{97.4}$$

Второй член в этом выражении описывает вклад в диэлектрическую проницаемость от элементарных возбуждений в ферми-газе [2]).

При $\omega \ll kv$ можно пренебречь ω в знаменателе подынтегрального выражения в (97.4):

$$Q(\omega,\mathbf{k}) = \frac{N_se^2}{mc} + \frac{\omega e^2}{4\pi^2c\hbar^3k}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\sin^2\theta d\cos\theta}{\cos\theta - i0}\int\frac{\partial n_0}{\partial\varepsilon}\frac{p^4}{m^2v}\,dp. \tag{97.5}$$

Интеграл по $\cos\theta$ вычисляется по вычету в полюсе $\cos\theta = i0$ и равен $i\pi$. Интеграл же по p, переписанный в виде

$$\int\frac{\partial n_0}{\partial\varepsilon}\frac{p^2\varepsilon}{\eta}\,d\eta,$$

логарифмически расходится при $|\eta| \ll \Delta$. Обрезав его при значениях $|\eta| \sim \omega\Delta/(kv_F)$ (для которых $kv \sim \omega$), получим, с лога-

[1]) В этом легко убедиться с помощью формул, приведенных в IX, § 40, при вычислении $\rho_s = mN_s$. Отметим, что $Q(0,\mathbf{k})$ обращается в нуль (вместе с N_s) при $T \to T_c$, как это уже было упомянуто в примеч. на с. 501.

[2]) В этом можно убедиться, сравнив (97.4) с формулой (2) для поперечной проницаемости бесстолкновительной электронной плазмы в задаче 2 к § 31. При сравнении следует учесть, что лондоновский случай соответствует квазиклассическому пределу, так что формула для вырожденного газа отличается от формулы для максвелловской плазмы только видом функции распределения и законом дисперсии $\varepsilon(p)$.

рифмической точностью,

$$\left.\frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=\Delta} p_F^2 \Delta \cdot 2 \int\limits_{\omega\Delta/(kv_F)}^{\Delta} \frac{d\eta}{\eta}.$$

Таким образом,

$$Q(\omega, \mathbf{k}) = \frac{N_s e^2}{mc} - i\frac{e^2 p_F^2 \Delta\omega \ln(kv_F/\omega)}{2\pi c\hbar^3 Tk(e^{\Delta/T}+1)(e^{-\Delta/T}+1)}. \tag{97.6}$$

Мнимая часть Q определяет диссипацию; ее отрицательный знак отвечает положительному знаку мнимой части диэлектрической проницаемости.

Выражение (97.6) становится непригодным при $T \to T_c$, когда N_s и Δ стремятся к нулю. Главный вклад в интеграл по p в (97.5) здесь вносит область $\eta \sim T \gg \Delta$; в ней можно положить $\Delta = 0$. После этого получим

$$Q(\omega, \mathbf{k}) = -i\frac{3\pi}{4}\frac{Ne^2}{mc}\frac{\omega}{kv_F},$$

где $N = \dfrac{p_F^3}{3\pi^2\hbar^3}$ — плотность электронов. Это выражение отвечает просто аномальному скин-эффекту в нормальном металле (с законом дисперсии $\varepsilon = p^2/(2m)$) [1]).

Пиппардовский случай. В статическом магнитном поле пиппардовский предельный случай соответствует неравенству

$$\hbar k v_F \gg \Delta_0 \sim T_c. \tag{97.7}$$

Рассматривая переменное электромагнитное поле, добавим сюда еще и условие

$$kv_F \gg \omega. \tag{97.8}$$

Вычисления в этом случае существенно упрощаются, если предварительно вычесть из выражения $Q(\omega, \mathbf{k})$ (96.24) его статическое значение $Q(0, \mathbf{k})$; это сводится к отбрасыванию постоянного члена $Ne^2/(mc)$ и вычитанию из каждого члена $(\varepsilon_+ \pm \varepsilon_- \pm \pm \hbar\omega)^{-1}$ в подынтегральном выражении такого же члена с $\omega = 0$. Разность $Q(\omega, \mathbf{k}) - Q(0, \mathbf{k})$ оказывается пропорциональной $1/k$.

[1]) См. формулу (86.16). При сравнении следует учесть независимость K от φ в данном случае, а также тот факт, что Q связывает $\mathbf{j}$ с $\mathbf{A}$, а не с $\mathbf{E}$, как σ из (86.16).

Таким же образом зависит от k пиппардовское $Q(0, \mathbf{k})$:

$$Q(0, \mathbf{k}) = \frac{c\beta}{4\pi k}, \quad \beta = \frac{4\pi N e^2}{mc^2} \frac{3\pi^2}{4\hbar v_F} \Delta \operatorname{th} \frac{\Delta}{2T} \tag{97.9}$$

(см. IX, (51.21)). Поэтому можно записать $Q(\omega, \mathbf{k})$ в виде

$$Q(\omega, \mathbf{k}) = \frac{c}{4\pi k}[\beta + \gamma(\omega)], \tag{97.10}$$

где $\gamma(\omega)$ — подлежащая вычислению функция, обращающаяся при $\omega = 0$ в нуль. Отметим, что ввиду той же зависимости от k остается справедливой формула (52.6) (см. IX) для глубины проникновения δ, в которой надо лишь заменить β на $\beta + \gamma(\omega)$. Но ввиду комплексности $\gamma(\omega)$ (см. ниже) при этом естественно пользоваться не самой δ, а связанной с ней величиной — поверхностным импедансом $\zeta(\omega) = -i\omega\delta/c$.

В интеграле, определяющем разность $Q(\omega, \mathbf{k}) - Q(0, \mathbf{k})$, существенны (как и при вычислении $Q(0, \mathbf{k})$ в IX, § 51) малые значения $\cos\theta$, причем интеграл быстро сходится при увеличении $\cos\theta$; это позволяет положить $\sin\theta = 1$ и распространить интегрирование по $\cos\theta$ от $-\infty$ до ∞.

Преобразуем интеграл по

$$d^3p = 2\pi p^2\, dp\, d\cos\theta \approx 2\pi p_F^2 m\, d\eta\, d\cos\theta$$

$\left(\eta = \dfrac{p^2}{2m} - \mu\right)$ к интегрированию по новым переменным

$$x_1 = \frac{\varepsilon_+}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\varepsilon_-}{\Delta}.$$

Имеем

$$\eta_+ + \eta_- \approx 2\eta, \quad \eta_+ - \eta_- \approx \hbar k v_F \cos\theta.$$

Поэтому интегрирование по $d\eta\, d\cos\theta$ можно заменить интегрированием по $\dfrac{d\eta_+\, d\eta_-}{k v_F}$ в пределах от $-\infty$ до ∞ по каждой из переменных η_+ и η_-. При этом выпадают все члены в подынтегральном выражении, содержащие произведение $\eta_+\eta_-$ и потому нечетные по этим переменным. После этого можно перейти к интегрированию по переменным x_1 и x_2 в пределах от 1 до ∞ по каждой из них, заменив

$$d\eta\, d\cos\theta \to 4\frac{\varepsilon_+\varepsilon_-}{\hbar k v_F \eta_+\eta_-} d\varepsilon_+\, d\varepsilon_- = \frac{4\Delta^2 x_1 x_2\, dx_1\, dx_2}{\hbar k v_F[(x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1)]^{1/2}}.$$

В результате этих преобразований найдем

$$\gamma(\omega) = -3\pi \frac{Ne^2}{mc^2} \frac{\Delta}{hv_F} J,$$

$$J = \int_1^\infty \int_1^\infty \frac{dx_1\, dx_2}{[(x_1^2-1)(x_2^2-1)]^{1/2}} \operatorname{th} \frac{x_1 \Delta}{2T} \times$$
$$\times \left\{ (x_1 x_2 + 1) \left[\frac{1}{x_1 - x_2 - \widetilde{\omega} - i0} + \frac{1}{x_1 - x_2 + \widetilde{\omega} + i0} - \mathrm{P} \frac{2}{x_1 - x_2} \right] + \right.$$
$$\left. + (x_1 x_2 - 1) \left[\frac{1}{x_1 + x_2 - \widetilde{\omega} - i0} + \frac{1}{x_1 + x_2 + \widetilde{\omega} + i0} - \frac{2}{x_1 + x_2} \right] \right\}, \tag{97.11}$$

где $\widetilde{\omega} = \hbar\omega/\Delta$. Ограничимся рассмотрением мнимой части этого выражения, определяющей поглощение энергии поля.

Мнимая часть подынтегральных выражений в (97.11) отделяется по правилу (29.8), после чего δ-функции устраняются интегрированием по одной из переменных, x_1 или x_2; при этом надо следить за тем, чтобы точка обращения в нуль аргумента δ-функции действительно находилась в области интегрирования. После простых преобразований получим при $\omega > 0$:

$$J'' \equiv \operatorname{Im} J = \pi \int_1^\infty \frac{x(x+\widetilde{\omega})+1}{(x^2-1)^{1/2}[(x+\widetilde{\omega})^2-1]^{1/2}} \left[\operatorname{th} \frac{(x+\widetilde{\omega})\Delta}{2T} - \operatorname{th} \frac{x\Delta}{2T} \right] dx +$$
$$+ \pi \int_1^{\widetilde{\omega}-1} \frac{x(\widetilde{\omega}-x)-1}{(x^2-1)^{1/2}[(x-\widetilde{\omega})^2-1]^{1/2}} \operatorname{th} \frac{x\Delta}{2T}\, dx; \tag{97.12}$$

второй член существует лишь при $\widetilde{\omega} > 2$. Аналогичным образом легко убедиться, что $J''(-\widetilde{\omega}) = J''(\widetilde{\omega})$. Интеграл (97.12) зависит от двух параметров, Δ/T и ω/Δ, которые могут еще находиться в различных соотношениях друг с другом и с единицей. Рассмотрим некоторые из возможных здесь предельных случаев.

Пусть $T = 0$. Тогда первый интеграл в (97.12) обращается в нуль. Второй же интеграл отличен от нуля при $\omega > 2\Delta_0$, т. е. имеется порог поглощения на «энергии связи» куперовских пар. Наличие этого порога, в чем непосредственно проявляется щель в спектре, есть специфическое свойство сверхпроводника.

Вблизи порога, при $\widetilde{\omega} - 2 \ll 1$, во всей области интегрирования x близко к 1. Полагая $\omega - 2 = \delta$, $x - 1 = z\delta$, находим

$$J'' \approx \frac{\pi\delta}{2} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)}} = \frac{\pi^2 \delta}{2} = \pi^2 \left(\frac{\widetilde{\omega}}{2} - 1 \right).$$

Собрав написанные выше формулы, находим таким образом следующее выражение для мнимой части Q при $T = 0$ вблизи порога поглощения:

$$Q'' = -\frac{3\pi^2 Ne^2}{4mc}\frac{\Delta_0}{\hbar v_F k}\left(\frac{\hbar\omega}{2\Delta_0} - 1\right). \qquad (97.13)$$

При отличной от нуля температуре рассмотрим случай малых частот, $\omega \ll \Delta$, причем будем считать, что $\Delta(T) \sim T$ (исключая тем самым температуры как вблизи нуля, так и вблизи T_c). Теперь второй интеграл в (97.12) отсутствует. В первом же интеграле существенна область $x-1 \sim \widetilde{\omega} \ll 1$. Разложив в подынтегральном выражении разность двух th по степеням $\widetilde{\omega}$ и введя переменную $x - 1 = u$, находим, с логарифмической точностью,

$$J'' \approx \frac{\pi\hbar\omega}{2T}\operatorname{ch}^{-2}\frac{\Delta}{2T}\int\limits_0^{\sim 1}\frac{du}{\sqrt{u(u+\widetilde{\omega})}} = \frac{\pi\hbar\omega}{2T}\operatorname{ch}^{-2}\frac{\Delta}{2T}\ln\frac{\Delta}{\omega}.$$

В результате получим

$$Q'' = -\frac{3\pi}{8}\frac{Ne^2}{mc}\frac{\omega}{v_F k}\frac{\Delta}{T}\operatorname{ch}^{-2}\frac{\Delta}{2T}\ln\frac{\Delta}{\omega}. \qquad (97.14)$$

§ 98. Теплопроводность сверхпроводника

Физическая природа электронной теплопроводности сверхпроводника аналогична природе теплопроводности или вязкости сверхтекучей бозе-жидкости. В обоих случаях речь идет о кинетических коэффициентах нормальной компоненты квантовой жидкости — совокупности элементарных возбуждений в ней. Рассмотрим здесь этот вопрос в рамках той же модели БКШ (*Б. Т. Гейликман*, 1958).

Исходим из кинетического уравнения для функции распределения квазичастиц в сверхпроводнике, в котором существует градиент температуры:

$$\mathbf{v}\frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{r}}\frac{\partial n}{\partial \mathbf{p}} = \operatorname{St} n, \qquad (98.1)$$

где $\mathbf{v} = \partial\varepsilon/\partial\mathbf{p}$ — скорость квазичастиц. Энергия квазичастицы

$$\varepsilon = \left[v_F^2(p - p_F)^2 + \Delta^2(T)\right]^{1/2} \qquad (98.2)$$

и сама зависит от температуры через посредство энергетической щели $\Delta(T)$. Поэтому при наличии градиента температуры энергия ε тоже становится функцией координат и производная $-\partial\varepsilon/\partial\mathbf{r}$ играет роль действующей на квазичастицу силы; с этим связано появление второго члена в левой части уравнения (98.1).

Как обычно, полагаем $n = n_0(\varepsilon) + \delta n(\mathbf{r}, \mathbf{p})$, где

$$n_0(\varepsilon) = (e^{\varepsilon/T} + 1)^{-1} \tag{98.3}$$

— равновесная функция распределения. Сохранив в левой части уравнения лишь члены с n_0, имеем для нее:

$$\mathbf{v}\frac{\partial n_0}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{r}}\frac{\partial n_0}{\partial \mathbf{p}} = \left[\frac{\partial n_0}{\partial T} - \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right]\mathbf{v}\nabla T.$$

В стоящей в квадратных скобках разности члены с производной от Δ сокращаются и, таким образом, остается

$$-\frac{\varepsilon}{T}\frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon}\mathbf{v}\nabla T = \frac{\mathbf{v}\nabla T}{T^2}\frac{\varepsilon}{(e^{\varepsilon/T}+1)(e^{-\varepsilon/T}+1)}.$$

Интеграл столкновений зависит от механизма рассеяния квазичастиц. Мы рассмотрим случай, когда основным таким механизмом является упругое рассеяние на неподвижных атомах примесей; закон рассеяния будем считать изотропным. Тогда интеграл столкновений сводится к выражению (ср. (11.3))

$$\mathrm{St}\, n = -\nu \delta n,$$

где $\nu = vN_{\text{пр}}\sigma_t$ — эффективная частота столкновений, $N_{\text{пр}}$ — плотность числа примесных атомов, σ_t — транспортное сечение рассеяния квазичастицы на атоме примеси. Последнее есть постоянная величина порядка атомных размеров.

Таким образом, кинетическое уравнение принимает вид

$$\frac{\mathbf{v}\nabla T}{v}\frac{\varepsilon}{T}\frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} = \frac{\delta n}{l}, \tag{98.4}$$

где $l = 1/(N_{\text{пр}}\sigma_t)$ — постоянная длина пробега.

Тепловой поток вычисляется как интеграл

$$\mathbf{q} = \int \varepsilon \mathbf{v}\, \delta n \frac{2\, d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \tag{98.5}$$

(множитель 2 — от двух направлений спина квазичастицы). Но с функцией распределения $n = n_0 + \delta n$ связан также и нормальный электрический ток в сверхпроводнике с плотностью

$$\mathbf{j}_n = -\frac{e}{m}\int \mathbf{p}\, \delta n \frac{2\, d^3p}{(2\pi\hbar)^3} - e(N - N_s)\mathbf{v}_s.$$

(В рассматриваемой модели $\mathbf{j} = -(e/m)\mathbf{i}$, а $\mathbf{i}$ дается формулой (77.7).) Между тем коэффициент теплопроводности определяется по тепловому потоку при условии $\mathbf{j} = 0$. В данном случае, однако, это условие не приводит к необходимости внесения

каких-либо изменений в уравнение (98.4). Дело в том, что полная плотность тока в сверхпроводнике есть сумма $\mathbf{j} = \mathbf{j}_n + \mathbf{j}_s$ нормального и сверхпроводящего токов. Возникающий при наличии градиента температуры ток $\mathbf{j}_n$ автоматически компенсируется (при разомкнутой электрической цепи) сверхпроводящим током $\mathbf{j}_s = -\mathbf{j}_n$. При этом существенно, что движение сверхпроводящих электронов не связано с переносом тепла. Равновесная функция распределения квазичастиц «на фоне» сверхтекучего движения со скоростью $\mathbf{v}_s = -\mathbf{j}_s/(eN_s)$ отличается от (98.3) заменой ε на $\varepsilon + \mathbf{p}\mathbf{v}_s$ (ср. § 77); эта замена должна была бы быть произведена и в кинетическом уравнении (98.1). Но величина $\mathbf{v}_s$ пропорциональна $\mathbf{j}_n$ и тем самым — малому градиенту ∇T; поэтому указанная замена привела бы к появлению в левой части кинетического уравнения дополнительных членов лишь второго порядка малости, которые все равно должны были бы быть опущены при переходе к (98.4).

Подставив δn из (98.4) в (98.5), получим, после усреднения по направлениям $\mathbf{p}$, для коэффициента теплопроводности выражение

$$\varkappa = -\frac{l}{3T}\int v\varepsilon^2 \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon}\frac{2\cdot 4\pi p^2\,dp}{(2\pi\hbar)^3},$$

или, заменив $v\,dp = d\varepsilon$, $p^2 \approx p_F^2$,

$$\varkappa = -\frac{lp_F^2}{3\pi^2\hbar^3 T}\cdot 2\int\limits_{\Delta}^{\infty} \varepsilon^2\frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon}\,d\varepsilon. \tag{98.6}$$

Окончательно, после очевидных подстановок,

$$\varkappa = \frac{2lp_F^2\Delta^3}{3\pi^2\hbar^3T^2}\int\limits_1^{\infty}\frac{u^2du}{(e^{u\Delta/T}+1)(e^{-u\Delta/T}+1)}. \tag{98.7}$$

При $T \to 0$, $\Delta \to \Delta_0$ коэффициент теплопроводности стремится к нулю по закону

$$\varkappa = \frac{2lp_F^2\Delta^2}{3\pi^2\hbar^3T}e^{-\Delta/T}. \tag{98.8}$$

При $T \to T_c$, $\Delta \to 0$ он стремится (как это видно из (98.6)) к значению

$$\varkappa = \frac{4lp_F^2T}{3\pi^2\hbar^3}\int\limits_0^{\infty}\varepsilon n_0(\varepsilon)\,d\varepsilon = \frac{lp_F^2T}{9\hbar^3},$$

отвечающему нормальному металлу.

ГЛАВА XII

КИНЕТИКА ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ

§ 99. Кинетика фазовых переходов первого рода. Образование зародышей

Напомним основные положения термодинамической теории образования зародышей при фазовом переходе (см. V, § 162).

Переход метастабильной фазы в устойчивую совершается путем флуктуационного возникновения в однородной среде небольших скоплений новой фазы — зародышей. Энергетически невыгодный эффект появления поверхности раздела приводит, однако, к тому, что при недостаточно больших размерах зародыша он оказывается неустойчивым и снова исчезает. Устойчивыми являются лишь зародыши с размерами a, начиная с некоторого определенного (при заданном состоянии метастабильной фазы) размера $a_к$; этот размер назовем *критическим*, а о зародышах такого размера будем говорить как о критических[1]). Критические зародыши предполагаются макроскопическими образованиями, содержащими большое число молекул. Поэтому вся теория справедлива лишь для метастабильных состояний, не слишком близких к границе абсолютной неустойчивости фазы (при приближении к этой границе размеры критических зародышей убывают, стремясь к величине порядка молекулярных размеров).

При чисто термодинамическом подходе может быть поставлена лишь задача о вычислении вероятности флуктуационного возникновения зародышей различного размера в среде, которая при этом рассматривается как равновесная. Последнее обстоятельство имеет принципиальное значение. Поскольку состояние метастабильной фазы в действительности не отвечает полному статистическому равновесию, то такое рассмотрение относится лишь к временам, малым по сравнению со временем (обратной вероятностью) образования критических зародышей, за которым следует фактический переход в новую фазу, т. е. разрушение метастабильного состояния. По этой же причине термодинамическое вычисление вероятности возникновения возможно лишь для зародышей с размерами $a < a_к$, зародыши бо́льших размеров развиваются в новую фазу; другими словами, такие большие

[1]) В V, § 162, под зародышами подразумевались только скопления новой фазы именно этого критического размера.

флуктуации вообще не входят в тот набор микроскопических состояний, которые отвечают рассматриваемому (метастабильному) макроскопическому состоянию.

Вместо термодинамической вероятности образования зародышей будем говорить о пропорциональной ей «равновесной» (в указанном смысле) функции распределения существующих в среде зародышей различных размеров; обозначим ее через $f_0(a)$ ($f_0\,da$ есть число зародышей с размерами в интервале da в единице объема среды). Согласно термодинамической теории флуктуаций,

$$f_0(a) \propto \exp\left[-\frac{R_{\min}(a)}{T}\right], \tag{99.1}$$

где $R_{\min}$ — минимальная работа, которую необходимо затратить для создания зародыша заданного размера. Эта работа складывается из объемной и поверхностной частей и имеет (для сферического зародыша радиуса a) вид

$$R_{\min} = -\frac{8\pi a^3\alpha}{3a_{\text{к}}} + 4\pi a^2\alpha,$$

где α — коэффициент поверхностного натяжения, а критический радиус $a_{\text{к}}$ выражается через термодинамические величины обеих фаз (см. V, § 162, задача 2). Значение $a = a_{\text{к}}$ отвечает максимуму функции $R_{\min}(a)$; вблизи него

$$R_{\min} = \frac{4\pi}{3}\alpha a_{\text{к}}^2 - 4\pi\alpha(a - a_{\text{к}})^2. \tag{99.2}$$

Максимуму $R_{\min}$ соответствует экспоненциально острый минимум функции распределения. Пренебрегая значительно более медленной зависимостью от a предэкспоненциального множителя, имеем

$$f_0(a) = f_0(a_{\text{к}})\exp\left[\frac{4\pi\alpha}{T}(a - a_{\text{к}})^2\right], \tag{99.3}$$

где [1])

$$f_0(a_{\text{к}}) = \text{const}\cdot\exp\left[-\frac{4\pi\alpha a_{\text{к}}^2}{3T}\right].$$

[1]) Предэкспоненциальный множитель в $f_0(a_{\text{к}})$ не может быть выражен через одни только макроскопические характеристики фаз. Для качественной оценки можно считать, что этот множитель пропорционален плотности N_1 числа частиц в основной фазе (фаза 1) и производной $d\mathcal{N}/da$, где $\mathcal{N}$ — число частиц в зародыше новой фазы (фаза 2). Положив $N_1 \sim 1/v_1$, $\mathcal{N} \sim a_{\text{к}}^3/v_2$ (где v_1 и v_2 — объемы, приходящиеся на одну молекулу в каждой из фаз), получим оценку $\text{const} \sim a_{\text{к}}^2/(v_1v_2)$.

Согласно сказанному выше, значение $a = a_{\text{к}}$ отвечает границе, за которой начинается образование массивных количеств новой фазы. Точнее, надо было бы говорить не о граничной точке $a = a_{\text{к}}$, а о целой критической области значений a вокруг этой точки с шириной $\delta a \sim \left(\dfrac{T}{4\pi\alpha}\right)^{1/2}$. Флуктуационное развитие зародышей в этой области размеров может еще с заметной вероятностью перебросить их обратно в докритическую область; зародыши же, прошедшие через критическую область, будут уже неудержимо развиваться в новую фазу.

Поскольку термодинамическая теория ограничена лишь стадией до фактического фазового перехода, она не может дать ответ на вопросы о ходе этого процесса, в том числе о его скорости. Здесь требуется кинетическое рассмотрение эволюции зародышей, приводящей в конце концов к их выпадению в новую фазу [1]).

Обозначим искомую «кинетическую» функцию распределения зародышей по их размерам через $f(t, a)$. «Элементарным актом», меняющим размеры зародыша, является присоединение к нему или, наоборот, потеря одной молекулы; это изменение следует считать малым, поскольку сами зародыши в излагаемой теории являются макроскопическими образованиями. Это обстоятельство позволяет описывать рост зародышей кинетическим уравнением типа уравнения Фоккера–Планка:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial s}{\partial a}, \tag{99.4}$$

где s — плотность потока в «пространстве размеров», имеющая вид

$$s = -B\frac{\partial f}{\partial a} + Af. \tag{99.5}$$

Величина B играет роль «коэффициента диффузии зародышей по размерам». Коэффициент же A связан с B соотношением, следующим из условия обращения s в нуль для равновесного распределения. Взяв последнее в виде (99.1) и пренебрегая медленным изменением предэкспоненциального множителя, находим

$$A = -\frac{B}{T}R'_{\min}(a). \tag{99.6}$$

Найдем стационарное решение кинетического уравнения, отвечающее непрерывно происходящему процессу фазового перехода. В таком решении $s = \text{const}$; это постоянное значение потока (направленного в сторону увеличения размеров) как раз дает число зародышей, проходящих (в 1 с в 1 см^3 среды) через критическую область, т. е. определяет скорость процесса.

---

[1]) Излагаемая ниже теория принадлежит *Я.Б. Зельдовичу* (1942).

Перепишем выражение потока (99.5) выразив его (с учетом (99.6)) через отношение f/f_0 вместо самой функции f. Тогда условие постоянства потока примет вид

$$-Bf_0\frac{\partial}{\partial a}\frac{f}{f_0} = s. \tag{99.7}$$

Отсюда

$$\frac{f}{f_0} = -s\int\frac{da}{Bf_0} + \text{const}.$$

Постоянные s и const определяются из граничных условий при малых и больших a. Вероятность флуктуаций быстро возрастает с уменьшением размеров; поэтому зародыши малых размеров возникают с большой вероятностью. Запас таких зародышей можно считать пополняющимся настолько быстро, что их число продолжает оставаться равновесным, несмотря на постоянный отвод потоком s. Эта ситуация выражается граничным условием $f/f_0 \to 1$ при $a \to 0$. Граничное же условие при больших a можно установить, заметив, что в надкритической области функция f_0, определенная по формуле (99.1) (в действительности здесь неприменимой), неограниченно возрастает; реальная же функция распределения $f(a)$ остается, разумеется, конечной. Эта ситуация выражается условием $f/f_0 = 0$, поставленным где-либо в надкритической области; где именно — не имеет значения (см. ниже), мы условно отнесем его к $a \to \infty$ [1]).

Решение, удовлетворяющее обоим поставленным условиям, есть

$$\frac{f}{f_0} = s\int\limits_a^\infty\frac{da}{Bf_0}, \tag{99.8}$$

причем постоянная s определяется равенством

$$\frac{1}{s} = \int\limits_0^\infty\frac{da}{Bf_0}. \tag{99.9}$$

Подынтегральная функция имеет резкий максимум при $a = a_\text{к}$. Воспользовавшись вблизи этой точки выражением (99.3), можно распространить интегрирование по $a - a_\text{к}$ в (99.9) от $-\infty$ до ∞ вне зависимости от того, где именно (вне критической области) выбран верхний предел интегралов в (99.8), (99.9), т. е. где

[1]) Аналогичные рассуждения использовались уже при решении другой задачи в § 24.

именно поставлено граничное условие. В результате получим

$$s = 2\sqrt{\frac{\alpha}{T}} B(a_{\text{к}}) f_0(a_{\text{к}}). \qquad (99.10)$$

Эта формула выражает число «жизнеспособных» (прошедших критическую область) зародышей, образующихся в стационарных условиях в 1 с в 1 см^3 метастабильной фазы, через равновесное число критических зародышей, определяемое термодинамической теорией.

Для самой функции распределения $f(a)$ формула (99.8) в подкритической области дает просто $f(a) \approx f_0(a)$. В надкритической же области из (99.8) можно видеть лишь, что $f \ll f_0$ в соответствии с поставленным граничным условием. Из физической картины процесса очевидно, что в этой области функция распределения постоянна: попав сюда, зародыш монотонно увеличивается, практически никогда не возвращаясь назад. Соответственно этому, в выражении потока (99.5) здесь можно пренебречь членом с производной $\partial f/\partial a$, т. е. написать $s = Af$. По смыслу потока s, коэффициент A играет при этом роль скорости в пространстве размеров da/dt. Но рост надкритического зародыша происходит по макроскопическим уравнениям, использование которых позволяет определить производную da/dt независимым образом:

$$A = \left(\frac{da}{dt}\right)_{\text{макро}}, \qquad (99.11)$$

где индекс указывает результат такого вычисления [1]).

Согласно (99.6) находим затем

$$B(a) = -\frac{T}{R'_{\min}(a)} \left(\frac{da}{dt}\right)_{\text{макро}} = \frac{T}{8\pi\alpha(a - a_{\text{к}})} \left(\frac{da}{dt}\right)_{\text{макро}}. \qquad (99.12)$$

Строго говоря, вычисленная таким образом функция $B(a)$ относится к области $a > a_{\text{к}}$, между тем как нас интересует (для подстановки в (99.10)) значение $B(a_{\text{к}})$. Но поскольку в точке $a = a_{\text{к}}$ функция $B(a)$ никакой особенности не имеет, можно применить ее и в этой точке. Отметим в этой связи, что при $a \to a_{\text{к}}$ производная $(da/dt)_{\text{макро}}$ обращается в нуль (зародыш находится в

[1]) Может возникнуть вопрос о соответствии формулы (99.11) с «микроскопическим» определением (21.4), согласно которому роль скорости $\sum \delta a/\delta t$ (сумма по элементарным актам роста) играет не сама величина A, а сумма $\widetilde{A} = A + B'(a)$. Но производная $B'(a)$ мала (вне критической области) по сравнению со значением (99.6), содержащим большой множитель $R'_{\min}/T$, и должна быть опущена. Величинами такого порядка было уже пренебрежено, когда при выводе (99.6) предэкспоненциальный множитель в (99.1) рассматривался как постоянный.

равновесии, хотя и неустойчивом); деление же ее на $a - a_к$ приводит к конечному значению.

Формула (99.12) дает в принципе возможность вычислить коэффициент $B(a_к)$, а тем самым и скорость образования зародышей, не прибегая к микроскопическому рассмотрению. Так, для процесса кипения надо рассмотреть, с помощью гидродинамических уравнений, рост пузыря пара в жидкости; для процесса выпадения растворенного вещества из пересыщенного раствора надо рассмотреть рост выпавшего зерна путем диффузионного подвода к нему вещества из окружающего раствора.

З а д а ч а

Определить «коэффициент диффузии по размерам» для выпадения вещества из пересыщенного (но все еще слабого) раствора; зародыши предполагаются сферическими.

Р е ш е н и е. Напомним термодинамические формулы. Критический радиус зародыша при его выпадении из пересыщенного раствора

$$a_к = \frac{2\alpha v'}{\mu' - \mu'_0}$$

(см. V, § 162, задача 2), где в данном случае μ'_0 и v' — химический потенциал и молекулярный объем вещества зародыша, а μ' — химический потенциал растворенного вещества в растворе; последний дается формулой $\mu' = T\ln c + \psi(P,T)$, где c — концентрация. Введя концентрацию $c_{0\infty}$ насыщенного раствора над плоской поверхностью растворяемого вещества согласно $T\ln c_{0\infty} + \psi = \mu'_0$, имеем

$$\mu' - \mu'_0 = T\ln\frac{c}{c_{0\infty}} \approx \frac{T(c - c_{0\infty})}{c_{0\infty}};$$

последнее равенство относится к слабым растворам. Таким образом, критический радиус

$$a_к = \frac{2\alpha v' c_{0\infty}}{T(c - c_{0\infty})}. \qquad (1)$$

Формула же

$$c_{0a} = c_{0\infty}\left(1 + \frac{2\alpha v'}{Ta}\right) = c_{0\infty} + \frac{a_к}{a}(c - c_{0\infty}) \qquad (2)$$

определяет концентрацию c_{0a} насыщенного раствора над сферической (радиуса a) поверхностью растворяемого вещества.

Подвод вещества к растущему надкритическому зародышу осуществляется диффузией из окружающего раствора. В стационарном режиме сферически-симметричное распределение концентрации $c(r)$ вокруг зародыша радиуса a определяется решением диффузионного уравнения

$$D\Delta c(r) = D\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}rc(r) = \frac{\partial c(r)}{\partial t} \equiv 0$$

с граничными условиями $c(\infty) = c$ (заданное значение концентрации пересыщенного раствора) и $c(a) = c_{0a}$. Отсюда

$$c(r) = c - (c - c_{0a})\frac{a}{r}$$

и диффузионный поток по направлению к зародышу:

$$I = 4\pi r^2 D \frac{dc}{dr} = 4\pi Da(c - c_{0a}) = 4\pi D(c - c_{0\infty})(a - a_{\text{к}});$$

в последнем равенстве использована формула (2).

Если концентрация определена как число растворенных молекул в единице объема, то I есть число молекул, осаждающихся в 1 с на поверхности зародыша. Тогда

$$\left(\frac{da}{dt}\right)_{\text{макро}} = \frac{Iv'}{4\pi a^2} = \frac{Dv'}{a^2}(a - a_{\text{к}})(c - c_{0\infty})$$

и, согласно (99.12),

$$B(a_{\text{к}}) = \frac{TDv'(c - c_{0\infty})}{8\pi\alpha a_{\text{к}}^2} = \frac{Dv'^2 c_{0\infty}}{4\pi a_{\text{к}}^3}.$$

§ 100. Кинетика фазовых переходов первого рода. Стадия коалесценции

Проведенное в предыдущем параграфе рассмотрение кинетики фазового перехода относится только к его начальной стадии: общий объем всех зародышей новой фазы должен быть настолько мал, чтобы их возникновение и рост не отражались заметно на «степени метастабильности» основной фазы, и поэтому мог бы считаться постоянной величиной определяемый этой степенью критический размер зародышей. На этой стадии происходит флуктуационное образование зародышей новой фазы, а рост каждого из них не зависит от поведения остальных зародышей. Ниже мы будем говорить, для определенности, о процессе выпадения растворенного вещества из пересыщенного раствора; степенью метастабильности является в этом случае степень пересыщенности раствора.

На поздней стадии, когда пересыщение раствора становится очень малым, характер процесса существенно меняется. Флуктуационное возникновение новых зародышей здесь практически исключено, поскольку критические размеры велики. Увеличение критических размеров, сопровождающее прогрессирующее падение степени пересыщения раствора, приводит к тому, что меньшие из уже имеющихся зерен новой фазы становятся подкритическими и вновь растворяются. Таким образом, определяющую роль на этой стадии приобретает процесс «поедания» мелких зерен крупными — рост более крупных зерен за счет растворения мелких (процесс *коалесценции*). Именно эта стадия и рассматривается ниже в этом параграфе. При этом предполагается, что начальная концентрация раствора настолько мала, что выпавшие зерна находятся далеко друг от друга, так что их непосредственным «взаимодействием» можно пренебречь [1]).

[1]) Излагаемая теория принадлежит *И.М. Лифшицу* и *В.В. Слезову* (1958).

Мы будем рассматривать твердый раствор, в котором выпадающие зерна неподвижны и растут лишь за счет диффузии из окружающего раствора. Имея в виду лишь демонстрацию метода и основных качественных свойств процесса, сделаем также и некоторые другие упрощающие предположения: не будем учитывать упругих напряжений вокруг выпавших зерен и будем считать последние сферическими.

Равновесная концентрация раствора у поверхности зерна с радиусом a дается термодинамической формулой

$$c_{0a} = c_{0\infty}\left(1 + \frac{2\alpha v'}{Ta}\right), \tag{100.1}$$

где $c_{0\infty}$ — концентрация насыщенного раствора над плоской поверхностью растворяемого вещества, α — коэффициент поверхностного натяжения на межфазной границе, v' — молекулярный объем растворяемого вещества (см. задачу в предыдущем параграфе). Концентрацию определим по объемному количеству вещества, растворенному в 1 см^3 раствора. При таком определении диффузионный поток $i = D\,\partial c/\partial r$ у поверхности зерна будет совпадать со скоростью изменения его радиуса:

$$\frac{da}{dt} = D\frac{\partial c}{\partial r}\bigg|_{r=a}$$

(D — коэффициент диффузии растворенного вещества). Ввиду предполагаемой малости концентрации, эта скорость настолько мала, что распределение концентрации вокруг зерна можно считать в каждый момент времени совпадающим со стационарным распределением $c(r)$, отвечающим данному значению a:

$$c(r) = c - (c - c_{0a})\frac{a}{r}$$

(c — средняя концентрация раствора). Отсюда диффузионный поток $i(r) = Da(c - c_{0a})/r^2$ и затем, с учетом (100.1),

$$i(a) = \frac{da}{dt} = \frac{D(c - c_{0a})}{a} = \frac{D}{a}\left(\Delta - \frac{\sigma}{a}\right),$$

где введен параметр $\sigma = 2\alpha v' c_{0\infty}/T$ и величина $\Delta = c - c_{0\infty}$ — пересыщение раствора. Величина

$$a_{\text{к}}(t) = \frac{\sigma}{\Delta(t)} \tag{100.2}$$

есть критический радиус: при $a > a_{\text{к}}$ зерно растет ($da/dt > 0$), а при $a < a_{\text{к}}$ — растворяется ($da/dt < 0$). Ниже (вплоть до формулировки окончательных результатов) будем измерять время

в единицах $a_к^3(0)/(D\sigma)$, где $a_к(0)$ — значение критического радиуса, отвечающее началу стадии коалесценции. Таким образом, приходим к уравнению

$$\frac{da}{dt} = \frac{a_к^3(0)}{a}\left(\frac{1}{a_к} - \frac{1}{a}\right). \tag{100.3}$$

Далее, введем функцию распределения зерен по размерам, $f(t,a)$, нормированную так, что интеграл

$$N(t) = \int\limits_0^\infty f(t,a)\,da$$

есть число зерен в единице объема. Рассматривая $v_a = da/dt$ как скорость перемещения зерна в пространстве размеров, запишем уравнение непрерывности в этом пространстве:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a}(f v_a) = 0. \tag{100.4}$$

Наконец, сохранение полного количества растворенного вещества выражается уравнением

$$\Delta + q = \mathrm{const} \equiv Q, \quad q(t) = \frac{4\pi}{3}\int a^3 f(t,a)\,da, \tag{100.5}$$

где Q — полное начальное пересыщение, q — объем выпавших зерен (в 1 см^3 раствора).

Уравнения (100.3)–(100.5) составляют полную систему уравнений рассматриваемой задачи. Преобразуем их, введя более удобные для исследования переменные.

Введем безразмерную величину

$$x(t) = \frac{a_к(t)}{a_к(0)}. \tag{100.6}$$

При $t \to \infty$ пересыщение $\Delta(t)$ стремится к нулю, а критический радиус — соответственно к бесконечности. Поэтому при изменении t от 0 до ∞ монотонно меняется от 0 до ∞ также и величина

$$\tau = 3\ln x(t), \tag{100.7}$$

которую мы выберем в качестве новой временной переменной. В качестве же неизвестной функции в уравнении (100.3) введем отношение

$$u = \frac{a}{a_к(t)}. \tag{100.8}$$

В результате уравнение примет вид

$$\frac{du^3}{d\tau} = \gamma(u-1) - u^3, \tag{100.9}$$

где

$$\gamma = \gamma(\tau) = \frac{dt}{x^2\,dx} > 0. \tag{100.10}$$

Приступая к исследованию уравнений, покажем прежде всего, что при $\tau \to \infty$ функция $\gamma(\tau)$ должна стремиться к определенному конечному пределу.

Правая часть уравнения (100.9) имеет максимум при $u^2 = \gamma/3$ и принимает в нем значение $\gamma\left[(2/3)(\gamma/3)^{1/2} - 1\right]$. Поэтому, в зависимости от значения γ, график скорости $du^3/d\tau$ как функции u может иметь один из трех видов, изображенных на рис. 34. При $\gamma = \gamma_0 = 27/4$ кривая касается оси абсцисс в точке $u = u_0 = 3/2$.

Каждая точка на оси абсцисс, изображающая состояние зерна, движется вправо или влево в зависимости от знака производной $du^3/d\tau$. При $\gamma > \gamma_0$ все точки слева от u_1 движутся налево

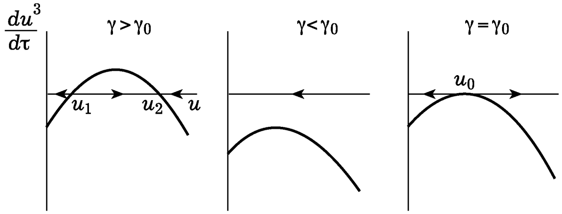


Рис. 34

и исчезают, достигнув начала координат. Точки же $u > u_1$ движутся к точке u_2, асимптотически приближаясь к ней справа или слева. Это значит, что все зерна с $u > u_1$, т. е. с радиусом $a > u_1 a_к$, асимптотически (при $\tau \to \infty$) приобретали бы размер $a = a_к u_2$, стремящийся к бесконечности вместе с $a_к$; таким образом, стремился бы к бесконечности и общий объем выпавших зерен q, так что уравнение сохранения вещества (100.5) не может быть удовлетворено. При $\gamma < \gamma_0$ все точки движутся влево и исчезают, достигнув за конечное время начала координат; в этом случае $q(\tau) \to 0$ и уравнение (100.5) снова не может быть удовлетворено.

Таким образом, функция $\gamma(\tau)$ должна стремиться к пределу γ_0, причем должна приближаться к этому значению снизу: при приближении сверху (или при точном равенстве $\gamma = \gamma_0$) все точки с $u > u_0$, двигаясь влево, все равно «застряли» бы в точке $u = u_0$ (в которой скорость $du^3/d\tau = 0$) и уравнение (100.5) не могло бы быть удовлетворено, как и в случае $\gamma(\infty) > \gamma_0$. Итак, должно быть

$$\gamma(\tau) = \frac{27}{4}[1 - \varepsilon^2(\tau)], \tag{100.11}$$

где $\varepsilon \to 0$ при $\tau \to \infty$. При этом точки, подходящие справа, все медленнее просачиваются через «запирающую точку» $u = u_0$.

Скорость этого просачивания определяется функцией $\varepsilon(\tau)$, которая снова должна быть определена из уравнения движения (100.9) и уравнения сохранения вещества (100.5).

Вблизи точки $u = u_0$ уравнение (100.9) с γ из (100.11):

$$\frac{du}{d\tau} = -\frac{2}{3}\left(u - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Введя новую неизвестную функцию как отношение $z = \dfrac{u - 3/2}{\varepsilon}$ двух малых величин, запишем это уравнение в форме

$$\frac{3}{2\varepsilon}\frac{dz}{d\tau} = -z^2 - \frac{3}{4} + \frac{3}{2}z\eta, \quad \eta = \frac{d(1/\varepsilon)}{d\tau}. \tag{100.12}$$

Его исследование, аналогичное произведенному выше для уравнения (100.9), приводит к заключению, что асимптотически при $\tau \to \infty$ функция $\eta(\tau)$ должна стремиться к конечному пределу $\eta_0 = 2/\sqrt{3}$ (это — значение η, при котором кривая зависимости правой части уравнения (100.12) от z касается оси абсцисс в «запирающей точке» $z_0 = \sqrt{3}/2$). Из асимптотического равенства $\eta = \eta_0$ следует предельное выражение функции

$$\varepsilon(\tau) = \frac{\sqrt{3}}{2\tau}. \tag{100.13}$$

При $\tau^2 \gg 1$ поправочным членом в (100.11) можно пренебречь. Тогда из уравнения $1/\gamma = x^2dx/dt = 4/27$ находим предельный закон зависимости критического радиуса от времени:

$$x(t) = \frac{a_{\text{к}}(t)}{a_{\text{к}}(0)} = \left(\frac{4t}{9}\right)^{1/3}. \tag{100.14}$$

Поскольку $\tau = \ln x^3$, то условие применимости результата (100.14), выраженное через истинное время t, есть $\ln^2 t \gg 1$. Интересно, что, хотя относительное значение поправок к γ_0 быстро убывает с ростом τ и первое приближение (закон (100.14)) становится все более точным, поведение решения вблизи запирающей точки определяется именно этими поправками.

Перейдем к вычислению функции распределения зерен по размерам. Функция распределения в переменных u, τ связана с функцией распределения в переменных u, τ соотношением

$$\varphi(\tau, u)\, du = f(t, a)\, da, \qquad f = \frac{\varphi}{a_{\text{к}}}. \tag{100.15}$$

Уравнение непрерывности для этой функции:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\tau} + \frac{\partial}{\partial u}(v_u\varphi) = 0, \qquad v_u = \frac{du}{d\tau}. \tag{100.16}$$

Везде, за исключением близкой ($\sim \varepsilon$) окрестности точки u_0, скорость v_u дается уравнением (100.9) $\gamma = 27/4$:

$$v_u = \frac{du}{d\tau} = -\frac{1}{3u^2}\left(u - \frac{3}{2}\right)^2 (u+3). \tag{100.17}$$

Решение уравнения (100.16) имеет вид

$$\varphi(\tau, u) = \frac{\chi(\tau - \tau(u))}{-\,v_u}, \qquad \tau(u) = \int\limits_0^u \frac{du}{v_u}, \tag{100.18}$$

где χ — произвольная функция, которую надо еще определить.

Мы видели, что все точки на оси u, изображающие зерна, двигаясь справа налево, проходят через окрестность запирающей точки, причем чем позднее они попадают в эту область, тем дольше они там находятся. Эта окрестность играет таким образом роль стока для точек $u > u_0$ и роль источника для области $u < u_0$.

Функция распределения справа от точки u_0 при $\tau \to \infty$ определяется приходящими сюда из бесконечно удаленной области точками, отвечающими зернам на «хвосте» их начального (при $\tau = 0$) распределения. Поскольку число зерен в этом распределении, разумеется, быстро (фактически — экспоненциально) убывает с увеличением их размеров, то функция распределения в области $u > u_0$ (вне окрестности точки u_0) стремится при $\tau \to \infty$ к нулю.

В уравнении сохранения вещества (100.5) член $\Delta(\tau) \to 0$ при $\tau \to \infty$. Выразив интеграл q через переменные τ, u (напомним, что $a^3 = u^3 x^3 a_\text{к}^3(0) = u^3 e^\tau a_\text{к}^3(0)$), получим уравнение

$$\varkappa e^\tau \int\limits_0^u u^3 \varphi(\tau, u)\, du = 1, \qquad \varkappa = \frac{4\pi a_\text{к}^3(0)}{3Q}; \tag{100.19}$$

сюда надо подставить φ из (100.18) с v_u из (100.17) [1]). Сразу видно, что выражение в левой части равенства (100.19) может быть независящей от τ величиной, лишь если функция χ имеет вид

$$\chi(\tau - \tau(u)) = Ae^{-\tau + \tau(u)}.$$

Функция $\tau(u)$ вычисляется элементарным интегрированием и в результате получается

$$\varphi(\tau, u) = Ae^{-\tau} P(u), \tag{100.20}$$

---

[1]) Мы не останавливаемся на доказательстве того, что относительный вклад в интеграл от окрестности точки u_0 (в которой выражение (100.17) неприменимо) стремится при $\tau \to \infty$ к нулю.

где

$$P(u) = \frac{3^4 e}{2^{5/3}} \frac{u^2 \exp[-1/(1-2u/3)]}{(u+3)^{7/3}(3/2-u)^{11/3}}, \qquad u < \frac{3}{2},$$
$$P(u) = 0, \qquad u > \frac{3}{2}. \tag{100.21}$$

Постоянная A определяется обратной подстановкой (100.20) в уравнение (100.19); численное вычисление получающегося интеграла дает $A = 0,9/\varkappa$. Функция $P(u)$ автоматически нормирована на 1:

$$\int\limits_0^{u_0} P(u)\, du = \int\limits_0^{3/2} \frac{e^{\tau(u)}}{-\,v_u}\, du = -\int\limits_0^{-\infty} e^{\tau}\, d\tau = 1.$$

Поэтому число зерен в единице объема

$$N = \int\limits_0^{u_0} \varphi(\tau, u)\, du = Ae^{-\tau} = \frac{9A}{4t}. \tag{100.22}$$

Легко найти также и среднее (по распределению (100.21)) значение $\overline{u}$. Для этого рассмотрим интеграл

$$\int\limits_0^{u_0} P(u)(u-1)\, du = \int\limits_0^{u_0} e^{\tau(u)}(u-1)\frac{du}{-\,v_u} = \int\limits_{-\infty}^{0} e^{\tau}[u(\tau)-1]\, d\tau.$$

Подставив сюда $u(\tau) - 1$ из (100.9), получим

$$\frac{4}{27}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{\tau}\left[u^3(\tau) + \frac{du^3(\tau)}{d\tau}\right] d\tau = \frac{4}{27} u^3(\tau) e^{\tau}\Big|_{-\infty}^{0} = 0.$$

Таким образом,

$$\overline{u} = \int\limits_0^{u_0} P(u) u\, du = \int\limits_0^{u_0} P(u)\, du = 1,$$

т. е. $\overline{a} = a_{\text{к}}(t)$ — средние размеры совпадают с критическими.

Собрав полученные формулы, выпишем еще раз результаты, вернувшись к исходным переменным — радиусу зерна a и размерному времени t. Средний радиус зерна возрастает со временем по асимптотическому закону

$$\overline{a} = \left(\frac{4\sigma D}{9}\, t\right)^{1/3}. \tag{100.23}$$

Распределение же зерен по размерам дается в каждый момент времени функцией (100.21): число зерен с радиусом в интервале

da есть $P(a/\overline{a})\, da/\overline{a}$. Функция $P(u)$ отлична от нуля лишь в области $u < 3/2$; ее график показан на рис. 35. Отметим, что асимптотический закон распределения оказывается независящим от начального (в момент начала стадии коалесценции) распределения. Полное число зерен (в единице объема) убывает со временем по закону

$$N(t) = \frac{0,5Q}{D\sigma t}. \qquad (100.24)$$

Пересыщение же раствора стремится к нулю как

$$\Delta(t) = \left(\frac{9\sigma^2}{Dt}\right)^{1/3}. \qquad (100.25)$$

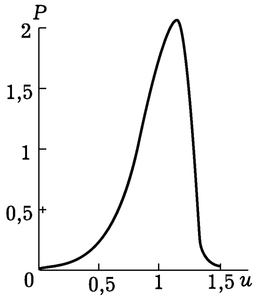


Рис. 35

Для понимания смысла этих законов обратим внимание на то, что в проведенном рассмотрении общий объем раствора рассматривался как неограниченный, а потому неограничен и полный запас растворенного вещества. В конечном объеме процесс заканчивается, разумеется, за конечное время, когда все растворенное вещество выпадает в виде одного тела.

§ 101. Релаксация параметра порядка вблизи точки фазового перехода второго рода

Как известно, изменение состояния тела при фазовом переходе второго рода описывается параметром порядка η, отличным от нуля по одну сторону точки перехода (в «несимметричной» фазе) и равным нулю по другую сторону (в «симметричной» фазе). В V, гл. XIV, речь шла о термодинамически равновесных свойствах тел вблизи точек перехода. Обратимся теперь к процессу релаксации параметра порядка в неравновесной системе.

Равновесное значение параметра порядка (которое мы будем обозначать здесь как $\overline{\eta}$) определяется минимизацией соответствующего термодинамического потенциала. Имея в виду рассмотреть как пространственно-однородный, так и неоднородный случай, будем пользоваться потенциалом Ω — функцией температуры T и химического потенциала μ (при заданном полном объеме тела) — ср. V, § 146.

В пространственно-однородном теле значение η определяется минимумом $\Omega(T, \mu, \eta)$ (термодинамический потенциал единицы объема) как функции параметра η при заданных T и μ:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \eta} = 0. \qquad (101.1)$$

Если это условие не выполнено, то возникает процесс релаксации — параметр η меняется со временем, стремясь к $\overline{\eta}$. В слабо неравновесном состоянии, т. е. при отличных от нуля, но малых значениях производной $\partial\Omega/\partial\eta$, мала также и скорость релаксации — производная $\partial\eta/\partial t$. В теории Ландау, в которой пренебрегается флуктуациями параметра порядка, следует считать, что связь между этими двумя производными сводится к простой пропорциональности:

$$\frac{d\eta}{dt} = -\gamma\frac{\partial\Omega}{\partial\eta} \tag{101.2}$$

с постоянным коэффициентом γ (*Л.Д. Ландау, И.М. Халатников*, 1954).

В теории Ландау термодинамический потенциал вблизи точки перехода имеет вид

$$\Omega = \Omega_0(T,\mu) + (T-T_c)\alpha\eta^2 + b\eta^4 \tag{101.3}$$

с положительным коэффициентом b; если несимметричной фазе отвечает область $T < T_c$, то и $\alpha > 0$ (см. V, (146.3)). Равновесное значение параметра порядка в несимметричной фазе — решение уравнения (101.1) — есть

$$\overline{\eta} = \left[\frac{\alpha(T_c-T)}{2b}\right]^{1/2}. \tag{101.4}$$

Уравнение же релаксации (101.2) принимает вид

$$\frac{d\eta}{dt} = -2\gamma[(T-T_c)\alpha\eta + 2b\eta^3],$$

или, линеаризуя по малой разности $\delta\eta = \eta - \overline{\eta}$,

$$\frac{d\,\delta\eta}{dt} = -\frac{\delta\eta}{\tau_0}, \tag{101.5}$$

где

$$\tau_0 = \frac{1}{4}\gamma\alpha(T_c-T), \qquad T < T_c. \tag{101.6}$$

При $t \to \infty$ разность $\delta\eta$ должна стремиться к нулю; поэтому должно быть $\tau_0 > 0$, а потому и $\gamma > 0$.

Аналогичным образом рассматривается релаксация в области $T > T_c$. Здесь $\overline{\eta} = 0$ и линеаризованное выражение производной

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\eta} = -2\alpha(T-T_c)\delta\eta.$$

Соответственно вместо (101.6) получается

$$\tau_0 = \frac{1}{2}\gamma\alpha(T-T_c), \qquad T > T_c. \tag{101.7}$$

Величина τ_0 представляет собой время релаксации параметра порядка. Мы видим, что оно стремится к бесконечности при $T \to T_c$. Это обстоятельство имеет важное принципиальное значение для всей теории фазовых переходов. Как уже отмечалось в V, § 143, оно обеспечивает существование макроскопических состояний, отвечающих неполному равновесию при заданных неравновесных значениях η. Именно благодаря этому обстоятельству имеет смысл излагаемая в этом и следующем параграфах теория, в которой релаксация параметра порядка рассматривается независимо от релаксации других макроскопических характеристик тела.

В пространственно-неоднородной системе надо рассматривать полный термодинамический потенциал, даваемый интегралом

$$\Omega_{\text{п}} = \int \{\Omega_0 + \alpha(T - T_c)\eta^2 + b\eta^4 + g(\nabla\eta)^2\}\, dV \tag{101.8}$$

(см. V, (146.5)). Соответствующее условие равновесия получается варьированием интеграла по η и приравниванием вариации нулю. Преобразовав интеграл от вариации градиентного члена по частям, получим условие равновесия в виде уравнения

$$2\alpha(T - T_c)\eta + 4b\eta^3 - 2g\Delta\eta \approx \frac{\delta\eta}{\gamma\tau_0} - 2g\Delta\delta\eta = 0$$

(для определенности рассматриваем несимметричную фазу — область $T < T_c$). Соответственно появляется дополнительный член и в релаксационном уравнении:

$$\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial t} = -\left\{\frac{\delta\eta}{\tau_0} - 2\gamma g\Delta\,\delta\eta\right\}. \tag{101.9}$$

Для каждой из пространственных фурье-компонент функции $\delta\eta(t, \mathbf{r})$ отсюда получается уравнение

$$\frac{d\,\delta\eta_{\mathbf{k}}}{dt} = -\frac{\delta\eta_{\mathbf{k}}}{\tau_{\mathbf{k}}}, \qquad \frac{1}{\tau_{\mathbf{k}}} = \frac{1}{\tau_0} + 2\gamma g k^2. \tag{101.10}$$

Мы видим, что время релаксации для компонент с $\mathbf{k} \neq 0$ остается при $T \to T_c$ конечным, но растет при уменьшении k.

Наконец, если ввести в Ω член $-\eta h$, описывающий воздействие на переход внешнего поля (см. V, (146.5)), то релаксационное уравнение примет вид

$$\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial t} = -\frac{\delta\eta}{\tau_0} + 2\gamma g\Delta\,\delta\eta + \gamma h. \tag{101.11}$$

Полагая поле периодическим,

$$h \propto e^{i(\mathbf{kr} - \omega t)},$$

получим отсюда соотношение

$$\delta\eta_{\mathbf{k}} = \chi(\omega, \mathbf{k})h$$

с обобщенной восприимчивостью

$$\chi(\omega, \mathbf{k}) = \frac{\gamma}{\tau_{\mathbf{k}}^{-1} - i\omega}. \tag{101.12}$$

Отметим, что это выражение имеет полюс при $\omega = -i\tau_{\mathbf{k}}^{-1}$ — в согласии со сделанным в конце § 91 общим утверждением. При $\omega = 0$, $\mathbf{k} = 0$ оно сводится к $\chi(0,0) = \frac{1}{4}\alpha(T_c - T)$ — в согласии с V, (144.8).

Согласно флуктуационно-диссипационной теореме, обобщенная восприимчивость (101.12) определяет спектральный коррелятор флуктуаций параметра порядка по формуле (в классическом пределе $\hbar\omega \ll T$)

$$(\delta\eta^2)_{\omega\mathbf{k}} = \frac{2T}{\omega}\operatorname{Im}\chi(\omega, \mathbf{k}) = \frac{2\gamma T}{\omega^2 + \tau_{\mathbf{k}}^{-2}}. \tag{101.13}$$

Напомним, что это — пространственно-временная фурье-компонента коррелятора $\langle\delta\eta(0,0)\delta\eta(t,\mathbf{r})\rangle$; средние же значения произведений фурье-компонент флуктуаций связаны с функцией $(\delta\eta^2)_{\omega\mathbf{k}}$ соотношением

$$\langle\delta\eta_{\omega\mathbf{k}}\delta\eta_{\omega'\mathbf{k}'}\rangle = (2\pi)^4\delta(\omega + \omega')\delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}')(\delta\eta^2)_{\omega\mathbf{k}}.$$

Интегрирование (101.13) по $d\omega/(2\pi)$ дает пространственную фурье-компоненту одновременного коррелятора $\langle\delta\eta(0,0)\delta\eta(0,\mathbf{r})\rangle$ [1]:

$$(\delta\eta^2)_{\mathbf{k}} = \int(\delta\eta^2)_{\omega\mathbf{k}}\frac{d\omega}{2\pi} = \frac{T}{2gk^2 + 4\alpha(T_c - T)}. \tag{101.14}$$

§ 102. Динамическая масштабная инвариантность

Изложенная в предыдущем параграфе теория не учитывает флуктуаций параметра порядка. Поэтому ее применимость ограничена теми же условиями, что и термодинамическая теория фазовых переходов Ландау. Эти условия нарушаются в достаточной близости к точке перехода – во «флуктуационной» области.

---

[1]) При сравнении (101.14) с формулой (146.8)(см. V), следует помнить, что в последней рассматриваются компоненты разложения не в интеграл, а в ряд Фурье в конечном объеме V.

В этой области кинетические (как и чисто термодинамические — см. V, § 148) свойства тела могут быть описаны набором «критических индексов», определяющих законы изменения различных величин при приближении к точке перехода. Оказывается возможным получить некоторые соотношения между этими индексами путем распространения на кинетические явления гипотезы масштабной инвариантности, сформулированной для термодинамических свойств в V, § 149; о таком распространении говорят как о *динамической масштабной инвариантности.*

Характер особенности, которую имеют в точке перехода термодинамические величины, зависит от числа компонент параметра порядка, описывающего переход, и от структуры составленного из них эффективного гамильтониана (см. V, § 147). Для кинетических величин разнообразие возможных случаев возрастает в связи с возможным разнообразием форм «уравнений движения», описывающих релаксацию. Обсудим сначала простейший случай однокомпонентного параметра порядка (*B.I. Halperin. P.C. Hohenberg*, 1969) [1]).

Принципиальный (хотя фактически неосуществимый) путь к определению законов релаксации состоит в вычислении точной (с учетом флуктуаций) обобщенной восприимчивости $\chi(\omega, k; T)$ для параметра порядка η под действием внешнего поля. Ход изменения η со временем при релаксации определяется (как это было объяснено в § 91) особыми точками χ как функции комплексной переменной ω. Если ближайшей к вещественной оси особенностью является простой полюс в точке $\omega = -i\tau^{-1}(k; T)$ на мнимой оси, то каждая фурье-компонента параметра порядка затухает по экспоненциальному закону со временем релаксации $\tau(k; T)$. Наряду с критическими индексами, определяющими поведение термодинамических величин, введем два индекса y и z, характеризующих функцию $\chi(\omega, k; T)$:

$$\tau \propto |T - T_c|^{-y} \qquad \text{при} \qquad k = 0, \tag{102.1}$$

$$\tau \propto k^{-z} \qquad \text{при} \qquad T = T_c, \tag{102.2}$$

причем $y > 0$, $z > 0$, поскольку время релаксации становится бесконечным при $k = 0$, $T = T_c$.

Представляется весьма правдоподобным утверждать, что вблизи точки фазового перехода второго рода (во флуктуационной области) время релаксации не зависит от температуры, если измерять его в единицах $\tau_0 \equiv \tau(0; T)$, а длины $1/k$ изме-

[1]) Речь может идти, например, о релаксации абсолютной величины вектора намагниченности в ферромагнетике (вблизи его точки Кюри), в котором сильные релятивистские взаимодействия фиксируют кристаллографическое направление этого вектора.

рять в единицах $r_c(T)$ — корреляционного радиуса флуктуаций параметра порядка. Другими словами, функция $\tau(k;T)$ должна иметь вид

$$\tau(k;T) = |T - T_c|^{-y} f(kr_c), \tag{102.3}$$

где функция f зависит от температуры только через посредство $r_c(T)$ в произведении kr_c, а $f(0) = \mathrm{const}$.

Поскольку $r_c \to \infty$ при $T \to T_c$, то в соответствии с определением критического индекса z должно быть $f(\xi) \sim \xi^{-z}$ при $\xi \to \infty$. При этом температурная зависимость τ отделяется в виде произведения

$$|T - T_c|^{-y} |T - T_c|^{z\nu},$$

где ν — критический индекс корреляционного радиуса [1])

$$r_c \sim |T - T_c|^{-\nu}. \tag{102.4}$$

Но τ должно оставаться при $T \to T_c$ (и $k \neq 0$) конечным. Отсюда следует, что должно быть

$$y = z\nu. \tag{102.5}$$

Таким образом, предположение о масштабной инвариантности позволяет связать друг с другом оба индекса в (102.1), (102.2).

Как и в статическом случае, есть все основания полагать, что критические индексы одинаковы по обе стороны точки перехода. Дело в том, что пространственная неоднородность ($k \neq 0$) размывает фазовый переход в том смысле, что устраняет особенности всех величин при $T = T_c$ (в этом отношении неоднородность влияет на фазовый переход так же, как внешнее поле). Другими словами, точка $T = T_c$ теряет свою выделенность, так что нет никаких причин для различия значений индекса z при стремлении T к T_c сверху или снизу. В силу соотношения (102.5), то же самое относится тогда и к индексу y.

Аналогичным образом можно связать с z и другие критические индексы. Рассмотрим, например, зависимость восприимчивости χ от ω при $k = 0$ в точке $T = T_c$.

В соответствии с масштабной инвариантностью, функция $\chi(\omega, k; T_c)$ может быть представлена в виде

$$\chi = |T - T_c|^{-\gamma} f(\omega\tau_0, kr_c), \qquad f(0,0) = \mathrm{const},$$

где γ — критический индекс для восприимчивости при $k = 0$ и $\omega = 0$. При $k = 0$ и $T \to T_c$ восприимчивость должна стремиться

[1]) Обозначение критических индексов термодинамических величин здесь и ниже совпадает с их обозначением в V, § 148.

к конечному (при $\omega \neq 0$) пределу. Учитывая, что $\tau_0 \sim |T - T_c|^{-z\nu}$, найдем, что для этого должно быть

$$f(\xi, 0) \sim \xi^{-\gamma/\nu z} \text{ при } \xi \to \infty.$$

Тем самым определится искомая зависимость χ от ω:

$$\chi \sim \omega^{-\gamma/\nu z} \text{ при } k = 0,\ T = T_c. \tag{102.6}$$

Таким образом, в рассмотренном случае требования масштабной инвариантности позволяют установить определенную связь между кинетическими и термодинамическими критическими индексами, но они недостаточны для полного определения первых по последним.

§ 103. Релаксация в жидком гелии вблизи λ-точки

Рассмотрим теперь системы с «вырождением», в которых параметр порядка имеет несколько (n) компонент η_i, но эффективный гамильтониан зависит (в однородной системе) только от суммы их квадратов. Другими словами, если рассматривать совокупность величин η_i как n-мерный вектор, то эффективный гамильтониан не зависит от его направления.

Характерным примером является чисто обменный ферромагнетик, энергия которого не зависит от направления вектора намагниченности. Другой пример представляет собой сверхтекучая жидкость (жидкий гелий), в которой роль параметра порядка играет конденсатная волновая функция

$$\Xi = \sqrt{n_0}\, e^{i\Phi} \tag{103.1}$$

(см. IX, § 26, 27). Эта комплексная величина представляет собой совокупность двух независимых величин, но энергия однородной жидкости зависит только от квадрата модуля $|\Xi|^2 = n_0$ — плотности конденсата.

Специфические свойства «вырожденных» систем обусловлены существованием в их колебательном спектре ветви (*мягкой моды*), связанной именно с колебаниями направления «вектора параметра порядка»; частота этих колебаний обращается в нуль в точке фазового перехода. Закон их дисперсии можно, с одной стороны, найти из макроскопических уравнений движения, а с другой — он должен удовлетворять требованиям масштабной инвариантности. Это позволяет, если эта гипотеза верна, полностью выразить кинетические критические индексы через термодинамические. Сделаем это на примере жидкого гелия (*R.A. Ferrell, N. Meynyhard, H. Schmidt, F. Shwabl, P. Szépfalusy*, 1967).

В этом случае «мягкой модой» является второй звук. Вблизи точки перехода он представляет собой совместные колебания сверхтекучей скорости $\mathbf{v}_s$ и энтропии; амплитуда колебаний нормальной скорости во втором звуке $v_n \sim v_s\rho_s/\rho_n$ и вблизи точки фазового перехода (λ-точки) мала вместе с ρ_s. Напомним, что сверхтекучая скорость связана с фазой конденсатной функции волновой функции ($\mathbf{v}_s = \hbar\nabla\Phi/m$), так что колебания $\mathbf{v}_s$ означают колебания фазы или, другими словами, направления «вектора параметра порядка». Закон дисперсии этих колебаний:

$$\omega = u_2 k, \tag{103.2}$$

где

$$u_2 = \sqrt{\frac{TS^2\rho_s}{C_p\rho_n}} \approx \sqrt{\frac{T_\lambda S_\lambda^2\rho_s}{C_p\rho}} \tag{103.3}$$

— скорость второго звука (S — энтропия, C_p — теплоемкость единицы массы жидкости); вблизи λ-точки можно заменить T и S их значениями T_λ и S_λ в самой этой точке, а плотность ρ_n нормальной компоненты жидкости — ее полной плотностью ρ [1]).

При $T \to T_\lambda$ плотность ρ_s стремится к нулю по закону

$$\rho_s \propto (T_\lambda - T)^{(2-\alpha)/3}, \tag{103.4}$$

где α — критический индекс теплоемкости:

$$C_p \propto |T_\lambda - T|^{-\alpha} \tag{103.5}$$

(см. IX, (28.3)). Закон же стремления к нулю скорости u_2 зависит от знака индекса α. Если $\alpha > 0$, так что $C_p \to \infty$, то

$$u_2 \propto (T_\lambda - T)^{(1+\alpha)/3}, \qquad \alpha > 0.$$

Если же $\alpha < 0$, то C_p стремится к конечному пределу (напомним, что критический индекс определяет поведение лишь особой части теплоемкости вблизи точки перехода!); тогда

$$u_2 \propto (T_\lambda - T)^{(2-\alpha)/6}, \qquad \alpha < 0. \tag{103.6}$$

---

[1]) Напомним (см. VI, § 130), что скорости первого и второго звука в жидком гелии вычисляются как корни дисперсионного уравнения

$$u^4 - u^2\left[\left(\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)_S + \frac{\rho_s TS^2}{\rho_n C_v}\right] + \frac{\rho_s TS^2}{\rho_n C_p}\left(\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)_S = 0.$$

Вне непосредственной близости к λ-точке мал коэффициент теплового расширения, а вместе с ним мала и разность $C_p - C_v$, так что можно положить $C_p \approx C_v$. При $T \to T_\lambda$ C_p заметно отличается от C_v. При этом, однако, стремится к нулю ρ_s и с учетом этой малости получается (103.3).

Ниже будем считать, что $\alpha < 0$ (как это, по-видимому, фактически имеет место для жидкого гелия: $\alpha \approx -0,02$).

Затухание второго звука описывается мнимой частью частоты. Вдали от λ-точки, ниже ее, она мала, но возрастает по мере приближения к λ-точке, и в непосредственной ее окрестности, при $kr_c \sim 1$, затухание становится порядка единицы (т. е. $\operatorname{Im}\omega \sim |\omega|$). Выше же λ-точки, на достаточном удалении от нее, мы получим обычную затухающую тепловую волну (решение уравнения теплопроводности) с законом дисперсии

$$\omega = i\frac{\varkappa}{\rho C_p}k^2, \tag{103.7}$$

где $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности.

Применим теперь гипотезу масштабной инвариантности, согласно которой вблизи λ-точки закон дисперсии должен иметь вид

$$\omega = k^z f(kr_c).$$

Иначе можно записать эту зависимость как [1])

$$\omega = k^z f\left(\frac{T-T_\lambda}{k^{1/\nu}}\right) \tag{103.8}$$

(с другой функцией f), где ν — критический индекс корреляционного радиуса.

Справедливость законов дисперсии (103.2) и (103.7) не ограничена каким-либо условием удаленности от λ-точки, но при заданной температуре ограничена условием $kr_c \ll 1$ — длина волны должна быть велика по сравнению с корреляционным радиусом; в противном случае теряют применимость макроскопические уравнения, на которых эти законы основаны.

Рассмотрим сначала область температур ниже точки перехода. Требование, чтобы при $kr_c \ll 1$ закон дисперсии был линеен по k, определяет предельное выражение функции $f(\xi)$ в (103.8):

$$f(\xi) \propto (-\xi)^{\nu(z-1)} \quad \text{при } \xi \to -\infty.$$

Тем самым определяется и зависимость закона дисперсии от температуры:

$$\omega \propto k(T_\lambda - T)^{\nu(z-1)}. \tag{103.9}$$

[1]) Эти соотношения должны быть верны во флуктуационной области, что во всяком случае требует выполнения неравенства $|T-T_\lambda| \ll T_\lambda$. Существуют, однако, указания на то, что фактически в жидком гелии это неравенство должно выполняться с большим запасом, что означало бы наличие в теории некоторого малого числового параметра.

Сравнив этот результат с (103.6), находим

$$\nu(z-1) = \frac{2-\alpha}{6}.$$

Критические индексы ν и α связаны друг с другом соотношением $3\nu = 2-\alpha$ (см. V, (149.2)); отсюда [1])

$$z = \frac{3}{2}. \qquad (103.10)$$

При $T \to T_\lambda$ частота должна стремиться к конечному пределу; для этого должно быть $f(0) = \mathrm{const}$. Таким образом, закон дисперсии второго звука в самой λ-точке:

$$\omega \propto k^z. \qquad (103.11)$$

При этом мнимая часть ω того же порядка величины, что и вещественная. При $T \neq T_\lambda$ закон дисперсии (103.11) справедлив для коротких волн, удовлетворяющих условию $kr_c \gg 1$.

Наконец, рассмотрим область температур $T > T_\lambda$. Здесь при $kr_c \ll 1$ зависимость ω от k должна быть квадратичной. Для этого должно быть

$$f(\xi) \propto \xi^{\nu(z-2)} \quad \text{при } \xi \to +\infty.$$

Тогда

$$\omega \propto k^2 (T - T_\lambda)^{\nu(z-2)}.$$

Сравнив с (103.7) и выразив ν через α, найдем температурную зависимость коэффициента теплопроводности в виде

$$\varkappa \propto (T - T_\lambda)^{-(2-\alpha)/6}. \qquad (103.12)$$

Он стремится к бесконечности при $T \to T_\lambda$ по закону, близкому к $(T - T_\lambda)^{-1/3}$.

Во втором звуке мы имеем дело с колебаниями фазы Φ конденсатной волновой функции. Поэтому величина $1/\mathrm{Im}\,\omega$ имеет также смысл времени релаксации фазы. При $k \to 0$ она, естественно, обращается в бесконечность — в однородной жидкости изменение фазы не связано с изменением энергии и потому фаза не может релаксировать.

Время релаксации абсолютной величины $|\Xi| = \sqrt{n_0}$ — плотности конденсата — не совпадает, вообще говоря, со временем релаксации фазы. Но по смыслу масштабной инвариантности

[1]) При $\alpha > 0$ получилось бы $z = \dfrac{3}{2-\alpha}$.

можно утверждать, что оба времени сравниваются по порядку величины при $kr_c \sim 1$. Согласно (103.9) имеем для этого времени

$$\tau \sim \frac{1}{\omega(1/r_c)} \propto r_c(T_\lambda - T)^{-\nu(z-1)} \propto (T_\lambda - T)^{-\nu z}.$$

Со значением z из (103.10) находим

$$\tau \propto (T_\lambda - T)^{-1+\alpha/2}. \tag{103.13}$$

Время релаксации плотности конденсата остается конечным и при $k \to 0$, отнюдь не обращаясь в бесконечность, как для фазы. Поэтому закон температурной зависимости (103.13) для релаксации плотности конденсата остается в силе и при $k = 0$ (*В.Л. Покровский*, *И.М. Халатников*, 1969) [1]).

[1]) При $\alpha > 0$ получилось бы $\tau \propto (T_\lambda - T)^{-1}$ в точном совпадении с законом (101.6), полученном в рамках теории Ландау. Это совпадение, однако, в известном смысле случайно.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ [1]

Аккомодация 80
Альвеновская волна 286
— скорость 286

Барнеттовские члены 67
Бесстолкновительная ударная волна 189

Вариационный принцип для кинетического уравнения 50
Ведущие центры орбит 310, 311
Время свободного пробега 25
Вторая вязкость ультрарелятивистского газа 42
Второй звук в диэлектрике 365
Вырождение фононного спектра 355
Высокочастотные колебания 284
Вытеснение магнитного поля плазмой 309

Газ твердых шариков 52, 59, 103
Газокинетические формулы для кинетических коэффициентов 39, 41, 57
Геликоидальные волны 288, 454
Гиромагнитная частота 267
Глобальная неустойчивость 341
Глубина проникновения 442, 449, 453, 505
Гриновские функции запаздывающие и опережающие 476
— — мацубаровские 496
— — фононного газа 479

Дебаевский радиус 141, 146, 185
Детальное равновесие при излучении фотона 241, 242
— — — отражении от стенки 79
Диссипативная функция 370, 373
Диффузия в импульсном пространстве 118, 207, 420, 424
— поперечная 319, 320
— по размерам зародыша 512, 515
— по энергиям 132
Длина свободного пробега 25
— — — в диэлектриках 353, 364
— — — в плазме 215
— — — в ферми-жидкости 383
Дрейф электрический 311

Зажатие контура интегрирования 157, 329
Закон Видемана–Франца 399, 407
Запирающая точка 519
Затухание Ландау циклотронное 277
— осцилляций функции распределения 213
— плазменных волн столкновительное 221
Зеркальное отражение электронов 449

Интеграл столкновений Балеску–Ленарда 230, 237, 264
— — Больцмана 23

Компенсированные металлы 415, 438, 457
Коновская особенность 204
Коррелятор плотности 105, 109, 110
— тока 126
Кортевега–де Вриза уравнение 193
— — — для ионно-звуковых волн 199
Кривизна поверхности Ферми 444
Критические зародыши 510, 517
— индексы 527–532
Кулоновский логарифм 211, 212

[1] Этот указатель дополняет оглавление книги, не повторяя его. В указатель включены термины и понятия, непосредственно не отраженные в оглавлении.

Ларморова частота 267
Ларморов радиус 268
Ленгмюровская частота 162
— — вырожденной плазмы 206
Локальное равновесие 30
Лондоновский случай 502

Магнитоактивная плазма 265
— — релятивистская 280
Магнитозвуковые волны 287, 459
Максвелловские вязкие напряжения 68
Матрица плотности 201, 490
Механокалорический эффект 75
Мягкая мода 529, 530

Намагниченность плазмы 315
Неустойчивость ионно-звуковых волн 324
— пучка в магнитном поле 324
— — с разбросом скоростей 324
Низкочастотные колебания 284
Нулевой звук 386

Обмен энергией электронов с ионами 213
— — — — — в релятивистской плазме 255
— — — — — с нелогарифмической точностью 235
Одностороннее преобразование Фурье 172
Отклик на сигнал 332

Паразитные решения 33, 352, 414
Пиппардовский случай 504
Плазменная частота 162
Плазменные волны в вырожденной плазме 206
— — в релятивистской плазме 169
— резонансы 284
Поверхностный импеданс 442, 448, 453, 505
Поглощение звука в бозе-жидкости 393
Подвижность в газе 58
— электрона 124, 125
Полиномы Сонина 47
Правило обхода Ландау 155, 271
Проводимость плазмы 216, 220, 299
— — релятивистской 255
Проницаемости продольная и поперечная 152, 164
— — — — релятивистской плазмы 165

Пространственная дисперсия в магнитном поле 269
— —, условия пренебрежения 153, 272
Процессы переброса 345, 352, 359–361, 411–415

Резонансные частицы 245, 377

Свистящие атмосферики 288
Свободномолекулярное обтекание 83, 86, 88
— расширение в вакуум 83
— течение по трубе 86
Солитоны при адиабатическом захвате 191
Сохранение момента импульса 31
Спектральная функция флуктуаций 108

Температурный скачок 71
Теорема Лиувилля 21, 90, 257
Тепловое скольжение 72
Термодиффузия 56, 57
Термомеханический эффект 74
Термоэлектрические коэффициенты 221, 295, 302, 396, 399, 410, 421
Транспортное сечение 56, 210, 320

Увлечение электронов фононами 411, 421, 429
Улучшенная логарифмическая точность 234–236
Уравнения Власова 149
— Горькова 496
Условие унитарности 20, 363
Устойчивость изотропной плазмы 160

Циклотронная частота 267
Циклотронный резонанс 272, 277, 292
— — в релятивистской плазме 281

Число Кнудсена 66
— Рейнольдса 67

Экранирование 164, 205
— динамическое 230
Электронная плазма 164
Эффект Зенфтлебена 63
— Кнудсена 82
— Ледюка–Риги 296
— Холла 296, 435
— Шубникова–де Гааза 460
— — — в изотропной модели 467

Учебное издание

ЛИФШИЦ Евгений Михайлович
ПИТАЕВСКИЙ Лев Петрович

ФИЗИЧЕСКАЯ КИНЕТИКА

(Серия: «Теоретическая физика», том X)

Редакторы: *Ю. Г. Рудой, Д. А. Миртова*
Оригинал-макет: *Ст. Ю. Мельников*

ЛР №071930 от 06.07.99
Подписано в печать 10.07.01. Формат 60×90 $^1/_{16}$
Бумага офсетная № 1. Печать офсетная
Усл. печ. л. 33,5. Уч.-изд. л. 32,8
Тираж 3000 экз. Заказ №

Издательская фирма
«Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117864 Москва, Профсоюзная ул., 90

Отпечатано с готовых диапозитивов в ПФ «Полиграфист»
160001, г. Вологда, ул. Челюскинцев, 3.
Тел.: (8172) 72-55-31, 72-61-75, факс (8172) 72-60-72.
E-mail: pfpv@vologda.ru   http://www.vologda/~pfpv